第 32 卷 第 2 期
2017 年 2 月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.32 No.2
Feb. 2017

文章编号: 1001-0920(2017)02-0299-06
DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1618

具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策A-T解

杨 洁[1†], 赖礼邦[2], 李登峰[3]

(1. 福建农林大学 管理学院，福州 350002；2. 福建船政交通职业学院
建筑工程系，福州 350007；3. 福州大学 经济与管理学院，福州 350116)

摘 要: 当前模糊合作对策研究主要基于局中人无差异且联盟组建无约束假设,但现实联盟组建普遍具有限制约束性.针对具有限制交流结构的模糊联盟合作问题,考虑局中人具有不同的偏好差异,提出一种基于风险偏好均值的模糊联盟图合作对策及其A-T解,并公理化论证解的存在性.考虑风险偏好不仅可以体现局中人行为差异性,而且利于模糊联盟支付函数求解.最后通过实例表明了所提出方法的现实有效性和可行性.

关键词: 图合作对策；模糊联盟；交流结构；风险偏好均值；A-T 解

中图分类号: O225 **文献标志码:** A

A-T solution of graph cooperative games with interval fuzzy coalitions and risk preference

YANG Jie[1†], *LAI Li-bang*[2], *LI Deng-feng*[3]

(1. College of Management，Fujian Agriculture and Forestry University，Fuzhou 350002，China；2. Department of Building Engineering，Fujian Chuanzheng Communications College，Fuzhou 350007，China；3. School of Economics and Management，Fuzhou University，Fuzhou 350116，China)

Abstract: The research on the current fuzzy cooperative game is mainly based on the hypothesis of players are same and unrestricted alliance. However, the cooperation alliance is always restricted in reality. Therefore, the cooperative game with the limited communication structure and fuzzy alliance is investigated, in which the players' risk preferences are different. A formula of the average tree(A-T) solution based on the risk preference mean is proposed, and the existence of the solution is proved by the axioms system. Not only the behavior differences can be reflected, but also the payoffs of fuzzy coalitions can be derived easily by considering the player' risk preference. Finally, a practical example of profit allocation is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: graph cooperative games；fuzzy coalition；communication structure；risk preference；average tree solution

0 引 言

现实生活中,局中人由于受到资源、技术、地位等影响因素的约束,其合作并非是任意的,即结盟存在某种限制约束情形. 部分学者也发现此类研究更符合复杂现实经济管理活动,并提出了特定联盟结构下的模糊合作对策解和分配方案[1-2].

针对具有交流结构限制的效用可以转移合作对策, Myerson[3] 用无向连通图进行研究,以图的顶点表示局中人,以图的边表示局中人的交流联系,认为有联系的局中人才可能合作,从而定义了具有交流结构的合作对策,即“图合作对策”,并提出了著名的Myerson值. 当合作对策为凸对策时, Myerson值在核心中,该值是交流结构下导出的限制对策Shapley值. Talman等[4] 定义了图合作对策的average tree solution (简称A-T解) 和子核心,并讨论了A-T解可能存在于子核心中的条件. Herings等[5] 定义了无圈图合作对策的A-T解,讨论了此解满足分支有效性和分支公平性两个性质,其公平性表示若删除两个局中人之间的联系 (边),则两人所得分配收益将发生相同的改变,可理解为双方的边际贡献相同. Herings[6] 将无圈图合作对策的A-T解推广到所有具有交流结构的合作对策中. Béal 等[7] 将多选择对策理论运用于局中

收稿日期: 2015-12-29；**修回日期:** 2016-03-15.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (712310003)；国家自然科学基金项目 (71403055, 71561008)；福建省自然科学基金项目 (2016J05169).

作者简介: 杨洁 (1985−), 女, 讲师, 博士, 从事经济管理决策与对策的研究；李登峰 (1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事经济管理决策与对策、模糊理论与运筹优化等研究.

†通讯作者. E-mail：yangjie802@126.com

人只有在连通树中才能合作的树对策中,进而提出了相对应的A-T解. Brink等[8]基于无圈交流图合作对策的A-T解,提出了一种适用于具有限制约束的可容许联盟结构下的A-T值,论证了该解具有的可容许分支有效性和分支公平性两个公理化性质. Béal[9]进一步将Hering给出的图合作对策的A-T解概念拓展为图合作对策的树根解. 由于现实合作几乎不能在清晰准确的环境下进行,模糊合作对策也逐渐被关注[10]. 但当前涉及模糊信息的图合作对策研究较少见到, Nie等[11]对经典A-T解进行了推广,定义了具有模糊联盟的模糊图合作对策,并提出了对应的A-T解. 杨洁等[12]基于Hukuhara差运算提出了区间支付图合作对策及其A-T解. 关于A-T解的研究不断深入,源于在具有交流关系合作对策中,A-T解相比于其他解具有良好特性[13]: 1)当特征函数具有超可加时,A-T解在核心中,而Myerson值并不具有这一性质; 2)当图合作对策为凸对策时,局中人的分配至少存在于A-T解中; 3)A-T解分配方法的边际特征向量的计算量大大简化,当有n个局中人时,具有层级结构边际收益计算无需进行$n!$(阶层)运算.

由于模糊信息下具有交流结构的图合作对策的研究远少于可任意结盟假设下的模糊合作对策的研究,但现实结盟的非任意性普遍存在,使得对模糊图合作对策问题的研究十分必要. 此外,以上研究均未考虑到局中人个体差异的普遍性,如局中人偏好的不同. 鉴于此,本文将联盟中各局中人的不同偏好信息融合于模糊限制结盟合作中,使得研究更贴近现实应用背景. 最后通过实例表明了所提出方法的现实有效性和可行性.

1 预备知识

1.1 经典图合作对策及A-T解

三元组(N,v,L)表示图合作对策,$N=\{1,2,\cdots,n\}$为局中人集合,$v:2^N\to R$为支付函数,$L\subseteq\{\{i,j\}|i\neq j,\ i,j\in N\}$为边集. 在图中只有连通的节点才可结成联盟. 若$L=\{\{i,j\}|i\neq j,\ i,j\in N\}$,则各局中人可自由结盟,称$(N,v,L)$为具有完全交流结构的合作对策或完全图合作对策,记为(N,v),对应的图(N,L)为完全图. 若$L\neq\{\{i,j\}|i\neq j,\ i,j\in N\}$且$L$非空,则$(N,v,L)$为具有限制交流结构的合作对策. 通常所说的合作对策是指完全图合作对策,即任意局中人可自己结盟. 本文探讨具有限制交流结构的合作对策.

在图(N,L)中,记$C^L(N)$为所有连通子集构成的集合,$\hat{C}^L(N)$为所有连通分支构成的集合. 如果局中人子集构成的n元组$B=\{B_1,\cdots,B_n\}$满足条件: 1)对于任意$i\in N$,有$i\in B_i$,且存在$j\in N$,使得$B_j=N$; 2)对于任意$i\in N$和$K\in\hat{C}^L(B_i\backslash\{i\})$,存在$j\in N$,使得对于任意$\{i,j\}\in L$,有$K=B_j$. 则称$B$是可容许的,并记$(N,L)$上所有可容许的$B$构成的集合为$B^L$.

定义1[3] 对于经典图合作对策(N,v,L),n维A-T解$\mathrm{AT}(N,v,L)$定义为

$$\mathrm{AT}_i(N,v,L)=\frac{1}{|B^L|}\Big(\sum_{B\in B^L}\Big(v(B_i)-\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\backslash\{i\})}v(K)\Big)\Big).\tag{1}$$

其中: $i=1,2,\cdots,n$, $|B^L|$为B^L的元素个数.

1.2 风险偏好均值与区间数运算

1988年,美国著名学者Yager提出了有序加权平均算子(OWA算子),该算子能够将一组离散的实数经排序后进行加权平均. 2004年,Yager[14]进一步提出了连续有序加权平均算子(COWA算子),以便集结区间型的连续变量值.

定义2[14] 如果函数$Q:[0,1]\to[0,1]$满足如下性质: 1) $Q(0)=0$; 2) $Q(1)=1$; 3)对于任意$x\in[0,1]$, $y\in[0,1]$,若$x>y$,则$Q(x)\geqslant Q(y)$. 则称Q为基本的单位区间单调(BUM)函数,其全体集合记为$\varGamma$.

定义3[14] 设任意BUM函数$Q(y)\in\varGamma$,称$\theta=\int_0^1Q(y)\mathrm{d}y$为态度因子.

Yager证明了$\theta\in[0,1]$,提出θ是与BUM函数$Q(y)$对应的态度因子. 若θ值越大,则局中人的风险偏好程度越高. 由态度因子的定义公式可知,每个局中人的态度因子是由其BUM函数决定的.

定义4 设$\tilde{A}=[a,b]$为区间数,则对于任意BUM函数$Q(y)\in\varGamma$,称

$$F_Q([a,b])=\int_0^1\frac{\mathrm{d}Q(y)}{\mathrm{d}y}[b-y(b-a)]\mathrm{d}y=a(1-\theta)+b\theta\tag{2}$$

为模糊数$\tilde{A}$关于BUM函数$Q(y)$的风险偏好均值.

由式(2)可知,模糊数$\tilde{A}$关于BUM函数$Q(x)$的风险偏好均值$F_Q([a,b])$是以$1-\int_0^1Q(y)\mathrm{d}y$和$\int_0^1Q(y)\mathrm{d}y$为风险态度(乐观)系数的$a$与$b$的组合. 显然,结果$F_Q([a,b])$实质上是对$[a,b]$的左右端点$a$和$b$进行加权平均,则权数分别为$1-\theta$和$\theta$.

定义5 若区间数$\tilde{a}=[a^-,a^+]$, $\tilde{b}=[b^-,b^+]$, $\tilde{a},\tilde{b}\in IR^+$且$\lambda>0$,则其运算规则定义如下:

1) $\lambda\tilde{a}=[\lambda\tilde{a}^-,\lambda\tilde{a}^+]$;

2) $\tilde{a}+\tilde{b}=[a^-+b^-,a^++b^+]$;

3) $\tilde{a}\bigwedge\tilde{b}=[\max(a^-,b^-),\min(a^+,b^+)]$;

4) $\tilde{a}\bigvee\tilde{b}=[\min(a^-,b^-),\max(a^+,b^+)]$.

2 具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策及其A-T解

2.1 基于风险偏好均值的区间模糊联盟支付函数

在模糊联盟图合作对策中,N 的所有模糊子集构成集合 $F(N)$,$F(N)$ 中的任意元素 $\tilde{\boldsymbol{S}}$ 为模糊联盟,可用模糊向量表示为

$$\tilde{\boldsymbol{S}}=(\tilde{S}(1),\tilde{S}(2),\cdots,\tilde{S}(n)):F(N)\rightarrow\boldsymbol{\mu}_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i),$$

其中 $\mu_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)$ 为联盟 $\tilde{\boldsymbol{S}}$ 中局中人 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 的参与程度,即局中人 i 投入资源与全部投入资源之比. 当前研究模糊联盟是用介于 $[0,1]$ 的某个实数表示局中人参与联盟的程度,即 $\mu_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)\in[0,1]$,其本质仍是实数. 因此,区间模糊联盟参与程度定义为

$$\mu_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)\subseteq[0,1].$$

即 $\mu_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)=[\mu^-_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i),\mu^+_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)]$ 为一区间值,表示局中人可能投入资源的下限值、上限值与全部投入资源之比. 其中:任意 $i\in\mathrm{Supp}(\tilde{\boldsymbol{S}}),\mathrm{Supp}(\tilde{\boldsymbol{S}})=\{i\in N|\mu_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)>0\}$. 支付函数 $t\tilde{v}(\tilde{\boldsymbol{S}})=[t\tilde{v}^-(\tilde{\boldsymbol{S}}),t\tilde{v}^+(\tilde{\boldsymbol{S}})]$ 表示联盟 $\tilde{\boldsymbol{S}}$ 的期望收益,$t\tilde{v}^-(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 为区间值 $t\tilde{v}(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 的左端点,$t\tilde{v}^+(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 为区间值 $t\tilde{v}(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 的右端点. 该模糊联盟可能取得的合作支付函数 $t\tilde{v}(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 是关于区间模糊联盟 $\tilde{F}(N)$ 到区间值集IR的一个映射,即 $t\tilde{v}:\tilde{F}(N)\rightarrow\mathrm{IR}$,且满足 $t\tilde{v}(\varnothing)=0$.

设四元组 (N,γ,L,Q) 表示具有风险偏好的区间模糊联盟图合作对策,其中局中人风险偏好信息相对应的BUM函数为 Q,γ 为考虑风险偏好下的支付函数. 记此类具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策的全体为 $G_{IF}(N,L,Q)$.

根据局中人 i 的BUM函数为 Q_i,局中人 i 的态度因子为 $\theta_i=\int_0^1Q_i(y)\mathrm{d}y$. 定义任意区间模糊联盟 $\tilde{\boldsymbol{S}}\in G_{IF}(N,L,Q)$ 的态度因子 $\theta_{\tilde{\boldsymbol{S}}}$ 如下.

定义6 对于任意 $(N,t\tilde{v},L,Q)\in G_{IF}(N,L,Q)$,给定区间模糊联盟 $\tilde{\boldsymbol{S}}\in\tilde{F}(N)$,$|\tilde{\boldsymbol{S}}|$ 为支撑集 $\mathrm{Supp}(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 中元素的个数,联盟 $\tilde{\boldsymbol{S}}$ 的风险偏好态度因子 $\theta_{\tilde{\boldsymbol{S}}}$ 可定义为模型 $\min\limits_{\theta}\Big\{\sum\limits_{i\in\mathrm{Supp}(\tilde{\boldsymbol{S}})}(\theta-\theta_i)^2\Big\}$ 的最优解.

根据定义6,对目标函数 $\min\limits_{\theta}\Big\{\sum\limits_{i\in\mathrm{Supp}(\tilde{\boldsymbol{S}})}(\theta-\theta_i)^2\Big\}$ 关于 θ 求导,可得

$$\theta_{\tilde{\boldsymbol{S}}}=\frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{S}}|}\sum_{i\in\mathrm{Supp}(\tilde{\boldsymbol{S}})}\theta_i.\tag{3}$$

式(3)表明,联盟的风险偏好态度为联盟内局中人风险偏好态度的算术平均值,即联盟内各局中人风险偏好态度与联盟风险偏好态度越接近越好.

定义7 在区间模糊联盟图合作对策 $G_{IF}(N,L)$ 中,给定联盟 $\tilde{\boldsymbol{S}}\in\tilde{F}(N)$,令

$$D(\tilde{\boldsymbol{S}})=\{\mu_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)|\mu_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)\geqslant0,i\in N\}.$$

其中: $D^-(\tilde{\boldsymbol{S}})\subset D(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 且 $D^-(\tilde{\boldsymbol{S}})=\{\mu^-_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)|\mu^-_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)\geqslant0\}$; $D^+(\tilde{\boldsymbol{S}})\subset D(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 且 $D^+(\tilde{\boldsymbol{S}})=\{\mu^+_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)|\ \mu^+_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)\geqslant0\}$; $d(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 为 $D(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 的元素个数. 若将 $D^-(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 和 $D^+(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 中的元素按单调递增的顺序分别排列为

$$0<h_1^-\leqslant h_2^-\cdots\leqslant h_{d^-(\tilde{\boldsymbol{S}})}\leqslant1,$$

$$0<h_1^+\leqslant h_2^+\cdots\leqslant h_{d^+(\tilde{\boldsymbol{S}})}\leqslant1,$$

则基于Choquet积分延拓的具有区间模糊联盟图合作对策 $G_{IF}(N,L)$ 的支付函数可表示为

$$t\tilde{v}(\tilde{\boldsymbol{S}})=\int\tilde{\boldsymbol{S}}\mathrm{d}v=\sum_{m=1}^{d(\tilde{\boldsymbol{S}})}v([\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m})(h_m-h_{m-1}).$$

由Choquet积分左右端点公式[10,15]可知,$t\tilde{v}(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 是区间值,$t\tilde{v}(\tilde{\boldsymbol{S}})=\Big[\int\tilde{\boldsymbol{S}}^-\mathrm{d}v,\int\tilde{\boldsymbol{S}}^+\mathrm{d}v\Big]$,$t\tilde{v}(\tilde{\boldsymbol{S}})$ 的上限和下限可分别表示为

$$t\tilde{v}^-(\tilde{\boldsymbol{S}})=\sum_{m=1}^{d^-(\tilde{\boldsymbol{S}})}v([\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^-})(h_m^--h_{m-1}^-),$$

$$t\tilde{v}^+(\tilde{\boldsymbol{S}})=\sum_{m=1}^{d^+(\tilde{\boldsymbol{S}})}v([\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^+})(h_m^+-h_{m-1}^+).\tag{4}$$

其中: $h(0)=0,m=1,2,\cdots,d(\tilde{\boldsymbol{S}})$, $[\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^-}=\{i\in N|\mu^-_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)\geqslant h_m^-\}$, $[\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^+}=\{i\in N|\mu^+_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)\geqslant h_m^+\}$,$[\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^-}$(或 $[\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^+}$)表示局中人参与联盟程度 $\mu^-_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)\geqslant h_m^-$(或 $\mu^+_{\tilde{\boldsymbol{S}}}(i)\geqslant h_m^+$)的所有局中人组成的清晰联盟,$v([\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^-})$ 和 $v([\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^+})$ 为经典图合作对策的支付函数.

定义8 在具有风险偏好的区间模糊图合作对策 $G_{IF}(N,L,Q)$ 中,给定联盟 $\tilde{\boldsymbol{S}}\in\tilde{F}(N)$,$\theta_{\tilde{\boldsymbol{S}}}$ 为区间模糊联盟 $\tilde{\boldsymbol{S}}$ 的态度因子. 那么,基于风险偏好均值的区间模糊联盟对策 $(N,\tilde{t}v,L)$ 的集结支付函数可以表示为

$$\begin{aligned}\gamma(\tilde{\boldsymbol{S}})=&\theta_{\tilde{\boldsymbol{S}}}t\tilde{v}^+(\tilde{\boldsymbol{S}})+(1-\theta_{\tilde{\boldsymbol{S}}})t\tilde{v}^-(\tilde{\boldsymbol{S}})=\\&\theta_{\tilde{\boldsymbol{S}}}\sum_{m=1}^{d^+(\tilde{\boldsymbol{S}})}v([\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^+})(h_m^+-h_{m-1}^+)+\\&(1-\theta_{\tilde{\boldsymbol{S}}})\sum_{m=1}^{d^-(\tilde{\boldsymbol{S}})}v([\tilde{\boldsymbol{S}}]_{h_m^-})(h_m^--h_{m-1}^-).\end{aligned}\tag{5}$$

可见,利用联盟态度因子,通过风险偏好均值可对区间模糊联盟图合作对策的支付函数进行集结,实现区间模糊联盟图合作对策向经典图合作对策的转

化,进而确定其收益分配.

2.2 具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策A-T解

定义9 对于具有风险偏好的区间模糊图合作对策(N,γ,L,Q),如果任意联盟$\tilde{\boldsymbol{S}},\tilde{\boldsymbol{T}}\in\tilde{F}(N)$且$\tilde{\boldsymbol{S}}\bigwedge\tilde{\boldsymbol{T}}=\varnothing$,则有

$$\gamma(\tilde{\boldsymbol{S}}\bigwedge\tilde{\boldsymbol{T}})=\gamma(\tilde{\boldsymbol{S}}).$$

那么$\tilde{\boldsymbol{T}}$为(N,γ,L,Q)上的一个承载.

定义10 对于具有风险偏好的区间模糊图合作对策(N,γ,L,Q),如果任意联盟$\tilde{\boldsymbol{S}},\tilde{\boldsymbol{T}}\in\tilde{F}(N)$且$\tilde{\boldsymbol{S}}\bigwedge\tilde{\boldsymbol{T}}=\varnothing$,则有

$$\gamma(\tilde{\boldsymbol{S}}\bigvee\tilde{\boldsymbol{T}})\geqslant\gamma(\tilde{\boldsymbol{S}})+\gamma(\tilde{\boldsymbol{T}}).$$

那么$(N,\gamma,\cdots,Q)$为超可加的区间模糊联盟图合作对策，具有超可加性.

定义11 对于具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策(N,γ,L,Q),如果任意联盟$\tilde{\boldsymbol{S}},\tilde{\boldsymbol{T}}\in\tilde{F}(N)$且$\tilde{\boldsymbol{S}}\bigwedge\tilde{\boldsymbol{T}}=\varnothing$,则有

$$\gamma(\tilde{\boldsymbol{S}}\bigvee\tilde{\boldsymbol{T}})\geqslant\gamma(\tilde{\boldsymbol{S}})+\gamma(\tilde{\boldsymbol{T}})-\gamma(\tilde{\boldsymbol{S}}\bigwedge\tilde{\boldsymbol{T}}).$$

那么(N,γ,L,Q)为凸的区间模糊联盟图合作对策,具有凸性.

根据以上定义的(N,γ,L,Q)相关性质,结合经典A-T解函数式(1),再利用式(5),即基于风险偏好均值确定的区间模糊联盟合作对策的支付函数,将给出(N,γ,L,Q)的A-T解具体描述.

定义12 对于具有风险偏好的区间模糊图合作对策(N,γ,L,Q),若n维实向量$\boldsymbol{x}(\gamma,L,Q)=(x_1(\gamma,L,Q),x_2(\gamma,L,Q),\cdots,x_n(\gamma,L,Q))$满足以下公理,则称$n$维实向量$\boldsymbol{x}(\gamma,L,Q)$是$(N,\gamma,L,Q)$的A-T解.

公理1(分支有效性公理) 若(N,γ,L,Q)为具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策,$K\in\hat{C}^L(N)$,则n维向量值函数$\boldsymbol{x}(\gamma,L,Q)$满足

$$\sum_{i\in K}x_i(\gamma,L,Q)=\tilde{v}(K).$$

公理2(分支公平性公理) 若(N,γ,L,Q)为具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策,$K\in\hat{C}^L(N)$,则n维向量值函数$\boldsymbol{x}(\gamma,L,Q)$满足

$$\frac{1}{|K^h|}\sum_{i\in K^h}(x_i(\gamma,L,Q)-x_i((\gamma,L,Q)\backslash L\{h,l\}))=$$
$$\frac{1}{|K^l|}\sum_{j\in K^l}(x_j(\gamma,L,Q)-x_j((\gamma,L,Q)\backslash L\{h,l\})),$$

其中K^h和K^l为K删掉边$L\{h,l\}$后所得的包含结点i和j的连通分支. 分支公平性反应了删除任意边$L\{h,l\}$后,分支收益变化平均值相同.

公理3(可加性公理) 若具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策$(N,\gamma_1,L,Q)\in G_{IF}(N,L,Q)$,$(N,\gamma_2,L,Q)\in G_{IF}(N,L,Q)$,则对于任意$i\in N$,满足

$$x_i(\gamma_1+\gamma_2,L,Q)=x_i(\gamma_1,L,Q)+x_i(\gamma_2,L,Q).$$

定理1 若(N,γ,L,Q)为具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策,则

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{A}}T(\gamma,L,Q)=\\&(\tilde{A}T_1(\gamma,L,Q),\tilde{A}T_2(\gamma,L,Q),\cdots,\tilde{A}T_n(\gamma,L,Q)),\\&\tilde{A}T_i(\gamma,L,Q)=\\&\frac{1}{|B^L|}\sum_{B\in B^L}\Big[\gamma(B_i)-\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\backslash\{i\})}\gamma(K)\Big],\\&\qquad i=1,2,\cdots,n\end{aligned}\tag{6}$$

是具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策(N,γ,L,Q)的A-T解.

证明 要证明$\tilde{\boldsymbol{A}}T(\gamma,L,Q)$是$(N,\gamma,L,Q)$上的A-T解,需要证明式(6)满足定义12中的3条公理.

分支有效性公理:由于经典图合作对策的A-T解满足分支有效性,具有局中人风险偏好的区间模糊联盟图合作对策(N,γ,L,Q)的A-T解也满足分支有效性,即对于任意$K\in\hat{C}^L(N)$,有

$$\sum_{i\in K}\tilde{A}T_i(\gamma,L,Q)=\gamma(K).$$

分支公平性公理:因为A-T解$\tilde{A}T(\gamma,L,Q)$满足分支有效性,在$L(K)$中的任意连接边$L\{i,j\}$,有

$$\sum_{i\in K^h}AT_i((\gamma,L,Q)\backslash L\{h,l\})=\gamma(K^h),$$
$$\sum_{j\in K^l}AT_j((\gamma,L,Q)\backslash L\{h,l\})=\gamma(K^l).$$

此外,根据经典图合作对策的分支公平性定理,可以推导出

$$\frac{1}{|K^h|}\sum_{i\in K^h}(\tilde{A}T_i(\gamma,L,Q)-\tilde{A}T_i((\gamma,L,Q)\backslash L\{h,l\}))=$$
$$\frac{1}{|K^l|}\sum_{j\in K^l}(\tilde{A}T_j(\gamma,L,Q)-\tilde{A}T_j((\gamma,L,Q)\backslash L\{h,l\})).$$

可加性公理:若具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策$(N,\gamma_1,L,Q)\in G_{IF}(N,L,Q)$,$(N,\gamma_2,L,Q)\in G_{IF}(N,L,Q)$,则由式(6)具有风险偏好特征函数的线性性质可知

$$\tilde{A}T_i(\gamma_1+\gamma_2,L,Q)=$$
$$\frac{1}{|B^L|}\sum_{B\in B^L}\Big[(\gamma_1+\gamma_2)(B_i)-$$

$$\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\setminus\{i\})}(\gamma_1+\gamma_2)(K)\Big]=$$
$$\frac{1}{|B^L|}\sum_{B\in B^L}\Big[(\gamma_1(B_i)+\gamma_2(B_i))-$$
$$\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\setminus\{i\})}(\gamma_1(K)+\gamma_2(K))\Big]=$$
$$\frac{1}{|B^L|}\sum_{B\in B^L}\Big[\gamma_1(B_i)-\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\setminus\{i\})}\gamma_1(K)\Big]-$$
$$\frac{1}{|B^L|}\sum_{B\in B^L}\Big[\gamma_2(B_i)-\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\setminus\{i\})}\gamma_2(K)\Big]=$$
$$\tilde{A}T_i(\gamma_1,L,Q)+\tilde{A}T_i(\gamma_2,L,Q).\qquad\square$$

定理2　若 (N,γ,L,Q) 是具有风险偏好的区间模糊图合作对策, 则A-T解 $\tilde{A}T(\gamma,L,Q)$ 是其一个分配.

证明　若 $i\notin N$, 则显然 $\tilde{A}T_i(\gamma,L,Q)=0$.

若 $i\in N$, 则因为 $\tilde{A}T(\gamma,L,Q)$ 是分支有效的, 所以对于任意 $K\in\hat{C}^L(N)$, 有 $\sum\limits_{i\in K}\tilde{A}T_i(\gamma,L,Q)=\gamma(K)$. 此外, 由于

$$\gamma(B)=\gamma\Big(\{i\}\bigcup\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\setminus\{i\})}K\Big)\geqslant$$
$$\gamma(\{i\})+\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\setminus\{i\})}\gamma(K),$$

可得

$$\gamma(B)-\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\setminus\{i\})}\gamma(K)\geqslant\gamma(\{i\}).$$

因此有

$$\tilde{A}T(\gamma,L,Q)=$$
$$\frac{1}{|B^L|}\Big(\sum_{i\in B\in B^L}\gamma(B_i)-$$
$$\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\setminus\{i\})}\gamma(K)\Big)\geqslant\gamma(\{i\}).$$

所以, $\tilde{A}T(\gamma,L,Q)$ 是满足分配中的群体合理性和个体合理性条件, $\tilde{A}T(\gamma,L,Q)$ 是 (N,γ,L,Q) 的一个分配. $\square$

3　算例分析

某电子产品供应链内的上游、中游和下游企业(分别用1,2,3表示)拟组建合作联盟. 由于合作创新过程中需要资源互补, 在供应链上各级成员只与相邻成员才能结为联盟, 从而出现了交流结构限制结盟情形. 可能形成的合作联盟有 $\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}$ 三种形式, 即

$$N=\{1,2,3\},\ L=\{\{1,2\},\{2,3\}\}.$$

在局中人完全参与的清晰联盟下, 有

$$v(\{1\})=30,\ v(\{2\})=20,\ v(\{3\})=50,$$
$$v(\{1,2\})=100,\ v(\{2,3\})=120,$$
$$v(\{1,2,3\})=280.$$

但现实中, 各供应链企业的参与能力受到诸多限制, 其参与程度只能模糊估计, 企业1、2、3分别以[0.2, 0.3], [0.4,0.6], [0.5,0.8]的参与率参与该合作创新项目. 此时供应链各企业具有不同的风险偏好, 企业1属于风险厌恶型, 其BUM函数为 $Q_1(y)=y^2$; 企业2属于风险中立, 其BUM函数为 $Q_2(y)=y$; 企业3属于风险偏好(冒险型), 其BUM函数为 $Q_3(y)=y^{1/2}$, 现对不同区间模糊联盟组合下联盟收益情况进行收益分配. 可见, 此收益分配问题的本质是考虑局中人风险偏好的限制结盟多人合作对策.

由式(3)～(5), 可以计算出不同区间模糊联盟的联盟收益、态度因子和集结收益, 结果如表1所示.

表1　不同区间模糊联盟联盟收益、态度因子及集结收益

$\tilde{\boldsymbol{S}}$	$\theta_{\tilde{S}}$	$t\tilde{v}(\tilde{\boldsymbol{S}})$	$\gamma(\tilde{\boldsymbol{S}})$
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{1\}}=([0.2,0.3],0,0)$	1/3	$[6,9]$	7
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{2\}}=(0,[0.4,0.6],0)$	1/2	$[8,12]$	10
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{3\}}=(0,0,[0.5,0.8])$	2/3	$[25,40]$	35
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{1,2\}}=([0.2,0.3],[0.4,0.6],0)$	5/12	$[26,39]$	31.4
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{2,3\}}=(0,[0.4,0.6],[0.5,0.8])$	7/12	$[53,82]$	70
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{1,2,3\}}=([0.2,0.3],[0.4,0.6],[0.5,0.8])$	1/2	$[85,130]$	107.5

根据式(6)可求出各企业从不同区间模糊联盟结盟中的分配收益, 结果如表2所示.

表2　不同区间模糊联盟组合下的收益分配

$\tilde{\boldsymbol{S}}$	企业1	企业2	企业3
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{1\}}=([0.2,0.3],0,0)$	7	0	0
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{2\}}=(0,[0.4,0.6],0)$	0	10	0
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{3\}}=(0,0,[0.5,0.8])$	0	0	35
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{1,2\}}=([0.2,0.3],[0.4,0.6],0)$	14.2	17.2	0
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{2,3\}}=(0,[0.4,0.6],[0.5,0.8])$	0	22.5	47.5
$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\{1,2,3\}}=([0.2,0.3],[0.4,0.6],[0.5,0.8])$	17.2	41.6	48.7

本文讨论的是具有限制交流结构的图合作对策问题, 由于供应链上游企业与下游企业之间不存在交流, 即两者之间不存在合作可能. 对于此种情况, 有文献认为若两企业无合作, 则合作收益为单干收益之和, 给出合作的收益 $v(\{1,3\})=v(\{1\})+v(\{3\})$[16]. 基于此假设, 企业1、2、3组成大联盟时, 运用Shapley

值方法进行收益分配,各企业可得收益分别为

$$\tilde{\phi}_1(N,v,Q)=19.23,\ \tilde{\phi}_2(N,v,Q)=35.73,$$
$$\tilde{\phi}_3(N,v,Q)=52.53.$$

通过对比两种收益分配结果可知, $\tilde{A}T_1(\gamma,L,Q) < \phi_1(N,v,Q), \tilde{A}T_2(\gamma,L,Q) > \phi_2(N,v,Q), \tilde{A}T_3(\gamma,L,Q) < \phi_3(N,v,Q)$,表明A-T解法相对于Shapley值法,中游企业的分配收益有所增加,上游企业和下游企业的分配收益有所减少,这是因为中游企业作为合作桥梁的关键地位. 由此可见,在限制结盟图合作对策中,局中人的获利能力不仅取决于它对联盟收益的边际贡献程度,更取决于它所在联盟的结构及其在联盟中所处的具体位置. 因此,在具有交流结构联盟情形下,A-T解相对于Shapley值更具科学合理性.

4 结 论

由于现实结盟的普遍非任意性,本文针对具有区间模糊联盟的限制交流合作对策问题,通过考虑局中人的不同风险偏好,提出了具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策及其A-T解. 通过风险偏好均值理论将模糊联盟支付进行集结,公理化论证了该解的存在性和合理性. 所提出方法能有效融合局中人的个人或群体偏好信息,能有效增强实际限制结盟收益分配问题的科学性和可信度. 此外,将行为决策理论、模糊理论综合运用多人图合作对策理论,推进了多人合作对策理论的深入研究.

参考文献(References)

[1] Meng F, Tian D. The banzhaf value for fuzzy games with a coalition structure[J]. Research J of Applied Sciences Engineering & Technology, 2012, 14(1): 22-34.

[2] 张倩, 郭嗣琮. 基于结构元理论的模糊合作博弈Owen联盟值[J]. 模糊系统与数学, 2014, 28(1): 152-157.
(Zhang Q, Guo S C. The owen coalition value of the fuzzy cooperative games based on structured element[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2014, 28(1): 152-157.)

[3] Mayerson R B. Graphs and cooperation in games[J]. Mathematics of Operations Research, 1977, 2(3): 225-229.

[4] Talman D, Yamamoto Y. Average tree solution and subcore for acyclic graph games[J]. J of the Operations Research Society of Japan, 2008, 51(3): 203-212.

[5] Herings P, Van der Laan G, Talman D. The average tree solution for cycle-free graph games[J]. Games and Economic Behavior, 2008, 62(1): 77-92.

[6] Herings P, Van der Laan G, Talman A, et al. The average tree solution for cooperative games with communication structure[J]. Games and Economic Behavior, 2010, 68(2): 626-633.

[7] Béal S, Lardon A, Rémila E, et al. The average tree solution for multi-choice forest games[J]. Annals of Operations Research, 2012, 196(1): 27-51.

[8] Van den Brink R, Herings P J J, Van der Laan G, et al. The average tree permission value for games with a permission tree[J]. Economic Theory, 2013: 1-25.

[9] Béal S. Rooted-tree solutions for tree games[J]. European J of Operational Research, 2010, 203(2): 404-408.

[10] 冯庆华, 陈菊红, 刘通. 基于模糊双合作博弈的收益分配模型[J]. 控制与决策, 2013, 28(5): 701-705.
(Feng Q H, Chen J H, Liu T. Model of profit allocation based on fuzzy bicooperative game[J]. Control and Decision, 2013, 28(5): 701-705.)

[11] Nie C P, Zhang Q. Fuzzy average tree solution for graph games with fuzzy coalitions[C]. Fuzzy Information & Engineering and Operations Research & Management. Berlin: Springer-Heidelberg, 2014: 409-417.

[12] 杨洁, 李登峰. 具有交流结构的区间模糊联盟合作对策[J]. 计算机工程与应用, 2015, 51(4): 17-21.
(Yang J, Li D F. Cooperative games with interval fuzzy communication structure[J]. Computer Engineering and Applications, 2015, 51(4): 17-21.)

[13] Mishra D, Talman A J J. A characterization of the average tree solution for tree games[J]. Int J of Game Theory, 2010, 39(1/2): 105-111.

[14] Yager R R. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2004, 34(5): 1952-1963.

[15] 谭春桥. 基于Choquet延拓具有区间模糊联盟n人对策的Shapley值[J]. 系统工程学报, 2010, 25(4): 451-458.
(Tan C Q. Shapley value for n persons games with interval fuzzy coalition based on Choquet extension[J]. J of Systems Engineering, 2010, 25(4): 451-458.)

[16] 李柏洲, 罗小芳. 基于Shapley值法的产学研合作型企业原始创新收益分配研究[J]. 运筹与管理, 2013, 22(4): 220-224.
(Li B Z, Luo X F. Study on profit allocation of enterprise's original innovation with an industry-university-research cooperative mode based on the Shapley value[J]. Operations Research and Management Science, 2013, 22(4): 220-224.)

（责任编辑：郑晓蕾）