

基于滤波器估计的正交函数神经网络非线性系统 H_∞ 控制

王宏伟[†], 夏浩

(大连理工大学 控制科学与控制工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 针对含有多个未知非线性项的非线性系统难于控制的问题, 提出利用 Chebyshev 正交函数构建基于神经网络滤波器的控制器, 并在权值学习误差有界和跟踪误差有界条件下, 通过李雅普诺夫稳定性定理确定控制器的权值, 保证了非线性系统的 H_∞ 鲁棒控制. 最后, 利用所提出算法对非线性系统的滤波器和控制器进行确定, 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词: 正交函数; 神经网络; 非线性系统; H_∞ 控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

H_∞ control of nonlinear system using orthogonal function neural network based on filter estimation

WANG Hong-wei[†], XIA Hao

(School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: For the control problem of nonlinear systems with multiple unknown nonlinear terms, a neural network based on Chebyshev orthogonal functions is proposed to realize the robust control of the system. In the study, a controller based on the neural network filter using Chebyshev orthogonal functions is proposed. Under bounded conditions of weight learning errors and tracking errors, the proposed control method can determine the weights of the controller and ensure the H_∞ robust control of nonlinear systems by using the Lyapunov stability theorem. Finally, for a nonlinear system, the proposed algorithm is used to determine the filter and the controller. The simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: orthogonal function; neural network; nonlinear system; H_∞ control

0 引言

变结构控制一直是控制领域的热门课题, 并得到国内外学者的广泛关注, 特别是滑模变结构控制得到了广大学者的高度重视. 针对滑模控制, 很多研究者提出了新方法, 文献[1]通过“快”和“慢”两种模态切换规则, 对参数型的下三角型连续系统, 通过 Backstepping 实现了其变结构控制. 针对滑模控制算法的复杂度问题, 文献[2]提出了基于多阶滑模的 Backstepping 算法, 从而降低了算法的复杂度. 为了克服非最小相位非线性系统难以控制的困难, 文献[3]提出了自适应滑模变结构控制方法, 通过补偿方式进行控制. 针对变结构控制中的计算膨胀和高复杂度的问题, 文献[4]用一阶滤波器代替微分, 在满足一定条件下解决了膨胀问题. 文献[5-6]对于高阶

非线性系统, 采用改进的高阶滑模微分器做观测器, 设计了递阶 Terminal 滑模控制器. 文献[7-8]提出了基于神经网络的非线性系统的滑模变结构控制.

本文针对非线性系统变结构控制难以实现的问题, 提出了基于 Chebyshev 多项式的单隐层正交函数神经网络, 通过利用单隐层正交函数神经网络, 在权值误差有界和跟踪误差有界条件下, 构建基于滤波器的非线性系统控制器, 并通过鲁棒稳定性定理确定权值. 所采用的控制律无需未知函数及其导数的上界. 最后, 通过一个非线性系统的仿真实例验证了所提出方法的有效性.

1 一类多输入多输出非线性系统模型的描述

首先, 考虑如下形式的非线性系统:

收稿日期: 2015-12-03; 修回日期: 2016-03-29.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61273098).

作者简介: 王宏伟(1969—), 男, 副教授, 博士, 从事系统辨识、自适应控制的研究; 夏浩(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事项目调度、生产运作管理等研究.

[†]通讯作者. E-mail: wanghw@dlut.edu.cn

$$\begin{cases} \dot{x}_1^r = x_2^r + f_1^r(x_1^r), \\ \dot{x}_2^r = x_3^r + f_2^r(x_1^r, x_2^r), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}^r = x_n^r + f_{n-1}^r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n-1}^r), \\ \dot{x}_n^r = f_n^r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r) + g_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)u_r; \end{cases} \quad (1)$$

$$y^r = x_1^r. \quad (2)$$

其中: $x_i^r \in R, i = 1, 2, \dots, n, r = 1, 2, \dots, m, m$ 为子系统的个数; 函数 $f_1^r(x_1^r), f_2^r(x_1^r, x_2^r), f_n^r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r), g_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$ 为未知光滑函数.

为了利用正交函数神经网络来实现非线性系统的控制, 先给出如下引理和推论.

引理1^[9] 若 $f(t)$ 是一致连续函数, 且满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [f(\tau) d\tau] < \infty, \quad (3)$$

则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

推论1^[9] 若 $f(t) \in L_2 \cap L_\infty$, 且 $\dot{f}(t) \in L_\infty$, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

2 正交函数神经网络模型的描述

正交函数神经网络是一个单层神经网络, 输入信号进入网络后, 通过正交函数层后, 利用激励函数产生系统输出, 如图1所示.

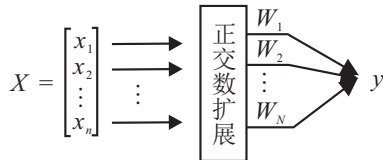


图1 正交函数神经网络结构

采用文献[10-11]中介绍的Chebyshev正交多项式方法, 正交神经网络输出如下:

$$y = \sum_{i=1}^N \Phi_i W_i. \quad (4)$$

其中 $\Phi_i = P_{1i}(x_1)P_{2i}(x_2) \dots P_{ni}(x_n) = \prod_{j=1}^n P_{ji}(x_j)$, $P_{ji}(x_j)$ 为Chebyshev正交多项式, 其形式为 $P_{j1}(x_j) = 1, P_{j2}(x_j) = x_j, P_{ji}(x_j) = 2x_j P_{j(i-1)}(x_j) - P_{j(i-2)}(x_j), j = 1, 2, \dots, N, i \geq 3$.

命题1^[10,12] 给定一个标量 $\varepsilon_0 > 0$ 和一个连续函数 $L(x): x \in R^n$, 存在一个权值矢量 $W = W_0, W_0 = [W_{10}, W_{20}, \dots, W_{N0}]^T$, 使得下式成立:

$$\|L(x) - W_0^T \Phi(x)\| \leq \varepsilon_0, \quad (5)$$

其中 $\Phi(x) = [\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_N(x)]^T$.

3 基于正交函数神经网络的非线性系统控制

3.1 基于滤波器的状态估计

为了更好地设计控制器, 将式(1)中第1个方程微分 $n-1$ 次, 式(1)表示的系统可重写为

$$\begin{cases} \dot{y}_1^r = y_2^r, \\ \dot{y}_2^r = y_3^r, \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1}^r = y_n^r, \\ \dot{y}_n^r = f_0^r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r) + g_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)u_r; \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{r(n)} = f_0^r(y^r, \dot{y}^r, \dots, y^{r(n-1)}) + g_r(y^r, \dot{y}^r, \dots, y^{r(n-1)})u_r. \quad (7)$$

其中 $f_0^r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$ 和 $g_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$ 为未知光滑函数. 为了讨论方便, 记 $f_0^r(\cdot) = f_0^r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r), g_0(\cdot) = g_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$. 这种变换的好处是式(1)描述的系统的前 $n-1$ 个方程中的未知函数都集中到了式(6)和(7)的第 n 个方程中.

由式(6)和(7)可看出, 控制律的实现依赖于新系统的状态 y_i^r , 而 y_i^r 不可测, 所以需要估计出 y_i^r . 由式(1)的第1式 $\dot{x}_1^r = x_2^r + f_1^r(x_1^r)$ 可知, 若要估计 \dot{x}_1^r , 则需知道 $f_1^r(x_1^r)$, 为此引入一个滤波器

$$\dot{\xi}_1^r = -\alpha_1^r(\xi_1^r - x_1^r) + x_2^r + \hat{f}_1^r(x_1^r). \quad (8)$$

其中: $\alpha_1^r > 0, \hat{f}_1^r(x_1^r)$ 为 $f_1^r(x_1^r)$ 的正交神经网络估计, 其误差动态方程为

$$\dot{\xi}_1^r - \dot{x}_1^r = -\alpha_1^r(\xi_1^r - x_1^r) + \hat{f}_1^r(x_1^r) - f_1^r(x_1^r). \quad (9)$$

由性质1和式(8), 可得

$$\dot{\xi}_1^r - \dot{x}_1^r = -\alpha_1^r(\xi_1^r - x_1^r) + \tilde{W}_{r1}^T \Phi_{r1}(x_1^r) - \varepsilon_{r1}. \quad (10)$$

其中: \tilde{W}_{r1} 为正交函数神经网络估计权向量 W_{r1} 与最佳权向量 W_{r1}^* 之差, 即 $\tilde{W}_{r1}^T = (W_{r1})^T - (W_{r1}^*)^T$; ε_{r1} 为取最佳权向量的正交神经网络模型与 $f_1^r(x_1^r)$ 的误差. 取切换面 $S_1^r = \xi_1^r - x_1^r$, 有

$$\dot{S}_1^r = -\alpha_1^r S_1^r + \tilde{W}_{r1}^T \Phi_{r1}(x_1^r) - \varepsilon_{r1}. \quad (11)$$

取 $V_1^r = [(S_1^r)^2 + \text{tr}(\tilde{W}_{r1}^T M_{r1}^{-1} \tilde{W}_{r1})]/2$, 对 V_1^r 求导数可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^r = & -\alpha_1^r (S_1^r)^2 + S_1^r \tilde{W}_{r1}^T \Phi_{r1}(x_1^r) - \\ & S_1^r \varepsilon_{r1} + \text{tr}(\tilde{W}_{r1}^T M_{r1}^{-1} \dot{\tilde{W}}_{r1}). \end{aligned} \quad (12)$$

选择 $\dot{\tilde{W}}_{r1} = -M_{r1} S_1^r \Phi_{r1}(x_1^r)$, 式(12)变为

$$\dot{V}_1^r = -\alpha_1^r (S_1^r)^2 - S_1^r \varepsilon_{r1}, \quad (13)$$

故 S_1^r, \tilde{W}_{r1} 有界, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, S_1^r 将趋近于原点的邻域, 所以 \dot{x}_1^r 的估值为 $\hat{x}_1^r = x_2^r + \hat{d}_1^r(x_1^r), y_2^r = \hat{x}_1^r$, 其中

$$\hat{d}_1^r(x_1^r) = \hat{f}_1^r(x_1^r).$$

为估计 \dot{x}_1^r ,求式(1)中第1个方程二次微分,整理可得

$$\ddot{x}_1^r = x_3^r + d_2^r(x_1^r, x_2^r), \quad (14)$$

其中

$$d_2^r(x_1^r, x_2^r) = f_2^r(x_1^r, x_2^r) + \frac{df_1^r(x_1^r)}{dx_1^r}[x_2^r + f_1^r(x_1^r)].$$

类似于估计 \dot{x}_1^r ,同样引进滤波器

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2^r &= -\alpha_2^r(\xi_2^r - \dot{x}_1^r) + x_3^r + \hat{d}_2^r(x_1^r, x_2^r), \\ \xi_2^r(0) &= \dot{x}_1^r(0). \end{aligned} \quad (15)$$

其中: $\alpha_2^r > 0$, $\hat{d}_2^r(x_1^r, x_2^r)$ 为 $d_2^r(x_1^r, x_2^r)$ 正交神经网络估计.定义切换面 $S_2^r = \xi_2^r - \dot{x}_1^r$,由式(14)和(15)可得

$$\dot{S}_2^r = -\alpha_2^r S_2^r + \hat{d}_2^r(x_1^r, x_2^r) - d_2^r(x_1^r, x_2^r). \quad (16)$$

取 $V_2^r = [(S_2^r)^2 + \text{tr}(\tilde{W}_{r2}^T M_{r2}^{-1} \tilde{W}_{r2})]/2$,其中 W_{r2} 为网络估计权向量, W_{r2}^* 为网络最佳权向量, \tilde{W}_{r2} 为它们的误差,即 $\tilde{W}_{r2} = W_{r2} - W_{r2}^*$.同理可证,当 $\dot{\tilde{W}}_{r2} = -M_{r2} S_2^r \Phi_{r2}(x_1^r, x_2^r)$ 时, S_2^r 趋近于原点的邻域和 \tilde{W}_{r2} 有界,所以 $\hat{x}_1^r = x_3^r + \hat{d}_2^r(x_1^r, x_2^r)$, $\hat{x}_1^r = y_3^r$.

类似地,可以得到 x_1^r 的各阶导数,以及 y_i^r 的估计值

$$\begin{cases} y_1^r = x_1^r, \\ y_2^r = x_2^r + \hat{d}_1^r(x_1^r), \\ y_3^r = x_3^r + \hat{d}_2^r(x_1^r, x_2^r), \\ \vdots \\ y_n^r = x_n^r + \hat{d}_{n-1}^r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n-1}^r)u_r. \end{cases} \quad (17)$$

经过整理,便可得到式(6)和(7)所示系统.

3.2 基于Lyapunov函数的控制器设计

对于控制目标,要求设计基于正交函数神经网络自适应控制器,使得系统(6)和(7)的输出 $\bar{y}^r = (y^r, \dot{y}^r, \dots, y^{r(n-1)})^T \in R^n$ 跟踪系统参考轨迹 $\bar{y}_q^r = (y_q^r, \dot{y}_q^r, \dots, y_q^{r(n-1)})^T \in R^n$,跟踪误差 $\bar{e}^r = \bar{y}_q^r - \bar{y}^r = (e^r, \dot{e}^r, \dots, e^{r(n-1)})^T \in R^n$.系统中所涉及的变量有界,对于给定的干扰抑制水平常数 $\rho > 0$,可获得如下 H_∞ 跟踪性能指标:

$$\begin{aligned} \int_0^T (\bar{e}^r)^T Q (\bar{e}^r) dt &\leq \\ (\bar{e}^r)^T(0) P \bar{e}^r(0) &+ \frac{1}{\gamma} [\tilde{W}^T(0) \tilde{W}(0)] + \rho^2 \int_0^T \Delta^2 dt. \end{aligned} \quad (18)$$

其中: $T \in [0, \infty)$, $\tilde{W}(0) = [W_1 - W_1^*, \dots, W_p - W_p^*]^T$ 为权向量逼近误差(W_i 和 W_i^* 为神经网络的估计权值参数和最优权值参数), $\Delta \in L_2[0, T]$ 为干扰, Q 和 P 为适当维数的对称半正定矩阵, γ 为设计参数.

下面在上述 H_∞ 跟踪性能指标下设计控制器.

首先,选取 $(k_{r1}, k_{r2}, \dots, k_{rn})^T \in R^n$ 使得多项式 $h(s) = s^n + k_{rn}s^{n-1} + \dots + k_{r2}s + k_{r1}$ 的所有根位于 S 平面的左半平面.如果式(6)中的函数 $f_0^r(\cdot)$ 、 $g_r(\cdot)$ 已知,则控制律可以取为

$$u_r = \frac{1}{g_r(\cdot)} [-f_0^r(\cdot) + y_q^{r(n)} + (k_r)^T \bar{e}^r]. \quad (19)$$

将式(19)代入(7),整理可得

$$k_{r1}e^r + k_{r2}\dot{e}^r + \dots + k_{rn}e^{r(n-1)} + e^{r(n)} = 0. \quad (20)$$

但是, $f_0^r(\cdot)$ 、 $g_r(\cdot)$ 均不可知,因此必须先对它们进行估计,用正交函数神经网络来逼近式(6)和(7)中的 $f_0^r(\cdot)$ 、 $g_r(\cdot)$,其相应的正交函数神经网络分别为

$$\begin{aligned} \hat{f}_0^r(\cdot) &= W_{r0}^T \Phi_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n-1}^r), \\ \hat{g}_r(\cdot) &= G_r^T \Phi_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n-1}^r). \end{aligned}$$

于是便可设计如下的自适应控制器:

$$u_r = \frac{1}{\hat{g}_r(\cdot)} [-\hat{f}_0^r(\cdot) + y_q^{r(n)} + (k_r)^T \bar{e}^r]. \quad (21)$$

由于存在建模误差和外部干扰,仅一个等价控制项不能保证闭环系统稳定,为此引入鲁棒补偿器 u_{rf} ,则设计控制器如下:

$$u_r = \frac{1}{\hat{g}_r(\cdot)} [-\hat{f}_0^r(\cdot) + y_q^{r(n)} + (k_r)^T \bar{e}^r - u_{rf}]. \quad (22)$$

将控制器式(22)作用于式(7),可得

$$\begin{aligned} y^{r(n)} &= f_0^r(\cdot) + (g_r(\cdot) + \hat{g}_r(\cdot) - \hat{g}_r(\cdot)) \times \\ &\frac{1}{\hat{g}_r(\cdot)} [-\hat{f}_0^r(\cdot) + y_q^{r(n)} + (k_r)^T \bar{e}^r - u_{rf}] = \\ &f_0^r(\cdot) + (g_r(\cdot) - \hat{g}_r(\cdot)) \frac{1}{\hat{g}_r(\cdot)} \times \\ &[-\hat{f}_0^r(\cdot) + y_q^{r(n)} + (k_r)^T \bar{e}^r - u_{rf}] + \\ &[-\hat{f}_0^r(\cdot) + y_q^{r(n)} + (k_r)^T \bar{e}^r - u_{rf}] = \\ &f_0^r(\cdot) - \hat{f}_0^r(\cdot) + (g_r(\cdot) - \hat{g}_r(\cdot))u_r + \\ &y_q^{r(n)} + (k_r)^T \bar{e}^r - u_{rf}. \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)也可整理为如下误差动态方程:

$$\begin{aligned} e^{(n)} &= -(k^r)^T \bar{e}^r + u_{rf} + (\hat{f}_0^r(\cdot) - f_0^r(\cdot)) + \\ &(\hat{g}_r(\cdot) - g_r(\cdot))u_r. \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)等价于

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}^r &= A_r \bar{e}^r + b_r u_{rf} + b_r [(\hat{f}_0^r(\cdot) - f_0^r(\cdot)) + \\ &(\hat{g}_r(\cdot) - g_r(\cdot))u_r]. \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{r1} & -k_{r2} & -k_{r3} & \dots & -k_{rn} \end{bmatrix}, b_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

给出正交函数神经网络最佳权向量的定义,有

$$\begin{aligned}
 W_{r0}^* &= \\
 \arg \min_{W_{r0} \in \Omega_{f_0^r}} & [\sup |W_{r0}^T \Phi_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n-1}^r) - f_0^r(\cdot)|], \\
 G_r^* &= \\
 \arg \min_{G_r \in \Omega_{g_r}} & [\sup |G_r^T \Phi_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n-1}^r) - g_r(\cdot)|].
 \end{aligned} \tag{26}$$

其中: $\Omega_{f_0^r}$ 、 Ω_{g_r} 分别为 W_{r0} 和 G_r 的约束集, $\Omega_{f_0^r} = \{W_{r0} | \|W_{r0}\| \leq M_r\}$, $\Omega_{g_r} = \{G_r | \|G_r\| \leq N_r\}$, M_r 、 N_r 由设计者给出.

另外,定义最小逼近误差

$$\begin{aligned}
 \Delta_r &= ((W_{r0}^*)^T \Phi_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r) - f_0^r(\cdot)) + \\
 & ((G_r^*)^T \Phi_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r) - g_r(\cdot)) u_r,
 \end{aligned} \tag{27}$$

其中 W_{r0}^* 为正交神经网络最佳权向量.为了叙述方便, $\Phi_r(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n-1}^r)$ 简记为 $\Phi_r(*)$, 于是式(25)可重写为

$$\begin{aligned}
 \dot{e}^r &= A_r \bar{e}^r + b_r u_{rf} + b_r \Delta_r + b_r [(W_{r0})^T \Phi_r(*) - \\
 & (W_{r0}^*)^T \Phi_r(*)] + (G_r^T \Phi_r(*) - (G_r^*)^T \Phi_r(*) u_r].
 \end{aligned}$$

令 $\tilde{W}_{r0} = W_{r0} - W_{r0}^*$, $\tilde{G}_r = G_r - G_r^*$, 式(27)可以表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{e}^r &= A_r \bar{e}^r + b_r u_{rf} + b_r \Delta_r + \\
 & b_r [(\tilde{W}_{r0})^T \Phi_r(*) + (\tilde{G}_r)^T \Phi_r(*) u_r].
 \end{aligned} \tag{28}$$

定理1 对于由式(6)和(7)给出的对象,如果采用如下自适应控制器:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{\hat{g}_r(\cdot)} [-\hat{f}_0^r(\cdot) + y_q^{r(n)} + (k_r)^T \bar{e}^r - u_{rf}], \\ u_{rf} = -\frac{1}{\lambda_r} b_r^T P_r \bar{e}^r \end{cases} \tag{29}$$

和权向量自适应律

$$\begin{cases} \dot{W}_{r0} = -\gamma_1 (\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*), \\ \dot{G}_r = -\gamma_2 (\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*) u_r, \end{cases} \tag{30}$$

则对于给定的干扰抑制水平常数 $\rho > 0$, 系统(6)和(7)所涉及的变量 $y^r, u_r \in L_\infty$, 并且可获得 H_∞ 跟踪性能指标(19). 其中: $\lambda_r > 0$ 为加权因子; $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ 为自适应增益; $P_r \geq 0$ 为如下 Riccati 方程的解:

$$\begin{aligned}
 A_r^T P_r + P_r A_r + Q_r - \frac{2}{\lambda_r} + \frac{1}{\rho^2} P_r b_r b_r^T P_r &= 0, \\
 r &= 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{31}$$

证明 取 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}
 V_r &= \\
 \frac{1}{2} (\bar{e}^r)^T P_r (\bar{e}^r) &+ \frac{1}{2\gamma_1} (\tilde{W}_{r0})^T \tilde{W}_{r0} + \frac{1}{2\gamma_2} (\tilde{G}_r)^T \tilde{G}_r,
 \end{aligned} \tag{32}$$

对 V_r 求时间导数, 有

$$\dot{V}_r = \frac{1}{2} (\dot{\bar{e}}^r)^T P_r (\bar{e}^r) + \frac{1}{2} (\bar{e}^r)^T P_r (\dot{\bar{e}}^r) +$$

$$\frac{1}{\gamma_1} (\dot{\tilde{W}}_{r0})^T \tilde{W}_{r0} + \frac{1}{\gamma_2} (\dot{\tilde{G}}_r)^T \tilde{G}_r.$$

由式(28)可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_r &= \\
 \frac{1}{2} [(\bar{e}^r)^T A_r^T P_r \bar{e}^r - \frac{1}{\lambda_r} (\bar{e}^r)^T P_r b_r b_r^T P_r \bar{e}^r + \\
 \Phi_r^T(*) \tilde{W}_{r0} b_r^T P_r \bar{e}^r + \Phi_r^T(*) \tilde{G}_r b_r^T P_r \bar{e}^r u_r + \\
 \Delta_r^T b_r^T P_r \bar{e}^r + (\bar{e}^r)^T P_r A_r \bar{e}^r + \\
 (\bar{e}^r)^T P_r b_r \tilde{W}_{r0}^T \Phi_r(*) + (\bar{e}^r)^T P_r b_r \tilde{G}_r^T \Phi_r(*) u_r + \\
 (\bar{e}^r)^T P_r b_r \Delta_r] &+ \frac{1}{\gamma_1} (\dot{\tilde{W}}_{r0})^T \tilde{W}_{r0} + \frac{1}{\gamma_2} (\dot{\tilde{G}}_r)^T \tilde{G}_r - \\
 \frac{1}{\lambda_r} (\bar{e}^r)^T P_r b_r b_r^T P_r \bar{e}^r &= \\
 \frac{1}{2} (\bar{e}^r)^T [A_r^T P_r + P_r A_r - \frac{2}{\lambda_r} P_r b_r b_r^T P_r] \bar{e}^r + \\
 \frac{1}{2} [\Delta_r^T b_r^T P_r \bar{e}^r + (\bar{e}^r)^T P_r b_r \Delta_r] + \\
 \frac{1}{\gamma_1} [\gamma_1 (\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r^T(*) + \dot{\tilde{W}}_{r0}^T] \tilde{W}_{r0} + \\
 \frac{1}{\gamma_2} [\gamma_2 (\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r^T(*) u_r + \dot{\tilde{G}}_r^T] \tilde{G}_r.
 \end{aligned} \tag{33}$$

将式(30)和(31)代入(33), 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_r &= \\
 -\frac{1}{2} (\bar{e}^r)^T Q_r \bar{e}^r - \frac{1}{2\rho^2} (\bar{e}^r)^T P_r b_r b_r^T P_r \bar{e}^r + \\
 \frac{1}{2} [\Delta_r^T b_r^T P_r \bar{e}^r + (\bar{e}^r)^T P_r b_r \Delta_r] &= \\
 -\frac{1}{2} (\bar{e}^r)^T Q_r \bar{e}^r - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} (\bar{e}^r)^T P_r b_r - \right. \\
 \left. \rho \Delta_r \right)^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \Delta_r^2 \leq \\
 -\frac{1}{2} (\bar{e}^r)^T Q_r \bar{e}^r + \frac{1}{2} \rho^2 \Delta_r^2.
 \end{aligned} \tag{34}$$

设

$$\begin{aligned}
 c_r &= \min \left\{ \lambda_v, \frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2} \right\}, \\
 \lambda_v &= \min \left\{ \inf A_{\min}(Q_r), \sup A_{\max}(Q_r) \right\}, \\
 \mu_r &= \frac{M_r^2}{2\gamma_1} + \frac{N_r^2}{2\gamma_2} + \frac{1}{2} \rho^2 \bar{\Delta}_r^2.
 \end{aligned}$$

其中 $A_{\min}(Q_r)$ 和 $A_{\max}(Q_r)$ 分别表示矩阵 Q_r 的最小及最大特征值, $\bar{\Delta}_r = \sup \|\Delta_r\|$ 为逼近误差的上界.

对式(34)进行整理, 可得

$$\dot{V}_r \leq -c_r V_r + \mu_r. \tag{35}$$

由式(35)可以得出 $\bar{e}^r, y^r \in L_\infty$. 从 $t = 0$ 到 $t = T$ 对式(34)积分, 可得

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^T (\bar{e}^r)^T Q_r \bar{e}^r dt \leq \\
 V_r(0) + \frac{1}{2} \rho^2 \int_0^T \Delta_r^2 dt - V_r(T) \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &V_r(0) + \frac{1}{2}\rho^2 \int_0^T \Delta_r^2 dt = \\
 &\frac{1}{2}(\bar{e}^r)^T(0)P_r\bar{e}^r(0) + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{W}_{r0}^T(0)\tilde{W}_{r0}(0) + \\
 &\frac{1}{2\gamma_2}\tilde{G}_r^T(0)\tilde{G}_r(0) + \frac{1}{2}\rho^2 \int_0^T \Delta_r^2 dt. \quad (36)
 \end{aligned}$$

取 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, Q_r = Q, P_r = P, \tilde{W} = [W_{r0}^T, G_r^T]^T, \Delta_r = \Delta$, 则式(36)变为

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^T (\bar{e}^r)^T Q (\bar{e}^r) dt \leq \\
 &\frac{1}{2}(\bar{e}^r)^T(0)P\bar{e}^r(0) + \frac{1}{2\gamma}[\tilde{W}^T(0)\tilde{W}(0)] + \\
 &\frac{1}{2}\rho^2 \int_0^T \Delta^2 dt.
 \end{aligned}$$

系统也获得了 H_∞ 控制指标. \square

对于 W_{r0}, G_r 权向量参数的优化, 也可采用投影算法修正, 将权向量参数处于约束集内, 即

$$\begin{cases}
 \dot{W}_{r0} = \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 -\gamma_1(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*), \\
 \|W_{r0}\| < M_r \text{ or } \|W_{r0}\| = M_r, \\
 \text{and } (\bar{e}^r)^T P_r b_r \tilde{W}_{r0}^T \Phi_r(*) \geq 0; \\
 P_{jor}[-\gamma_1(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*), \|W_{r0}\| = M_r, \\
 (\bar{e}^r)^T P_r b_r \tilde{W}_{r0}^T \Phi_r(*) < 0.
 \end{array} \right. \\
 \dot{G}_r = \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 -\gamma_2(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*)u_r, \\
 \|G_r\| < N_r \text{ or } \|G_r\| = N_r, \\
 \text{and } (\bar{e}^r)^T P_r b_r G_r^T \Phi_r(*)u_r \geq 0; \\
 P_{jor}[-\gamma_2(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*)u_r, \|G_r\| = N_r, \\
 (\bar{e}^r)^T P_r b_r G_r^T \Phi_r(*)u_r < 0.
 \end{array} \right.
 \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}
 &P_{jor}[-\gamma_1(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*)] = \\
 &-\gamma_1(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*) + \\
 &\gamma_1 \frac{(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r^T(*)W_{r0}}{\|W_{r0}\|^2} W_{r0}, \\
 &P_{jor}[-\gamma_2(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*)u_r] = \\
 &-\gamma_2(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r(*)u_r + \\
 &\gamma_2 \frac{(\bar{e}^r)^T P_r b_r \Phi_r^T(*)G_r u_r}{\|G_r\|^2} G_r.
 \end{aligned}$$

4 仿真实例

考虑如下所示两个非线性系统.

系统1为

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1^1 = x_2^1 + a_{11}x_1^1 \sin(x_1^1), \\
 \dot{x}_2^1 = x_3^1 + a_{12}x_2^1 \cos(x_1^1) + a_{13}x_1^1 \sin(x_2^1), \\
 \dot{x}_3^1 = u_1,
 \end{cases}$$

$$y^1 = x_1^1;$$

系统2为

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1^2 = x_2^2 + c_{21}(\cos(x_1^2) + 1), \\
 \dot{x}_2^2 = x_3^2 + c_{22}(x_2^2)^2 x_1^2, \\
 \dot{x}_3^2 = c_{23} \sin(x_2^2) + (x_1^2)^{0.5} u_2, \\
 y^2 = x_1^2.
 \end{cases}$$

其中: $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1, c_{21} = c_{22} = c_{23} = 2.5$. 控制的目标是设计控制律使系统的状态由初始状态调节到零, \hat{x}_1^r 和 $\hat{x}_1^r(r = 1, 2)$ 由下式估计:

$$\begin{aligned}
 &\hat{x}_1^r = x_2^r + \hat{f}_1^r(x_1^r), \\
 &\hat{f}_1^r(x_1^r) = \tilde{W}_{r1}^T \Phi_{r1}(x_1^r), \\
 &\hat{\xi}_1^r = \alpha_1^r(x_1^r - \xi_1^r) + x_2^r + \hat{f}_1^r(x_1^r), \\
 &\hat{x}_1^r = x_3^r + \hat{d}_2^r(x_1^r, x_2^r), \\
 &\hat{d}_2^r(x_1^r, x_2^r) = \tilde{W}_{r2}^T \Phi_{r2}(x_1^r, x_2^r), \\
 &\hat{\xi}_2^r = \alpha_2^r(\hat{x}_1^r - \xi_2^r) + x_3^r + \hat{d}_1^r(x_1^r, x_2^r).
 \end{aligned}$$

选择 $\alpha_1^r = \alpha_2^r = 10$. 给定 $Q_r = \text{diag}[10, 10, 10], A_r = 0.05, r = 1, 2, \rho = 0.5, k_{11} = k_{12} = k_{13} = 1, k_{21} = k_{22} = k_{23} = 2$, 解Riccati方程(31), 可得

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \begin{bmatrix} 10.5528 & 0.5 & -0.5528 \\ 0.5 & 10.5026 & -0.5 \\ -0.5528 & -0.5 & 0.5528 \end{bmatrix}, \\
 P_2 &= \begin{bmatrix} 6.2828 & -1.9617 & -0.4108 \\ -1.9617 & 7.8061 & -0.5 \\ -0.4108 & -0.5 & 0.5626 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

正交函数神经网络的结构为: 对于 $\hat{f}_1^r(x_1^r)$ 网络, 输入为 $x_1^r, r = 1, 2$, 隐层神经元数选为8; 对于 $\hat{d}_2^r(x_1^r, x_2^r)$ 网络, 输入为 $x_1^r, x_2^r, r = 1, 2$, 隐层神经元数选为10; 对于 $\hat{f}_0^r(x_1^r, x_2^r, x_3^r)$ 网络, 输入为 $x_1^r, x_2^r, x_3^r, r = 1, 2$, 隐层神经元数选为15; 对于 $\hat{g}_2(x_1^2)$ 网络, 输入为 x_1^2 , 隐层神经元数选为5.

取仿真步长为0.0005, 应用Matlab进行仿真, 仿真结果如图2~图5所示.

从仿真结果来看:

1) 图2和图3分别为 \hat{x}_1^1 与 \hat{x}_1^1 和 \hat{x}_1^2 与 \hat{x}_1^2 的比较曲线, 显然, 正交函数神经网络很好地估计出了系统中的非线性函数, 准确地估计出了 \hat{x}_1^1 和 \hat{x}_1^2 .

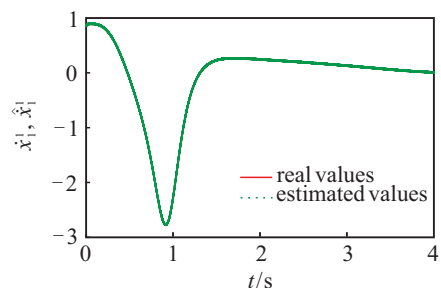


图2 \hat{x}_1^1 和 \hat{x}_1^1 的比较曲线

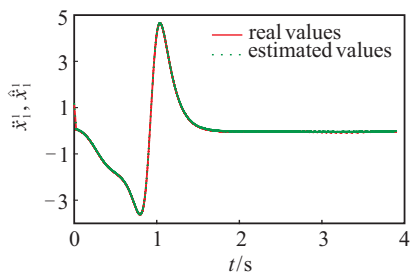


图3 x_1 和 \hat{x}_1 的比较曲线

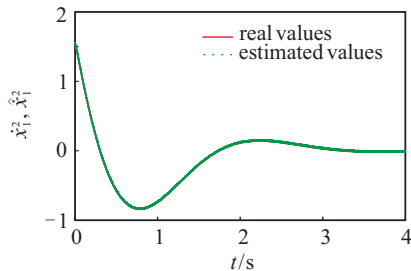


图4 x_1^2 和 \hat{x}_1^2 的比较曲线

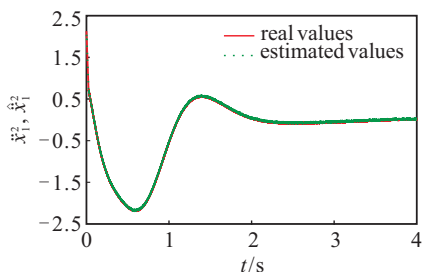


图5 x_1^3 和 \hat{x}_1^3 的比较曲线

2) 图4和图5分别为 x_1^2 与 \hat{x}_1^2 和 x_1^3 与 \hat{x}_1^3 的比较曲线,显然,正交函数神经网络很好地估计出了 \hat{x}_1^2 和 \hat{x}_1^3 .因此,通过理论研究和仿真验证,表明了所提出控制方法的有效性.

5 结论

本文利用Chebyshev正交函数神经网络,研究了具有下三角结构的非线性系统的控制问题.由于系统中存在未知非线性项,通过引入滤波器,并通过正交函数神经网络逼近非线性系统,实现了系统模型的转换.在此基础上,通过稳定性定理得到控制器,仿真结果验证了所提出方法的有效性.在未来的研究中,对于含有耦合、未知函数的非线性系统的控制问题仍然是棘手的难题,作者将在此方向展开研究.

参考文献(References)

[1] 余星火,武玉强.不确定非线性系统的自适应最终滑模控制[J].控制理论与应用,1998,15(6):900-907.
(Yu X H, Wu Y Q. Adaptive terminal sliding mode control of uncertain nonlinear systems[J]. Control Theory & Applications, 1998, 15(6): 900-907.)

[2] Bartolini G, Giacomini A F L. A simplified adaptive control scheme based on a combined backstepping second order sliding mode algorithm[C]. Proc of the American Control Conf. Albuquerque, 1997: 1320-1327.

[3] 李俊,徐德民.非匹配不确定非线性系统的自适应反演滑模控制[J].控制与决策,1999,14(1):46-50.
(Li J, Xu D M. Adaptive sliding mode controller for nonlinear systems with mismatched uncertainties based on adaptive backstepping scheme[J]. Control and Decision, 1999, 14(1): 46-50.)

[4] Yip P P, Lee J K. Adaptive dynamic surface control: A simplified algorithm for adaptive backstepping control of nonlinear systems[J]. Int J of Control, 1998, 71(5): 959-979.

[5] 蒲明,吴庆宪,姜长生,等.非匹配不确定高阶非线性系统递阶Terminal滑模控制[J].自动化学报,2012,38(11):1777-1793.
(Pu M, Wu Q X, Jiang C S, et al. Sliding mode control for high-order nonlinear system with mismatched uncertainties[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(11): 1777-1793.)

[6] 蒲明,吴庆宪,姜长生,等.非匹配不确定高阶非线性系统滑模控制新方法[J].控制理论与应用,2012,29(6):708-714.
(Pu M, Wu Q X, Jiang C S, et al. New method of sliding-mode control for high-order nonlinear system with mismatched uncertainties[J]. Control Theory and Applications, 2012, 29(6): 708-714.)

[7] Lee C H, Chang H H. Output recurrent wavelet neural network-based adaptive backstepping controller for a class of MIMO nonlinear non-affine uncertain systems[J]. Neural Computing & Applications, 2014, 24(5): 1035-1045.

[8] Liu Y J, Tong S C, Li Y M. Adaptive neural network tracking control for a class of non-linear systems[J]. Int J of Systems Science, 2010, 41(2): 143-158.

[9] 关新平,范正平,陈彩莲,等.混沌控制及其在保密通信中的应用[M].北京:国防工业出版社,2002:197-198.
(Guan X P, Fan Z P, Chen C L, et al. Chaos control and its application into secure communication[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2002: 197-198.)

[10] Pao Y H. 自适应模式识别与神经网络[M].北京:科学出版社,1989:192-216.
(Pao Y H. Adaptive pattern recognition and neural networks[M]. Beijing: Science Press, 1989: 192-216.)

[11] 王宏伟,于双和.基于Chebyshev正交函数神经网络的混沌系统鲁棒自适应同步[J].控制理论与应用,2009,26(10):1100-1104.
(Wang H W, Yu S H. Robust adaptive synchronization of chaotic systems based on chebyshev orthogonal function neural network[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(10): 1100-1104.)

[12] 高铁杠,陈增强,袁著祉.基于正交函数网络的不确定混沌系统的控制[J].系统工程学报,2004,19(5):441-444.
(Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z. Control of uncertainty chaotic systems based on orthogonal function network[J]. J of System Engineering, 2004, 19(5): 441-444.)

(责任编辑:孙艺红)