

递减候选集正则化子空间追踪算法

田金鹏^{a,b†}, 刘小娟^a, 郑国莘^a

(上海大学 a. 通信与信息工程学院, b. 特种光纤与光接入网省部共建重点实验室, 上海 200072)

摘要: 为提高压缩感知子空间追踪算法的信号重建概率及精度, 提出一种递减候选集正则化子空间追踪算法. 该算法基于 CoSaMP/SP 算法并加以改进, 将迭代过程分成若干个阶段, 在每个阶段均采用类 CoSaMP/SP 算法进行迭代计算, 但各阶段的候选集原子个数依次递减, 同时按正则化方法选择新的候选集原子. 实验仿真对比结果表明, 与同类算法相比, 所提出算法能够以更高概率重建信号, 在噪声环境下也具有较高的重建精度.

关键词: 压缩感知; 信号重建; 子空间追踪; 稀疏表示; 正则化

中图分类号: TP39

文献标志码: A

Decreasing candidate set regularized subspace pursuit algorithm

TIAN Jin-peng^{a,b†}, LIU Xiao-juan^a, ZHENG Guo-xin^a

(a. School of Communication and Information Engineering, b. Key Laboratory of Specialty Fiber Optics and Optical Access Networks, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: A decreasing candidate set regularized subspace pursuit algorithm is proposed to improve the signal reconstruction probability and precision of the subspace pursuit algorithm in compressed sensing. The proposed algorithm is improved based on the CoSaMP/SP algorithm, which divides the iterative process into several stages. Similar CoSaMP/SP algorithm is adopted to iterative calculation during each of the stages. The number of candidate set atoms is successively decreasing in each stage, and the new candidate set atoms are selected by using the regularization method. Compared to other algorithms, the simulation results show that the proposed algorithm can reconstruct the signal with higher probability and has high reconstruction precision in the noise environment.

Keywords: compressed sensing; signal reconstruction; subspace pursuit; sparse representation; regularization

0 引言

压缩感知(CS)作为一种可以实现从低维观测值重建原高维信号的方法, 最近几年已成为研究的热点^[1-5]. 要实现CS, 有两个基本前提: 要恢复的信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$ 必须是稀疏的(具有较少的非零元素个数), 或者在某种正交变换后是稀疏的; 测量矩阵要满足有限等距性质(RIP). CS可以用远低于Nyquist采样的速率对信号同时进行采样和压缩, 得到低维观测信号 $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, 并可以通过该观测信号准确完成高维原始信号的重建, 从而减小了原始信号获取、存储和传输的代价, 缓解高速采样对硬件系统造成的压力.

原始稀疏信号重建问题可以归结为求解最小 l_0 范数下的最优化问题, 由于该问题的求解是NP-hard

问题, 早期的稀疏信号重建问题主要集中在解决最小 l_1 范数问题, 如基追踪(BP)^[6]等凸优化算法, 这类算法恢复精度较好, 但计算复杂度仍较高. 另一类贪婪追踪算法的应用较为广泛, 该类算法可以进一步减小BP算法的计算复杂度, 贪婪算法通过贪婪迭代方式寻找信号支撑集的位置, 产生一系列局部最优更新. 在正交匹配追踪(OMP)^[7]算法中, 每次迭代时选取一个与残差相关度最大的原子加入信号支撑集, 但如果错误选择了任意一个原子, OMP算法则不能正确恢复, 重建概率低; 同时, 每次迭代只增加支撑集中的一个原子, 运算复杂度也较高. 为解决这些问题, 研究人员提出了一系列改进的OMP算法, 其中广义正交匹配追踪(GOMP)算法^[8]每次迭代选取多个原子; 分段正交匹配追踪(StOMP)算法^[9]引入了阈值, 迭代时选

收稿日期: 2016-01-17; 修回日期: 2016-04-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61132003, 61571282); 上海大学创新基金项目(sdcx2012041).

作者简介: 田金鹏(1974—), 男, 讲师, 博士, 从事信号处理、压缩感知等研究; 刘小娟(1991—), 女, 硕士生, 从事压缩感知、模式识别的研究.

†通讯作者. E-mail: adaline@163.com

取残差相关度大于阈值的若干原子加入信号支撑集;正则化正交匹配追踪 (ROMP) 算法^[10]在迭代时采用正则化方法对原子进行分组,选取能量最大的一组加入支撑集.这些算法每次迭代已经选择的原子会一直保留,而压缩采样匹配追踪 (CoSaMP) 算法^[11]和子空间追踪 (SP) 算法^[12]迭代时采用回溯检验,每次迭代先求得大于信号稀疏度的候选支撑集合,再从该集合中淘汰权值系数小的原子.

在这些改进算法中,CoSaMP算法和SP算法计算复杂度相对较低而重构精度高,两种算法的流程基本相同,具有类似的性质和优缺点,其算法流程的主要区别在于:CoSaMP算法迭代时从 $3K$ 个候选集中选出 K 个支撑集,SP算法从 $2K$ 个候选集中选出 K 个支撑集.由于候选集越大,每次迭代效率越高,但候选集之间的相互干扰使得算法难以得到真正支撑集,CoSaMP算法的迭代次数要少于SP算法,而SP算法的准确重建概率和重建精度都要略好于CoSaMP算法.

本文提出一种新的递减候选集正则化子空间追踪 (DCSRSP) 算法.该算法针对CoSaMP/SP算法加以改进,采用分阶段迭代并引入正则化思想.将迭代过程分成若干个阶段,在每个阶段均采用类CoSaMP/SP算法进行迭代计算.在开始阶段,候选集个数较多,迭代效率高,这时得到的支撑集可能并不是真正的支撑集,以后阶段的候选集原子个数依次递减,候选集原子之间的相互干扰变小,算法以更高概率得到真正支撑集.同时,在迭代中引入正则化约束条件选择新的候选原子,以进一步提高重建概率和精度.与CoSaMP/SP算法相比,该算法迭代次数增加,但重建性能提高.实验仿真结果表明,所提出算法在有限增加计算复杂度的情况下,能够提高重建概率和重建精度.

1 压缩感知与重建算法

在压缩感知中,要测量的 N 维信号 \boldsymbol{x} 需是稀疏信号或在某种正交变换后是稀疏的,即 \boldsymbol{x} 可由规范正交基向量 $\boldsymbol{\Psi} = \{\boldsymbol{\Psi}_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ 的线性组合来表示.如果 \boldsymbol{x} 可以表示为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \boldsymbol{\Psi}_i = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha}. \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{\alpha}$ 为信号 \boldsymbol{x} 在稀疏基 $\boldsymbol{\Psi}$ 上的表示(若 \boldsymbol{x} 本身为稀疏信号,则 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\Psi}$ 为单位阵),在 $\boldsymbol{\alpha}$ 中仅有 $K \ll N$ 个非零系数(或仅有 K 个绝对值较大的系数,其他系数的绝对值远小于这 K 个系数); $\boldsymbol{\Psi}$ 为 $N \times N$ 维矩阵.则原始信号 \boldsymbol{x} 是 K 稀疏的.

用观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{R}^{M \times N} (M < N)$ 对原始信号 \boldsymbol{x} 按式(2)进行线性观测,从而得到 M 维观测信号 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^M$,有

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{x}. \quad (2)$$

结合式(1),有

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\alpha}, \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi}$ 为传感矩阵,是 $M \times N$ 维矩阵.在压缩感知实际应用中,稀疏基 $\boldsymbol{\Psi}$ 常采用傅立叶变换基、小波变换基等正交集或训练构造过完备字典;观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 要确保信号的线性观测使得原信号的结构不变,常采用伯努利矩阵、部分正交观测矩阵、高斯随机矩阵等.由于 $\boldsymbol{\Phi}$ 与 $\boldsymbol{\Psi}$ 均为确定矩阵,应用中传感矩阵 $\boldsymbol{\Theta}$ 为确定矩阵.

信号测量值 \boldsymbol{y} 的维数 M 小于原始信号 \boldsymbol{x} 的维数 N ,从而可以实现信号的压缩采集.在式(2)中,不能直接由 \boldsymbol{y} 求解 \boldsymbol{x} ,但根据压缩感知理论,当 $K \ll M < N$ 时,传感矩阵 $\boldsymbol{\Theta}$ 满足有限等距性质,有

$$(1 - \delta_k) \|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2 \leq \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\alpha} \leq (1 + \delta_k) \|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2. \quad (4)$$

可通过求解式(3)得到 $\boldsymbol{\alpha}$,然后通过式(1)得到重建的原始信号 $\hat{\boldsymbol{x}}$,即可表述为求解在最小 l_0 范数约束下式(3)的最优化问题

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg \min \|\boldsymbol{\alpha}\|_0; \text{ s.t. } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\alpha}. \quad (5)$$

l_0 范数下求解只能通过对所有可能的稀疏情况进行求解,式(5)的求解是一个不确定多项式难问题(NP-hard).根据文献[4]信号稀疏分解的相关理论,在 δ_k 满足一定条件下,可以将式(5)的 l_0 最小范数改为 l_1 最小范数进行求解.

基于 l_1 最小范数的常用凸优化算法有内点法、BP算法等,这类算法重构精度较高,但计算复杂度高,不适合处理维数较高数据,且对于含噪信号,算法的重构效果迅速下降.相对而言,基于 l_0 最小范数的贪婪追踪算法计算复杂度低,算法结构简单,但重建精度稍差.

为提高重建效果,贪婪追踪算法中的CoSaMP/SP算法采用回溯检验方法,每次迭代时利用残差相关度大小从原子库中选择多个候选原子加入候选集,再对候选集进行最小二乘估计,选择系数最大的 K 个候选原子作为支撑集,算法流程如图1所示.

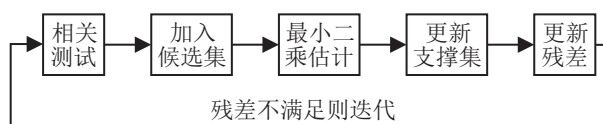


图1 CoSaMP和SP算法流程

CoSaMP/SP算法结合了组合算法的思想,具有计算复杂度低、重构性能好的优点,可达到接近BP算法的性能,研究人员也提出了很多相关改进算法.文献[13]提出了稀疏度自适应子空间追踪(SASP)算法,采用一种基于匹配测试的方法估计信号的稀疏度,然后再进行类SP算法迭代.文献[14]提出了稀疏度自适应匹配追踪(SAMP)算法,将迭代分成若干个阶段,在每阶段增加确定数量原子,残差最小对应的原子数即为稀疏度的估计.文献[15]提出了变步长自适应匹配追踪(VssAMP)算法,采用双阈值控制和变步长迭代的方法,实现对未知稀疏度信号的精确重构.文献[16]基于正交匹配追踪算法,采用参数与时滞联合估计的方法,实现对MISO系统信号的重构.

2 递减候选集正则化子空间追踪算法

从另一个角度,压缩感知信号重建问题,也可以归结为信号的稀疏分解,将传感矩阵 Θ 的各列向量 $\theta_i(1 \leq i \leq N)$ 作为原子,那么这些列向量便组成超完备字典 D .根据设定, x 是 K 稀疏的,所以在 α 中只有 K 个非零元素,根据式(3),可以用 D 中 K 个原子的线性组合表示观测值 y .将这 K 个原子的索引组定义为支撑集 Γ , y 可以表示为 $\Theta_{\Gamma}\alpha_{\Gamma}$,其中 Θ_{Γ} 、 α_{Γ} 分别表示 Γ 索引在对应 Θ 、 α 中的子集. y 在字典 D 上具有稀疏的表示,信号重建的目标是寻找其中最少的一组原子 $\{\nu_i|i \in \Gamma\}$,使得残差 $r = y - \Theta_{\Gamma}\alpha_{\Gamma}$ 信号的能量最小.

2.1 算法描述

本文提出的DCSRSP算法,对CoSaMP/SP算法加以改进,加入了分阶段迭代和正则化思想,其基本思想是:将迭代过程分成若干个阶段进行,在每个阶段均采用类似CoSaMP/SP算法回溯迭代,但各阶段候选集原子个数依次递减,按正则化方法选择新的候选集原子,算法流程图如图2所示.下面分别从子空间追踪、候选集原子选取、正则化阶数选择、分阶段迭代几部分描述DCSRSP算法.

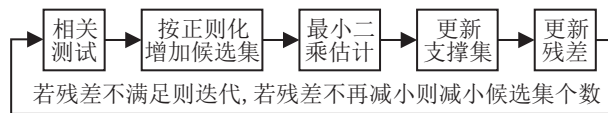


图2 DCSRSP算法流程

子空间追踪.子空间追踪部分采用回溯迭代改进对支撑集原子的估计,定义第 $t - 1$ 次迭代后得到支撑集的估计为 K 个原子的索引组集合 Γ_{t-1} ,相应残差为 r_{t-1} .在第 t 次迭代时,将 r_{t-1} 与字典 D 的各原子作相关运算,按正则化方法选取新的 X 个原子,将其与 Γ_{t-1} 合并得到候选集 C_t (该集合中共有 $L =$

$K + X$ 个原子).利用回溯法,将测量值投影到候选集 C_t 原子张成的空间(应用最小二乘法),去掉其中系数最小的 X 个原子,得到本次迭代支撑集估计 Γ_t ,并计算相应残差 $r_t = y - \Theta_{\Gamma}\alpha_{\Gamma}$.如果 r_t 的能量小于 r_{t-1} ,则重复迭代前述过程.根据文献[12],如果 Θ 满足有限等距性质(K, δ_{3K}),且 $\delta_{3K} < 0.165$,则可以实现原信号的准确重建.

候选集原子选取.在子空间追踪时,采用正则化方法选取新的 X 个原子,即根据 r_{t-1} 与字典 D 各原子的相关系数,按相关系数绝对值的最大值不能比最小值大两倍以上原则将原子分成若干组,选取其中能量最大的一组,与 Γ_{t-1} 合并得到候选集 C_t .正则化方法选取原子在凸优化理论上具有强有力的理论保证,文献[10]给出了不同终止准则下的重构误差的上限.

正则化阶数选择.正则化过程可以采用分数阶和其他阶正则化,范数阶数越高,按正则化选择原子时更倾向于选择单个相关度越大的一组,而不是个数较多相关度较小的一组,所以重建概率越高.仿真分析结果表明,当取 l_4 范数时,重建概率已接近最高值,本文仿真实验均采用 l_4 范数正则化.

分阶段迭代.将迭代过程分成若干个阶段,各个阶段中候选集的个数是递减的.在第1阶段,与SP算法相同,计算残差和测量信号的内积,从中选取 $X = K$ 个加入候选集,这样候选集共有 $2K$ 个原子(加上原支撑集已有 K 个原子).通过最小二乘法求解,从这 $2K$ 个原子中选出系数最大的 K 项作为新的支撑集,迭代此过程直到残差不再减小为止,进入下一阶段迭代.在下一阶段迭代中,取 $X = X/2$ (需取整数),其他参数不变,继续迭代到残差不再减小,再继续 X 减半直到最后阶段取 $X = 1$.在迭代过程中的任意阶段,只要残差满足要求即可完成,退出迭代.候选集的个数为 $K + X$ 是递减的,这里采用 X 减半是考虑到计算复杂度和重建效果的折衷方案,当然也可以考虑采用其他递减方案.

2.2 算法步骤

DCSRSP算法具体步骤如下.

输入: M 维测量向量 y , $M \times N$ 维传感矩阵 Θ ,信号的稀疏度 K ,判定阈值 ε ;

输出: 信号 x 的稀疏表示系数估计 $\hat{\alpha}$.

以下流程中, r_t 表示残差, t 表示迭代次数,stage表示迭代阶段, \emptyset 表示空集, Γ_t 表示 t 次迭代的索引(列序号)集合(元素个数为 K), θ_j 表示矩阵 Θ 的第 j 列, $\Theta_t = \{\theta_j\}$ (for all $j \in C_t$)表示按索引集合 C_t 选

出的矩阵 Θ 的列集合 (元素个数为 L_t), α_t 表示 $L_t \times 1$ 的列向量, 符号 \cup 表示集合并运算, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示求向量内积, $abs[\cdot]$ 表示求模值 (绝对值).

Step 1: 初始化. $r_0 = y$, $X = K$, $t = 1$, stage = 1.

Step 2: 首次迭代. 计算 $u = abs[\Theta^T r_{t-1}]$, 选择 u 中 K 个最大绝对值, 将这些值对应 Θ 的列序号 j 构成 (列序号集合) Γ_t , $\Theta_t = \{\theta_j\}$ (for all $j \in \Gamma_t$), 求最小二乘解 $\hat{\alpha}_t = (\Theta_t^T \Theta_t)^{-1} \Theta_t^T y$, 对应残差 $r_t = y - \Theta_t \hat{\alpha}_t$, $t = t + 1$.

Step 3: 计算 $u = abs[\Theta^T r_{t-1}]$, 按 u 中的相关系数进行正则化, 取能量最大一组对应的列序号 j 构成 S_t (不多于 X 个原子), 令 $C_t = \Gamma_{t-1} \cup S_t$, $\Theta_t = \{\theta_j\}$ (for all $j \in C_t$).

Step 4: 求式 $y = \Theta_t \alpha_t$ 的最小二乘解 $\hat{\alpha}_t = (\Theta_t^T \Theta_t)^{-1} \Theta_t^T y$.

Step 5: 更新 $\hat{\alpha}_t$ 为其中绝对值最大的 K 项, 更新对应的 Θ_t 和残差 $r_t = y - \Theta_t (\Theta_t^T \Theta_t)^{-1} \Theta_t^T y$.

Step 6: 如果满足迭代终止条件, 即 $\|r_t\|_2 < \varepsilon$ 或 $X = 1$, 则算法完成退出; 否则, 如果 $\|r_t\|_2 < \|r_{t-1}\|_2$, 则令 $t = t + 1$, 返回 Step 3 继续该阶段子空间追踪迭代; 如果 $\|r_t\|_2 \geq \|r_{t-1}\|_2$, 则令 $t = t + 1$, stage = stage + 1, $X = X/2$, 返回 Step 3 继续候选集减小后的下一阶段子空间追踪迭代.

2.3 算法分析

收敛性分析. DCSRSP 算法按阶段迭代, 在每一个阶段, 均迭代计算到残差不再减小为止. 如果残差不能满足要求, 则减小候选集个数继续迭代, 寻求符合更小残差的解. 由于在每一次迭代时, $\|r_t\|_2 < \|r_{t-1}\|_2$, 残差 r_t 的能量是递减的, 算法至少可以收敛到一个局部最优点.

计算复杂度分析. 分阶段迭代采用 X 减半方案时, DCSRSP 算法的主要运算是进行约 $\log_2 K$ 次的 SP 运算, 而对于随机稀疏信号, 不考虑各类优化算法, 每次 SP 运算的复杂度上限为 $O(M(N + K^2)K)$, 所以 DCSRSP 算法复杂度上限为 $O(M(N + K^2)K \log_2 K)$ (如果 $K^2 \leq O(N)$, 则为 $O(MNK \log_2 K)$). 在实际应用中, 由于后一阶段的 SP 迭代可以利用上一阶段 SP 的迭代结果, 除了第 1 阶段, 实际各阶段的 SP 算法的迭代次数远小于上限值, 且候选集个数也在递减, 所以 DCSRSP 算法的实际计算复杂度远小于前述理论上限值.

3 仿真分析

为验证本文提出的 DCSRSP 算法对各种原始信号的重建效果和性能, 对算法进行一系列仿真验

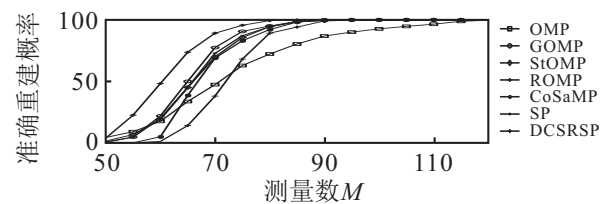
证实验, 将其他典型贪婪追踪算法与本文提出的算法进行性能仿真比较. 实验在惠普 g14 笔记本 (4GB DDR3 内存, i5-4200U) 上运行, 采用的仿真软件版本为 Matlab R2009a, 若非特殊说明, 则图表中各数据点均为运行 500 次的平均值.

3.1 信号重建性能实验

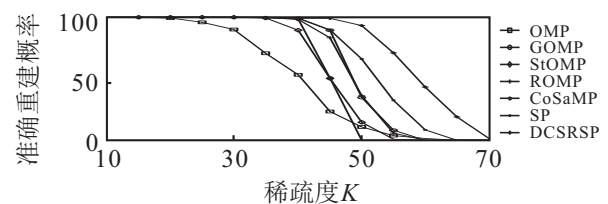
将 DCSRSP 算法与 OMP、GOMP、StOMP、SP、ROMP 和 CoSaMP 典型贪婪追踪算法进行性能仿真比较, 检验各算法在准确重建概率和重建运行时间方面的对比. 实验中, 取 $N = 256$, $M = 128$, 观测矩阵 Φ 为 $M \times N$ 阶独立分布、零均值、单位方差的高斯随机矩阵, 原始信号 x 为直接构造的 K 稀疏信号 (从 x 中随机取 K 个元素, 每一项值为独立分布、零均值、单位方差高斯随机变量, 其他元素值为零), 所以稀疏基 Ψ 为单位阵, 通过 $y = \Phi x$ 得到观测向量 y . 另外, 在实验中会根据需要改变其中部分参数或对原始信号 x 叠加给定强度的高斯白噪声.

对不同参数下的重建概率进行比较, 重建概率是从测量信号中准确重建原稀疏信号的概率, 信号准确重建定义为在无噪声情况下, 实际信号 x 与恢复信号 \hat{x} 中非零元素的位置相同, 且误差的能量小于某一个阈值, 这里阈值取 10^{-6} .

图 3(a) 给出了稀疏度 K 为 20 时, 采样点 M 取不同值时的信号准确重建率. 由图 3(a) 可见, 对于所有重建算法, 信号准确重建概率均随着采样点数 M 的增加而增大; 对于本文算法, 当 $M > 80$ 时, 算法的准确重建概率接近于 1, 当 $M < 80$ 时, 算法的准确重建概率明显高于另外几种算法. 对于同样稀疏度的信号, DCSRSP 算法稳定重建原始信号所需的采样点数较少.



(a) 在不同采样点 M 时 ($K = 20$, $N = 256$)



(b) 在不同稀疏度 K 时 ($M = 128$, $N = 256$)

图 3 不同算法信号准确重建率

图 3(b) 给出测量数 $M = 128$ 时, 各重建算法对不同稀疏度 K 信号的准确重建率. 同样可以看出, 信号

准确重建概率随着信号稀疏度 K 的增大而减小, 当 $K < 45$ 时, 本文算法重建概率接近于 1, 当 $K > 45$ 时, 本算法重建概率开始明显下降, 但重建概率仍明显高于另外几种算法. 对于同样的采样点数, DCSRSP 算法能稳定重建稀疏度更高的信号.

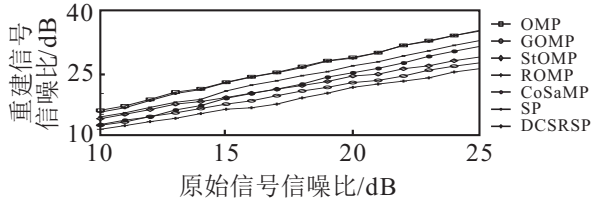


图4 噪声环境下的重建精度
($M = 128, N = 256, K = 20$)

重建精度为重建原信号的精度性能指标, 可表示为原始信号与重建误差的能量之比. 如果在原始信号上加上不同强度的高斯白噪声, 会对算法的重建精度造成影响, 原始信号信噪比与各算法的重建信号信噪比之间的对应关系如图4所示. 由图4可见: 各算法的重建信噪比均随着原信号信噪比的增大而增大, 其中DCSRSP算法重建精度明显优于GOMP、StOMP、ROMP、CoSaMP和SP算法, 与OMP算法基本相同, 算法具有较强的抗干扰能力.

图5是不同稀疏度下各种算法运行时间对比, 这里 N 和 M 值均取较大值, 可以使得稀疏度 K 在较大范围内变化. 由图5可见: 各算法的运算时间均随 K 的增大而增加; OMP算法每次迭代只增加支撑集中的一个原子, 运算时间最多; CoSaMP算法由于候选集为 $3K$, 计算时间高于候选集为 $2K$ 的SP算法; DCSRSP算法的运行时间与CoSaMP算法相差不大(高 K 值时低于CoSaMP算法), 大约是SP算法的2倍左右.

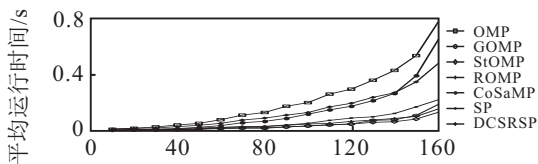


图5 算法运行时间对比 ($M = 512, N = 1024$)

综上所述, DCSRSP算法在无噪声环境下, 其准确重建概率明显超过OMP、GOMP、StOMP、ROMP、CoSaMP和SP算法, 信号重建概率较高, 信号重建对信号稀疏度和测量数要求较低, 同时算法具有较强的抗干扰能力, 但计算复杂度要略高于SP算法.

3.2 图像重建实验

图像重建主要是为了验证算法的重建精度, 这里采用 256×256 的Lena标准灰度图像. 由于原图像各列(行)稀疏性较差, 为提高重建效果, 先将其用双正

交小波(bior3.7)进行变换; 然后将变换后矩阵的各行作为一维列信号进行压缩采样, 再用不同算法进行重建; 最后通过同样的小波反变换得到重建图像, 重建时稀疏度值 K 取 35, 观测矩阵 Φ 为部分正交矩阵, 稀疏基 Ψ 为单位阵.

定义图像的采样率为 M/N , 重建图像的质量用峰值信噪比(PSNR)表示为

$$PSNR = 10 \times \log_{10} \left(\frac{(2^n - 1)^2}{MSE} \right). \quad (6)$$

PSNR的值取决于重建信号均方误差(MSE)的大小, 该值越大, 重建信号均方误差越小, 重建精度越高.

图6给出了在采样率为0.5的条件下, Lena图像的原图像和OMP、GOMP、StOMP、ROMP、CoSaMP、SP、DCSRSP算法重建图像及对应的PSNR值. 可以看出, DCSRSP算法的重建质量优于GOMP、StOMP、ROMP、CoSaMP和SP算法, 与OMP算法持平, 经DCSRSP算法重建后的图像与原图像的图像比较接近, 且细节保持较好, 具有良好的视觉效果.

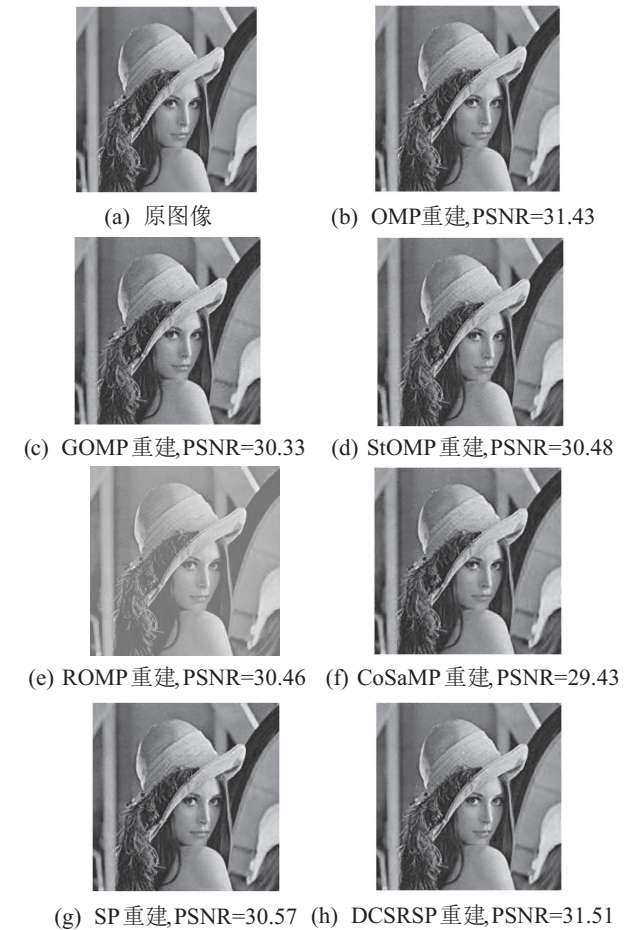


图6 采样率为0.5时, Lena原图像和各算法重建图像

表1给出了不同算法在不同采样率条件下重建图像的PSNR和运算时间对比, 每个数据均为50次实验的平均结果.

由表1中的重建精度数据可以看出, 随着采样率

表1 各算法的重建质量和运行时间对比

重建算法	$M = 0.3N$		$M = 0.4N$		$M = 0.5N$	
	PSNR /dB	运算时间/s	PSNR /dB	运算时间/s	PSNR /dB	运算时间/s
OMP	23.16	1.02	27.76	1.26	31.45	2.16
GOMP	22.04	1.18	26.25	2.26	30.38	3.51
StOMP	21.53	1.68	27.34	2.82	30.58	4.46
ROMP	24.72	1.22	27.89	1.73	30.52	2.35
CoSaMP	16.49	3.23	24.38	4.75	29.48	7.71
SP	18.55	1.27	26.43	1.59	30.84	1.92
DCSRSP	25.26	2.51	28.62	2.88	31.63	3.57

的增大,各种重建算法重建图像的PSNR均显著增大,通过增加观测数目可以提高重建图像的重建质量;在采样率为0.5时,DCSRSP和OMP算法的重建图像PSNR值相近,高于其他几类算法,在采样率为0.4和0.3时,DCSRSP算法则明显高于其他所有算法,表明该算法对图像重建精度较高,对采样率要求相对较低。

由表1中重建时间数据可见,随着采样率的增大,各种重建算法运算时间均增大,作为CoSaMP/SP算法的改进,DCSRSP算法由于要进行多次类SP运算,其运行时间高于SP算法,而CoSaMP由于候选集较大,运算时间较长.但从总体来看,DCSRSP算法的计算复杂度相对于SP算法增加不多。

4 结论

本文针对经典的CoSaMP/SP算法加以改进,提出了一种新的递减候选集正则化子空间追踪算法.该算法将CoSaMP/SP算法的迭代过程分成若干个阶段,在每个阶段均采用类子空间追踪算法进行迭代,各阶段候选集原子个数递减,同时按正则化方法选择新的候选集原子.实验仿真对比结果表明,所提出算法的计算复杂度比CoSaMP/SP算法稍有提高,与同类算法相比,该算法能够以更高概率重建稀疏信号,在噪声环境下也具有高重建精度。

参考文献(References)

- [1] Donoho D. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] Candès E. Compressive sampling[C]. Proc of the Int Congress of Mathematicians. Madrid, 2006, 3:1433-1452.
- [3] Candès E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [4] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly

- incomplete frequency information[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [5] 尹宏鹏,刘兆栋,柴毅,等.压缩感知综述[J].控制与决策,2013,28(10):1441-1445.
(Yin H P, Liu Z D, Chai Y, et al. Survey of compressed sensing[J]. Control and Decision, 2013, 28(10): 1441-1445.)
- [6] Chen S B, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. Siam J of Science Computer, 1998, 20(1): 33-61.
- [7] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [8] Wang J, Kwon S, Shim B. Generalized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2012, 60(12): 6202-6216.
- [9] Donoho D, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparsity solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2012, 58(2): 1094-1121.
- [10] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(3): 317-334.
- [11] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: Iterativesignal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Appliedand Computation Harmonic Analysis, 2009, 26: 301-321.
- [12] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2009, 55(5): 2230-2249.
- [13] 杨成,冯巍,冯辉,等.一种压缩采样中的稀疏度自适应子空间追踪算法[J].电子学报,2010,38(8):1914-1917.
(Yang C, Feng W, Feng H, et al. A sparsity adaptive subspace pursuit algorithm for compressive sampling[J]. Acta Sinica Electronica, 2010, 38(8): 1914-1917.)
- [14] Do T T, Lu G, Nguyen N, et al. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing[C]. Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove: IEEE Press, 2008: 581-587.
- [15] 高睿,赵瑞珍,胡绍海.基于压缩感知的变步长自适应匹配追踪重建算法[J].光学学报,2010,30(6):1639-1644.
(Gao R, Zhao R Z, Hu S H. Variable step size adaptive matching pursuit algorithm for image reconstruction based on compressive sensing[J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(6): 1639-1644.)
- [16] 刘艳君,陶太洋,丁锋. MISO系统基于正交匹配追踪算法的参数与时滞联合估计[J].控制与决策,2015,30(11):2103-2107.
(Liu Y J, Tao T Y, Ding F. Parameter and time-delay identification for MISO systems based on orthogonal matching pursuit algorithm[J]. Control and Decision, 2015, 30(11): 2103-2107.)