

文章编号: 1001-0920(2017)01-0181-06

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0088

## 基于向量变换的离散 GM(1,1) 模型病态性

郭金海<sup>1,3</sup>, 杨锦伟<sup>3,4†</sup>, 李军亮<sup>2</sup>, 杨明合<sup>2</sup>, 孙玉秋<sup>1</sup>, 黎雄<sup>1</sup>

(1. 长江大学 信息与数学学院, 湖北 荆州 434023; 2. 长江大学 石油工程学院, 武汉 430100;  
3. 武汉理工大学 理学院, 武汉 430070; 4. 平顶山学院 数学学院, 河南 平顶山 467000)

**摘要:** 离散 GM(1,1) 模型建模时的病态性会导致模型的不稳定. 运用向量的数乘和旋转变换研究离散 GM(1,1) 模型的病态性问题, 发现离散 GM(1,1) 模型的病态性产生的原因与累加向量和全 1 向量的长度比值和夹角有关. 运用数乘和旋转变换将矩阵转化为良态矩阵, 用以解决离散 GM(1,1) 模型的病态性问题. 算例结果表明, 向量变换是解决离散 GM(1,1) 模型病态性的一种有效的方法.

**关键词:** 离散 GM(1,1) 模型; 病态性; 数乘变换; 旋转变换; 条件数

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

## Morbidity of discrete DGM(1, 1) model based on vector transformation

GUO Jin-hai<sup>1,3</sup>, YANG Jin-wei<sup>3,4†</sup>, LI Jun-liang<sup>2</sup>, YANG Ming-he<sup>2</sup>, SUN Yu-qiu<sup>1</sup>, LI Xiong<sup>1</sup>

(1. School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou 434023, China; 2. School of Petroleum Engineering, Yangtze University, Wuhan 430100, China; 3. School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China; 4. School of Mathematics Science, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, China)

**Abstract:** If the morbidity appears in the discrete GM(1,1) model, it will lead to the instability of the model. Therefore, multiple and rotation transformation is used to solve the morbidity of discrete GM(1,1) model. It is founded that the causes of the morbidity of discrete GM (1,1) model are related to the ratio of the length and the angle with the accumulation vector and the vector with all the elements equal to 1. The matrix is regulated to a well-conditioned one by multiple and rotation transformation of vectors, which can completely solve the instability of the discrete GM(1,1) model. Numerical results show that vector transformation is an effective method for the morbidity problem of the discrete GM(1,1) model.

**Keywords:** discrete GM(1,1) model; morbidity; multiple transformation; rotation transformation; condition number

## 0 引言

GM(1,1) 模型是灰色系统的基本模型之一, 谢乃明等在此基础上提出了离散 GM(1,1) 模型<sup>[1]</sup>, 运用离散 GM(1,1) 模型预测中国能源消费和单位 GDP 的能源消耗量<sup>[2]</sup>. 在此基础上, 人们发展并建立了非齐次离散 GM(1,1) 模型<sup>[3]</sup>和分数阶非齐次离散 GM(1,1) 模型<sup>[4]</sup>, 并结合区间灰数建立了非齐次离散 GM(1,1) 模型<sup>[5]</sup>, 这些成果是离散 GM(1,1) 模型快速发展的表现. 有理由相信, 基于离散 GM(1,1) 模型的新模型和应用将更多. 在实际工程控制、测量平差模型、经济、统计分析等数据处理中, 测量等因素的影响将引起数据微小的观测误差, 计算中的舍入误差会使计算结果产生很大的误差, 即病态性. 当病态性发生时, 运用 Matlab

软件计算会提示矩阵的条件数过大, 导致计算结果的不准确. 因此, 研究离散 GM(1,1) 模型病态性产生的原因和解决其病态性具有重要的意义.

灰色模型首先对原始序列进行累加生成, 系数矩阵  $B$  的条件数可能会很大 (大于 1 000), 导致计算的结果不准确. 文献 [6] 指出, 在灰色建模时, 数据矩阵  $B$  会出现严重漂移, 即  $B$  中某个数据的微小变动会导致模型参数很大的波动; 文献 [7] 指出, 在灰色建模计算中会出现病态性, 需要引起注意. 目前, 关于灰色模型病态问题的研究主要有: 1) 仿射变换法. 采用仿射变换对 GM(1,1) 模型的病态性进行分析并将矩阵降为良态矩阵<sup>[8]</sup>, 采用数乘变换降低累积法 GM(2,1) 模型的矩阵条件数, 但其降低效果有限, 仍为病态矩阵<sup>[9]</sup>.

收稿日期: 2016-01-20; 修回日期: 2016-04-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11571041, 71540027, 51479151); 湖北省自然科学基金项目(2013CFA053).

作者简介: 郭金海(1980—), 男, 副教授, 博士生, 从事灰色系统理论与应用等研究; 杨锦伟(1983—), 男, 博士生, 从事灰色系统理论与应用的研究.

†通信作者. E-mail: youngjinwei@126.com

2) 特征值估计法. 对于 GM(1,1) 模型<sup>[10]</sup>、GM(1,1) 幂模型<sup>[11]</sup>、灰色 Verhulst 模型<sup>[12]</sup>、灰色 Verhulst 拓展模型<sup>[13]</sup>、NGM(1,1,  $k$ ) 模型<sup>[14]</sup>、NGM(1,1,  $k^\alpha$ ) 模型<sup>[15]</sup> 和离散 GM(1,1) 模型<sup>[16]</sup> 矩阵的条件数, 运用特征值的估计给出其上界, 表明矩阵元素过大或过小是导致病态性的原因. 3) 向量变换法. 根据矩阵列向量的长度和夹角分析 GM(1,1) 幂模型<sup>[17]</sup> 和 GM(2,1) 模型<sup>[18]</sup> 的病态性产生的原因并解决其病态性.

关于离散 GM(1,1) 模型病态性的问题已有一定的研究<sup>[16]</sup>, 但其病态性并未完全解决, 本文将通过向量的数乘变换和旋转变换研究其病态性问题. 具体内容如下: 首先, 对列数为 2 的一般矩阵  $B$  的列向量进行数乘变换, 再实施旋转变换, 使矩阵  $B^T B$  为良态矩阵; 其次, 将数乘变换和旋转变换应用到离散 GM(1,1) 模型, 给出病态性出现的原因及解决病态性的步骤, 对于齐次指数序列给出条件数关于发展系数  $a$  和序列长度  $n$  的函数关系式; 然后, 在序列长度  $n = 5, 7$  时, 分别计算齐次指数序列在离散 GM(1,1) 模型下数乘变换和旋转变换后的条件数; 最后, 通过实例计算离散 GM(1,1) 模型的参数和条件数, 结果进一

步表明, 向量变换法能够很好地解决离散 GM(1,1) 模型病态性问题.

## 1 向量变换下矩阵的条件数

通常采用条件数衡量矩阵的病态性, 当条件数大于 10 时, 认为模型呈病态, 否则为良态. 对于列数为 2 的一般矩阵  $B$ , 对其列向量实施数乘变换和旋转变换, 降低  $B^T B$  的条件数, 使矩阵  $B^T B$  为良态矩阵<sup>[17-18]</sup>.

**引理 1**<sup>[17-18]</sup> 已知  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  为非零实向量, 矩阵  $B = (X, \rho Y)$ ,  $C = B^T B$ , 常数  $\rho > 0$ , 则当存在  $\rho$  使得  $\|X\| = \rho\|Y\|$  时, 矩阵  $C$  的条件数达到最小值  $k(C) = \frac{1 + |\cos \theta|}{1 - |\cos \theta|}$ ,  $\theta$  为向量  $X, Y$  的夹角.

引理 1 给出了数乘变换下矩阵  $B^T B$  的条件数达到最小值时的数乘量  $\rho$ . 引理 1 表明, 矩阵  $B^T B$  的条件数由列向量  $X, Y$  的长度比值和夹角  $\theta$  确定, 当数乘变换使得列向量  $X, Y$  的长度相等时, 条件数达到最小值. 引理 1 给出了条件数与向量夹角之间的函数关系式, 条件数所属区间与列向量夹角范围对应关系见表 1.

表 1 条件数所属区间对应向量夹角  $\theta$  的取值范围

条件数	(100, $\infty$ )	(10, 100)	[1, 10]
夹角 $\theta^\circ$	[0, 11.42] or (168.58, 180]	(11.42, 35.10) or (144.90, 168.58)	(35.10, 144.90)
$ \cos \theta $ 值	(99/101, 1]	(9/11, 99/101)	[0, 9/11)

当列向量  $X, Y$  的夹角  $\theta \in (35.10^\circ, 144.90^\circ)$  时, 数乘变换将矩阵降为良态矩阵; 当列向量  $X, Y$  的夹角  $\theta \notin (35.10^\circ, 144.90^\circ)$  时, 数乘变换不能将矩阵降为良态矩阵.

**引理 2**<sup>[17-18]</sup> 已知  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  为非零实向量, 矩阵  $B = (X, Y)$ ,  $C = B^T B$ ,  $\rho > 0$ ,  $\|X\| = \|Y\| = M$ ,  $\theta$  为向量  $X, Y$  的夹角, 则有:

1) 当向量夹角  $\theta \in (0^\circ, 35.10^\circ)$  时, 即  $X^T Y > 0$  且  $k(C) > 10$ , 取常数  $c = \frac{\|Y\|}{\|X - Y\|}$ , 则  $B^* = (c(X - Y), Y)$ , 矩阵  $B^*$  的列向量  $c(X - Y)$  与  $Y$  的长度相等, 夹角  $\theta^* = \left(90^\circ + \frac{\theta}{2}\right) \in (90^\circ, 107.55^\circ) \subset (35.10^\circ, 144.90^\circ)$ .  $C^* = (B^*)^T B^*$  为良态矩阵, 条件数  $k(C^*) = \frac{1 - \cos \theta^*}{1 + \cos \theta^*} < 10$ , 其中  $\cos \theta^* = \frac{\cos \theta - 1}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}$ .

2) 当向量夹角  $\theta \in (144.90^\circ, 180^\circ)$  时, 即  $X^T Y < 0$  且  $k(C) > 10$ , 取常数  $c = \frac{\|Y\|}{\|X + Y\|}$ , 则  $B^* = (c(X + Y), Y)$ , 矩阵  $B^*$  的列向量  $c(X + Y)$  与  $Y$  长度相等, 夹角  $\theta^* = \frac{\theta}{2} \in (72.45^\circ, 90^\circ) \subset (35.10^\circ, 144.90^\circ)$ .  $C^* = (B^*)^T B^*$  为良态矩阵, 条件数  $k(C^*) = \frac{1 + \cos \theta^*}{1 - \cos \theta^*} <$

10, 其中  $\cos \theta^* = \frac{\cos \theta + 1}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}}$ .

引理 2 在引理 1 的基础上继续实施旋转变换, 将矩阵化为良态矩阵.

## 2 离散 GM(1,1) 模型病态性问题分析

在第 1 节中, 对于列数为 2 的一般矩阵  $B$ , 通过向量变换的方法可以使矩阵  $B^T B$  为良态矩阵. 在离散 GM(1,1) 模型的参数辨识中, 系数矩阵  $B_0$  的列数为 2, 因此可以运用第 1 节中向量变换法研究离散 GM(1,1) 模型病态性问题.

为了叙述简洁, 下面对本文中的一些常用符号进行说明:

$$M = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n-1))^T;$$

$$N = (1, 1, \dots, 1)_{n-1}^T;$$

$$S(j) = \sum_{k=1}^{n-1} (x^{(1)}(k))^j, j \in \{0, 1, 2\};$$

$$S(0) = N^T N = n - 1, S(1) = M^T N = \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k),$$

$$S(2) = M^T M = \sum_{k=1}^{n-1} (x^{(1)}(k))^2.$$

### 2.1 离散 GM(1,1) 模型的定义

定义 1<sup>[1]</sup> GM(1,1) 模型的离散形式

$$x^{(1)}(k+1) = \beta_1 x^{(1)}(k) + \beta_2 \quad (1)$$

称为离散 GM(1,1) 模型, 记为 DGM(1,1) 模型.

称  $\beta_1, \beta_2$  为 DGM(1,1) 的一级参数包, 记为  $P_I = (\beta_1, \beta_2)^T$ . 原始序列为  $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ , 累加序列为  $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ . 其中:  $x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^k x^{(0)}(m)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . 一级参数包  $P_I$  在最小二乘准则下的矩阵形式为

$$P_I = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = (B_0^T B_0)^{-1} B_0^T Y_0. \quad (2)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 1 \\ x^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & 1 \end{bmatrix} = (M, N), \quad Y_0 = \begin{bmatrix} x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) \end{bmatrix}.$$

初值取为  $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ , 则递推函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k x^{(0)}(1) + \frac{1 - \beta_1^k}{1 - \beta_1} \beta_2. \quad (3)$$

累减还原可得  $\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

### 2.2 离散 GM(1,1) 模型的数乘变换

对原始序列  $X^{(0)}$  进行数乘变换可得序列  $Y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n))$ . 其中:  $y^{(0)}(i) = \rho x^{(0)}(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\rho$  为非零常数, 数乘变换后的一次累加生成序列  $y^{(1)}(i) = \sum_{m=1}^i y^{(0)}(m) = \rho x^{(1)}(i)$ , 数乘变换后 DGM(1,1) 模型的系数矩阵为

$$B_y = \begin{bmatrix} y^{(1)}(1) & 1 \\ y^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ y^{(1)}(n-1) & 1 \end{bmatrix} = (\rho M, N) = B_0 \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y_y = (y^{(1)}(2), y^{(1)}(3), \dots, y^{(1)}(n))^T = \rho Y_0.$$

下面将研究矩阵  $B_y^T B_y$  的条件数, 给出 DGM(1,1) 模型中数乘量  $\rho$  的计算公式.

定理 1 DGM(1,1) 模型表示为  $x^{(1)}(k+1) = \beta_1 x^{(1)}(k) + \beta_2$ , 对原始序列进行数乘变换  $y^{(0)}(i) = \rho x^{(0)}(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 则当  $\rho = \sqrt{\frac{n-1}{S(2)}}$  时,  $C_y = B_y^T B_y$  的条件数达到最小值  $k(C_y) = \frac{1 + |\cos \theta|}{1 - |\cos \theta|}$ , 其中  $\theta$  为向量  $M, N$  的夹角.

证明  $B_y = (\rho M, N)$ , 由引理 1 可知, 当  $\|\rho M\| = \|N\|$  时, 矩阵  $C_y = B_y^T B_y$  的条件数达到最小, 即  $\rho\sqrt{s(2)} = \sqrt{n-1}$ , 则当  $\rho = \sqrt{\frac{n-1}{S(2)}}$  时,  $C_y = B_y^T B_y$

的条件数达到最小值  $k(C_y) = \frac{1 + |\cos \theta|}{1 - |\cos \theta|}$ .

数乘变换后的 DGM(1,1) 模型为

$$y^{(1)}(k+1) = \beta_1 y^{(1)}(k) + \rho \beta_2. \quad (4)$$

一级参数包  $P_y$  在最小二乘准则下的矩阵形式为

$$P_y = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \rho \beta_2 \end{bmatrix} = (B_y^T B_y)^{-1} B_y^T Y_y. \quad (5)$$

初值为  $y^{(1)}(1) = y^{(0)}(1) = \rho x^{(0)}(1)$ , 递推函数为

$$\hat{y}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k y^{(0)}(1) + \frac{1 - \beta_1^k}{1 - \beta_1} \rho \beta_2. \quad (6)$$

累减还原  $\hat{y}^{(0)}(k+1) = \hat{y}^{(1)}(k+1) - \hat{y}^{(1)}(k)$ .

数乘还原  $\hat{x}^{(0)}(k+1) = \frac{\hat{y}^{(0)}(k+1)}{\rho}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .  $\square$

### 2.3 离散 GM(1,1) 模型的旋转变换

在 DGM(1,1) 模型中, 通过定理 1 进行数乘变换  $y^{(0)}(i) = \rho x^{(0)}(i)$  ( $\rho = \sqrt{\frac{n-1}{S(2)}}$ ) 后, 如果矩阵  $C_y = (B_y)^T B_y$  的条件数小于 10, 则为良态矩阵; 如果矩阵  $C_y = (B_y)^T B_y$  的条件数大于 10, 则继续运用引理 2 的旋转变换将矩阵转化为良态矩阵.

定理 2 进行数乘变换  $y^{(0)}(i) = \rho x^{(0)}(i)$  后的 DGM(1,1) 模型为  $y^{(1)}(k+1) = \beta_1 y^{(1)}(k) + \rho \beta_2$ , 如果矩阵  $C_y = (B_y)^T B_y$  的条件数大于 10, 并且取  $c = \frac{\sqrt{n-1}}{\|\rho M - N\|}$ , 则旋转变换后的 DGM(1,1) 模型为  $y_*^{(1)}(k+1) = \beta_1^* y_*^{(1)}(k) + \beta_2^*$ . 其中:  $\beta_1^* = \beta_1$ ,  $\beta_2^* = \rho \beta_2 + \beta_1 - 1$ ,  $y_*^{(1)}(k) = c(y^{(1)}(k) - 1)$ . 矩阵  $C^* = (B^*)^T B^*$  的条件数小于 10, 为良态矩阵.

证明 数乘变换后的系数矩阵  $B_y = (M_y, N_y) = (\rho M, N)$ , 因为  $x^{(1)}(i)$  全大于 0, 则  $M^T N > 0$ , 向量  $M, N$  的夹角小于  $90^\circ$ . 若矩阵  $C_y = (B_y)^T B_y$  的条件数大于 10, 则由表 1 可得  $\theta \in (0^\circ, 35.10^\circ)$ , 根据引理 2 进行旋转变换

$$B^* = (c(M_y - N_y), N_y) = (M_y, N_y) \begin{bmatrix} c & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} =$$

$$B_0 \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} = B_0 \begin{bmatrix} \rho c & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix},$$

其中常数  $c = \frac{\|N_y\|}{\|M_y - N_y\|} = \frac{\sqrt{n-1}}{\|\rho M - N\|}$ . 数乘变换后的 DGM(1,1) 模型为  $y^{(1)}(k+1) = \beta_1 y^{(1)}(k) + \rho \beta_2$ .

进行如下等价变换:

$$c\{y^{(1)}(k+1) - 1\} = \beta_1 \{c[y^{(1)}(k) - 1]\} + c(\rho \beta_2 + \beta_1 - 1). \quad (7)$$

记  $\beta_1^* = \beta_1$ ,  $\beta_2^* = \rho \beta_2 + \beta_1 - 1$ ,  $y_*^{(1)}(k) = c(y^{(1)}(k) - 1)$ , 则 DGM(1,1) 模型为

$$y_*^{(1)}(k+1) = \beta_1^* y_*^{(1)}(k) + \beta_2^*. \quad (8)$$

系数矩阵  $B^*$  和常数列  $Y^*$  为

$$B^* = \begin{bmatrix} y_*^{(1)}(1) & 1 \\ y_*^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ y_*^{(1)}(n-1) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(y^{(1)}(1) - 1) & 1 \\ c(y^{(1)}(2) - 1) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ c(y^{(1)}(n-1) - 1) & 1 \end{bmatrix} =$$

$$(c(M_y - N_y), N_y) = B_0 \begin{bmatrix} \rho c & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y^* = \begin{bmatrix} y_*^{(1)}(2) \\ y_*^{(1)}(3) \\ \vdots \\ y_*^{(1)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(y^{(1)}(2) - 1) \\ c(y^{(1)}(3) - 1) \\ \vdots \\ c(y^{(1)}(n) - 1) \end{bmatrix} = c(\rho Y_0 - N).$$

由引理 2 可得,  $C^* = (B^*)^T B^*$  的条件数小于 10, 矩阵  $C^*$  为良态矩阵, 最小二乘解为

$$P_I^* = \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{bmatrix} = ((B^*)^T B^*)^{-1} (B^*)^T Y^*. \quad (9)$$

将  $\beta_1^*, \beta_2^*$  代入 DGM(1,1) 模型的时间响应式 (8), 可得 DGM(1,1) 模型的求解公式

$$\hat{y}_*^{(1)}(k+1) = (\beta_1^*)^k \hat{y}_*^{(0)}(1) + \frac{1 - (\beta_1^*)^k}{1 - \beta_1^*} \beta_2^*, \quad (10)$$

其中  $\hat{y}_*^{(1)}(k) = c(\hat{y}^{(1)}(k) - 1) = c(\rho \hat{x}^{(1)}(k) - 1)$ . 由此可得  $\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{1}{\rho} + \frac{\hat{y}_*^{(1)}(k)}{c\rho}$ , 累减还原为  $\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), k = 1, 2, \dots, n-1$ .  $\square$

### 2.4 DGM(1,1) 模型病态性处理步骤

利用向量变换法求解 DGM(1,1) 模型参数的步骤如下.

Step 1: 数乘变换  $y^{(0)}(i) = \rho x^{(0)}(i), i = 1, 2, \dots, n$ , 其中  $\rho = \sqrt{\frac{n-1}{S(2)}}$ . 若矩阵  $C_y = (B_y)^T B_y$  的条件数小于 10, 则为良态矩阵, 由式 (6) 计算预测值; 反之, 若矩阵  $C_y = (B_y)^T B_y$  的条件数大于 10, 则转到 Step 2 继续实施旋转变换.

Step 2: 旋转变换可得系数矩阵  $B^* = (c(M_y - N_y), N_y)$ , 其中常数  $c = \frac{\sqrt{n-1}}{\|\rho M - N\|}$ ,  $C^* = (B^*)^T B^*$  的条件数小于 10, 为良态矩阵, 由式 (10) 计算预测值.

### 2.5 齐次指数序列下 DGM(1,1) 模型的病态性

当原始序列为齐次指数序列时, DGM(1,1) 模型为无偏模型<sup>[1]</sup>, 由于数乘变换不影响建模精度<sup>[16]</sup>, 下面研究首项为 1 的齐次指数序列在 DGM(1,1) 模型下的病态性.

原始序列  $X^{(0)} = [1, e^a, e^{2a}, \dots, e^{(n-1)a}]^T$ , 序列长度为  $n$ , 指数  $a \in (-2, 2)$ , 则有

$$X^{(1)} = \left[ 1, \frac{1 - e^{2a}}{1 - e^a}, \frac{1 - e^{3a}}{1 - e^a}, \dots, \frac{1 - e^{na}}{1 - e^a} \right]^T,$$

$$M = \left[ 1, \frac{1 - e^{2a}}{1 - e^a}, \frac{1 - e^{3a}}{1 - e^a}, \dots, \frac{1 - e^{(n-1)a}}{1 - e^a} \right]^T,$$

$$N = (1, 1, \dots, 1)_{n-1}^T, S(0) = n - 1,$$

$$S(1) = \frac{1}{1 - e^a} \left[ (n - 1) - e^a \frac{1 - e^{(n-1)a}}{1 - e^a} \right],$$

$$S(2) = \frac{\left[ (n - 1) - 2e^a \frac{1 - e^{(n-1)a}}{1 - e^a} + e^{2a} \frac{1 - e^{2(n-1)a}}{1 - e^{2a}} \right]}{(1 - e^a)^2},$$

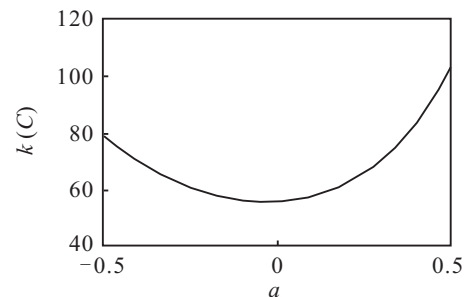
$$\cos \theta = \frac{M^T N}{\|M\| \|N\|} = \frac{S(1)}{\sqrt{S(2)S(0)}} =$$

$$\frac{(n - 1) - e^a \frac{1 - e^{(n-1)a}}{1 - e^a}}{\sqrt{n - 1} \sqrt{\left[ (n - 1) - 2e^a \frac{1 - e^{(n-1)a}}{1 - e^a} + e^{2a} \frac{1 - e^{2(n-1)a}}{1 - e^{2a}} \right]}}. \quad (11)$$

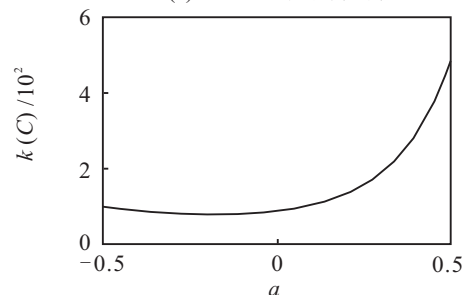
由引理 1 可得, 数乘变换后的条件数为  $k(C_y) = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$ , 如果条件数仍大于 10, 则由引理 2 的 1) 可得,  $M^T N > 0$  且  $k(C_y) > 10$ , 经旋转变换后有  $\cos \theta^* = \frac{\cos \theta - 1}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}} < 0$ , 条件数  $k(C^*) = \frac{1 - \cos \theta^*}{1 + \cos \theta^*} < 10$ , 整理后可得  $k(C^*) = \frac{\sqrt{2(1 - \cos \theta)} - (\cos \theta - 1)}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)} + (\cos \theta - 1)} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \cos \theta}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 - \cos \theta}}$ , 将式 (11) 代入上式可得条件数  $k(C^*)$  关于指数  $a$  和序列长度  $n$  的函数关系式.

### 3 实例分析

例 1 首项为 1 的齐次指数序列, 原始序列  $X^{(0)} = [1, e^a, e^{2a}, \dots, e^{(n-1)a}]^T$ . 由于在  $a \in (-2, 2)$  这个区间内条件数相差过大, 不能很清楚地反映局部情况, 而较小区间  $a \in (-0.5, 0.5)$  能更清晰地展示条件数的变化情况. 对于指数  $a \in (-0.5, 0.5)$ , 分别取序列长度  $n = 5, 7$  绘制图 1~图 3, 其中  $a = 0$  无意义.

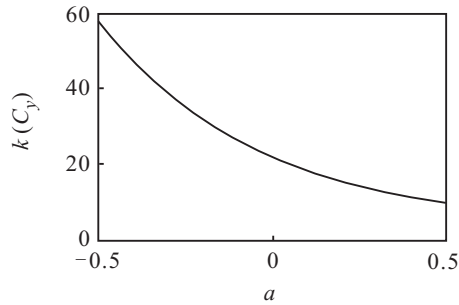


(a)  $n = 5$  时的原矩阵

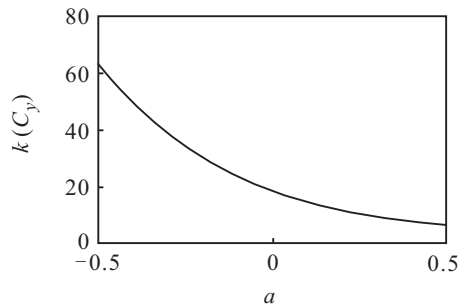


(b)  $n = 7$  时的原矩阵

图 1 原矩阵条件数

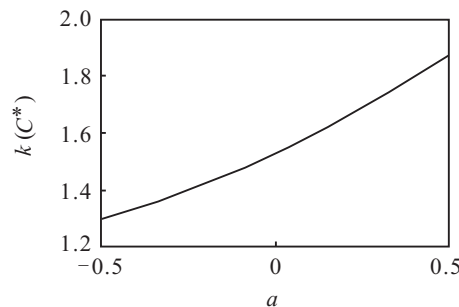


(a)  $n = 5$  时的数乘后矩阵

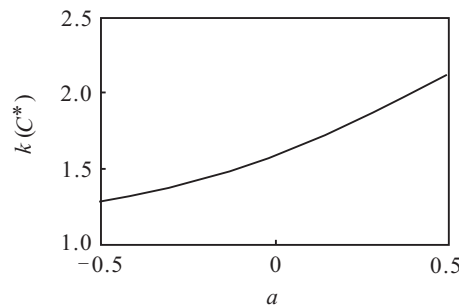


(b)  $n = 7$  时的数乘后矩阵

图 2 数乘后矩阵条件数



(a)  $n = 5$  时的旋转后矩阵



(b)  $n = 7$  时的旋转后矩阵

图 3 旋转后矩阵条件数

图 1~图 3 在指数  $a \in (-0.5, 0.5)$  的较小区间且序列长度  $n = 5, 7$  的情况下, 通过曲线描述了数乘变换和旋转变换后条件数的变化情况. 结果表明, 通过数乘变换可以降低矩阵的条件数, 但是部分区间的矩阵仍为变态矩阵, 再运用旋转变换可以将所有矩阵均化为良态矩阵.

**例 2** 某井井深 2060 m, 下泵深度 1800 m, 由于产量低, 转间抽生产. 根据经验确定间抽生产的合理沉没度(泵在动液面以下的长度)为 50~600 m, 对应的液面高度为 310~860 m. 关井测试动液面的变化,

当动液面深度(井口到动液面的距离)达到 1750 m, 即液面高度为 310 m 时开始记录时间, 每隔 1 h 记录 1 次动液面, 监测情况如表 2 所示<sup>[19]</sup>. 取  $X^{(0)} = (310, 461, 567, 644, 718, 780, 831)$  (液面高度)为原始序列建立 DGM(1,1) 模型, 关键中间量和矩阵的条件数值如表 3 所示.

表 2 关井阶段动液面变化监测数据

时间点/m	1	2	3	4	5	6	7
动液面深度	1750	1599	1493	1416	1342	1280	1229
液面高度	310	461	567	644	718	780	831

表 3 例 2 的中间量和矩阵条件数

中间量	$\rho$	$c$	$\beta_1^*$	$\beta_2^*$	$k(C)$	$k(C_y)$	$k(C^*)$
矩阵条件数值	0.00048	1.83	1.11	0.62	$1.55 \times 10^7$	12.36	1.75

**例 3** 设  $X^{(0)} = (2.23, 8.29, 25.96, 84.88, 271.83)$  为原始序列<sup>[1,16]</sup>, 按照 2.4 节中 DGM(1,1) 模型病态性的处理步骤进行计算, 结果见表 4.

表 4 例 3 的中间量和矩阵条件数

中间量	$\rho$	$c$	$\beta_1^*$	$\beta_2^*$	$k(C)$	$k(C_y)$	$k(C^*)$
矩阵条件数值	0.0157	1.232	3.214	2.792	7351	5.07	2.37

表 3 和表 4 中原始矩阵的条件数分别为  $k(C) = 1.55 \times 10^7$  和 7351, 均为严重病态矩阵, 数乘变换后矩阵的条件数分别降为  $k(C_y) = 12.36$  和 5.07, 再经过旋转变换将矩阵化为良态矩阵且条件数分别为  $k(C^*) = 1.75$  和 2.37.

运用 Matlab 软件计算时不再提示条件数过大会导致计算结果不准确, 模型的平均相对误差分别为 3.60% 和 0.97%, 模型精度不变.

## 4 结 论

运用向量的数乘和旋转变换研究离散 GM(1,1) 模型的病态性问题, 发现离散 GM(1,1) 模型病态性存在的原因在于累加序列的长度与全 1 序列长度的比值(偏离 1 过大)和夹角 ( $\theta \notin (35.10^\circ, 144.90^\circ)$ ), 运用向量变换将矩阵化为良态矩阵, 能够解决离散 GM(1,1) 模型的病态性问题. 对于系数矩阵列数为 2 的灰色模型, 有分数阶累加 GM(1,1) 模型<sup>[20-22]</sup>, 可以运用向量变换法研究其病态性问题; 对于系数矩阵列数大于 2 的灰色模型, 有非齐次离散 GM(1,1) 模型<sup>[3]</sup>和分数阶非齐次离散 GM(1,1) 模型<sup>[4]</sup>, 可以考虑将向量变换与正交变换<sup>[23]</sup>结合, 研究数据的病态性. 这些是有待进一步研究和解决的问题.

## 参考文献(References)

[1] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modeling, 2009, 33(2): 1173-1186.

- [2] Xie N M, Alan D Pearman. Forecasting energy consumption in China following instigation of an energy-saving policy[J]. *Nat Hazards*, 2014, 74(2): 639-659.
- [3] Xie N M, Liu S F, Yang Y J, et al. On novel grey forecasting model based on non-homogeneous index sequence[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(7): 5059-5068.
- [4] Wu L F, Liu S F, Cui W, et al. Non-homogenous discrete grey model with fractional-order Accumulation[J]. *Neural Comput & Applic*, 2014, 25(5): 1215-1221.
- [5] Xie N M, Liu S F. Interval grey number sequence prediction by using non-homogenous exponential discrete grey forecasting model[J]. *J of Systems Engineering and Electronics*, 2015, 26(1): 96-102.
- [6] 邓聚龙. 灰色控制系统[M]. 第2版. 武汉: 华中科技大学出版社, 1993: 355-357.  
(Deng J L. Grey control system[M]. 2nd ed. Wuhan: Press of Huazhong University of Science, 1993: 355-357.)
- [7] 郑照宁, 武玉英, 包涵龄. GM模型的病态性问题[J]. *中国管理科学*, 2001, 9(5): 38-44.  
(Zheng Z N, Wu Y Y, Bao H L. The morbidity problem in GM model[J]. *Chinese J of Management Science*, 2001, 9(5): 38-44.)
- [8] 肖新平, 毛树华. 灰预测与决策方法[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 195-201.  
(Xiao X P, Mao S H. Grey forecast and decision method[M]. Beijing: Science Press, 2013: 195-201.)
- [9] 曾祥燕, 肖新平. 累积法GM(2,1)模型及其病态性研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2006, 28(4): 542-544.  
(Zeng X Y, Xiao X P. Research on morbidity problem of accumulating method GM(2,1) model[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2006, 28(4): 542-544.)
- [10] 党耀国, 王正新, 刘思峰. 灰色模型的病态问题研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2008, 28(1): 156-160.  
(Dang Y G, Wang Z X, Liu S F. Study on morbidity problem in grey model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2008, 28(1): 156-160.)
- [11] 王正新, 党耀国, 刘思峰. GM(1,1)幂模型的病态性[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(7): 1859-1866.  
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. The morbidity of GM(1,1) power model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2013, 33(7): 1859-1866.)
- [12] 崔杰, 刘思峰, 谢乃明, 等. 灰色Verhulst预测模型的病态特性[J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(2): 416-420.  
(Cui J, Liu S F, Xie N M, et al. Study on morbidity of grey Verhulst forecasting model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2014, 34(2): 416-420.)
- [13] 崔杰, 刘思峰. 灰色Verhulst拓展模型的病态性问题[J]. *控制与决策*, 2014, 29(3): 567-571.  
(Cui J, Liu S F. Morbid property of grey extended Verhulst model[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(3): 567-571.)
- [14] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 基于矩阵条件数的NGM(1,1,k)模型病态性研究[J]. *控制与决策*, 2010, 25(7): 1050-1054.  
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Study on morbidity of NGM(1,1,k) model based on conditions of matrix[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(7): 1050-1054.)
- [15] 崔杰, 刘思峰, 马红燕. 含有时间幂次项的灰色预测模型病态特性[J]. *控制与决策*, 2016, 31(5): 953-956.  
(Cui J, Liu S F, Ma H Y. Morbid property of grey prediction model with time-power[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(5): 953-956.)
- [16] 吴正朋, 刘思峰, 党耀国, 等. 再论离散GM(1,1)模型的病态问题研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(1): 108-112.  
(Wu Z P, Liu S F, Dang Y G, et al. Study on the morbidity problem in grey model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2011, 31(1): 108-112.)
- [17] Guo J H, Xiao X P, Liu J, et al. Stability of GM(1,1) power model on vector transformation[J]. *J of Systems Engineering and Electronics*, 2015, 26(1): 103-109.
- [18] Xiao X P, Guo J H. The morbidity problem of GM(2,1) model based on vector transformation[J]. *J of Grey System*, 2014, 26(3): 1-11.
- [19] 李军亮, 廖锐全, 陈晓春. 抽油井间抽周期的灰色预测[J]. *断块油气田*, 2012, 19(5): 634-637.  
(Li J L, Liao R Q, Chen X C. Grey prediction of intermittent cycle for pumping well[J]. *Fault-Block Oil & Gas Field*, 2012, 19(5): 634-637.)
- [20] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2013, 18(7): 1775-1785.
- [21] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Using fractional order accumulation to reduce errors from inverse accumulated generating operator of grey model[J]. *Soft Computing*, 2015, 19(2): 483-488.
- [22] Wu L F, Liu S F, Fang Z G, et al. Properties of the GM(1,1) with fractional order accumulation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 252(2): 287-293.
- [23] 荆科, 刘业政. GM(1,1)模型的病态性问题再研究[J]. *控制与决策*, 2016, 31(5): 869-874.  
(Jing K, Liu Y Z. Study on the morbidity problem of GM(1,1) model[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(5): 869-874.)