文章编号: 1001-0920(2017)02-0311-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0139

混合值逻辑控制系统的状态空间方法

刘新芸, 赵明明, 朱建栋†

(南京师范大学 数学科学学院，南京 210023)

摘 要: 对于混合值逻辑控制系统,提出确定一个正则子空间的补空间的充分必要条件.对于正则子空间已有的判别准则,给出新的证明,并提出构造补空间的新方法.对于子空间,设计计算其友好子空间的新算法,引入没有正则性假设的不变子空间的概念,获得判别不变子空间的一系列充分必要条件.

关键词: 混合值逻辑控制系统；正则子空间；友好子空间；不变子空间

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

State-space method for mixed-valued logical control systems

LIU Xin-yun, ZHAO Ming-ming, ZHU Jian-dong†

(School of Mathematical Sciences，Nanjing Normal University，Nanjing 210023，China)

Abstract: For mixed-valued logical control systems, a necessary and sufficient condition for determining a complementary subspace of a regular subspace is proposed. A new proof of an existing criterion for regular subspaces is given and a new method to construct a complementary subspace is obtained. A new algorithm for computing friendly subspaces is designed. The concept of invariant subspace without the regularity assumption is introduced and some necessary and sufficient conditions are derived.

Keywords: mixed-valued logical control system；regular subspace；friendly subspace；invariant subspace

0 引 言

逻辑控制系统是定义在有限集上的一类特殊的离散动态控制系统,其有广泛的实际背景,如基因调控网络和有限动态博弈.鉴于逻辑控制系统的重要应用价值,逻辑控制系统理论得到了生物学家、物理学家和控制理论专家的广泛关注[1-4].特别值得注意的是,程代展等[4-11]利用矩阵的半张量积,将逻辑控制系统写成了一个由双线性控制系统描述的代数形式,从而对逻辑控制系统建立了一个一般性理论框架,并在国际上产生了广泛影响.在此理论框架下,许多传统的控制问题在逻辑控制系统中得到了完美的解决,包括能控性[4,12]、可观性[4,13]、干扰解耦[10]、最优控制[14-15]和系统分解[16-18].

在线性控制系统理论里,线性坐标变换对系统分析和控制起到了非常重要的作用.类似地,逻辑坐标变换对于逻辑控制系统的研究也非常重要[7].为了研究和构造逻辑坐标转换,提出了正则子空间的概念[7].友好子空间的概念在干扰解耦问题的解决中发挥了决定性作用[10].不变子空间的概念与逻辑控制系统的拓扑结构分析[6]和系统结构分解[7]均有密切联系.进一步的研究结果可参见文献[19].在文献[20-21]中,友好子空间和正则子空间的概念被引入到混合值逻辑控制系统里,得到了许多重要的理论结果.

本文给出关于混合值逻辑控制系统状态空间方法的进一步理论结果,将文献[19]中的结果推广到混合值逻辑控制系统中.对于正则子空间的互补、正则子空间的判定、友好子空间和不变子空间,均得到了新的充分必要条件和新的构造方法.

1 预备知识

本文符号作如下标记[8]: $\mathrm{Col}(A)$ 是矩阵 A 的所有列组成的集合,且 A 的第 i 列为 $\mathrm{Col}_i(A)$; $\Delta_n = \{\delta_n^i | i = 1,2,\cdots,n\}$, $\delta_n^i = \mathrm{Col}_i(I_n)$, I_n 是 $n\times n$ 单位矩阵;如果 $\mathrm{Col}(L) \subset \Delta_m$,则称 $m\times n$ 矩阵 L 为逻辑矩阵,显然 L 满足 $1_m^{\mathrm{T}} L = 1_n^{\mathrm{T}}$, 1_n 为 n 维的元素都为 1 的列向量;所有 $m\times n$ 逻辑矩阵的集合记为 $\mathcal{L}_{m\times n}$;为简单起见,记逻辑矩阵 $L = [\delta_m^{i_1}\ \ \delta_m^{i_2}\ \ \cdots\ \ \delta_m^{i_n}]$ 为

收稿日期: 2016-02-01；**修回日期:** 2016-07-11.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (61673012, 11271194).

作者简介: 刘新芸 (1989–), 女, 博士生, 从事逻辑控制系统、有限博弈的研究；朱建栋 (1976–), 男, 教授, 博士生导师, 从事逻辑控制系统、多个体系统等研究.

†通讯作者. E-mail：zhujiandong@njnu.edu.cn

$\delta_m[i_1\ i_2\ \cdots\ i_n]$;令$\mathcal{D}_\mu=\{0,1/(\mu-1),2/(\mu-1,\cdots,1\}$,并记$1_{m\times n}$为每一个元素都等于1的$m\times n$矩阵.

设一个混合值逻辑控制系统为如下动态方程:

$$X(t+1)=f(X(t),U(t)).\tag{1}$$

其中:逻辑状态向量$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,逻辑控制向量$U(t)=[u_1,u_2,\cdots,u_p]^{\mathrm{T}}$,$x_i\in\mathcal{D}_{k_i}$,$u_j\in\mathcal{D}_{s_j}$,$i=1,2,\cdots,n$,$j=1,2,\cdots,p$;$f(\cdot)$为逻辑映射.这里,因为一般情况下既不要求$k_i(i=1,2,\cdots,n)$都相等,也不要求$s_j(j=1,2,\cdots,p)$都相等,所以称为混合值逻辑控制系统.特别地,如果对于所有的i和j,都有$k_i=2$和$s_j=2$,则系统(1)退化为二值的布尔逻辑控制系统.

矩阵的半张量积是研究逻辑控制系统的一个重要工具.文献[4]中,$m\times n$矩阵A和$p\times q$矩阵B的半张量积定义为

$$A\ltimes B=(A\otimes I_{\alpha/n})(B\otimes I_{\alpha/p}),\tag{2}$$

其中α为n和p的最小公倍数.因为半张量积是传统矩阵乘积的推广形式,所以直接将$A\ltimes B$写作AB.如果z是一个t-维列向量,则如下的伪交换律成立(见文献[8]中命题2.18):

$$zA=(I_t\otimes A)z.\tag{3}$$

如果$z\in\Delta_\mu$,则有

$$z^2=\Phi_\mu z,\tag{4}$$

其中$\Phi_\mu=\mathrm{block-diag}\{\delta_\mu^1,\delta_\mu^2,\cdots,\delta_\mu^\mu\}$称为降幂矩阵(见文献[8]中命题3.2).

用δ_μ^i代替逻辑值$\dfrac{\mu-i}{\mu-1}$,得到式(1)的代数形式[8]为

$$x(t+1)=Fu(t)x(t).\tag{5}$$

其中

$$x=\ltimes_{i=1}^n x_i,\ u=\ltimes_{j=1}^p u_j,$$
$$x_i\in\Delta_{k_i},\ u_j\in\Delta_{s_j},\ F\in\mathcal{L}_{k\times ks},$$
$$k=k_1k_2\cdots k_n,\ s=s_1s_2\cdots s_p.$$

如果映射$g(\cdot)$是可逆的,则称变换$Z=g(X)$为逻辑坐标变换,$z=Gx$是变换$Z=g(X)$的代数形式.显然g的可逆性等价于G是一个可逆的逻辑矩阵,或者说G是置换矩阵.在逻辑坐标变换$z=Gx$下,系统(5)变为

$$z(t+1)=GF(I_s\otimes G^{\mathrm{T}})u(t)z(t).\tag{6}$$

引理1 设R是$n\times n$逻辑矩阵,那么R是置换矩阵当且仅当$R1_n=1_n$.

引理2 [22] 设A、B和C分别为$m\times n$,$n\times s$和$s\times t$矩阵,那么$V_c(ABC)=(C^{\mathrm{T}}\otimes A)V_c(B)$,其中$V_c(B)$为$B$的列展开向量.

引理3 设S是一个$m\times n$非负整数矩阵,那么S是一个逻辑矩阵当且仅当$1_m^{\mathrm{T}}S=1_n^{\mathrm{T}}$.

引理4 [22] 设A、B、C、D有合适的维数,那么

$$AC\otimes BD=(A\otimes B)(C\otimes D).$$

引理5 如果$X\in\Delta_m$且$Y\in\Delta_n$,则有

$$X=(I_mX)\otimes(1_n^{\mathrm{T}}Y)=(I_m\otimes 1_n^{\mathrm{T}})(XY),\tag{7}$$

$$Y=(1_m^{\mathrm{T}}X)\otimes(I_nY)=(1_m^{\mathrm{T}}\otimes I_n)(XY).\tag{8}$$

引理6 [16] 假设$M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_t\in\mathcal{M}_{m\times n}$是非负矩阵,如果$1_m^{\mathrm{T}}M_i=1_n^{\mathrm{T}}(\forall i=1,2,\cdots,t)$,且存在逻辑矩阵$G\in\mathcal{L}_{m\times n}$满足$M_1+M_2+\cdots+M_t=tG$,则$M_1=M_2=\cdots=M_t=G$.

2 正则子空间

定义1 [21] 考虑混合值逻辑控制系统(1).逻辑变量$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$所有逻辑函数全体构成的集合称为状态空间,记为$\mathcal{X}=\mathcal{F}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.设$z_1,z_2,\cdots,z_r\in\mathcal{X}$,关于$\{z_1,z_2,\cdots,z_r\}$的逻辑函数构成了关于$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的复合逻辑函数.在此意义下,认为$\mathcal{F}\{z_1,z_2,\cdots,z_r\}\subset\mathcal{X}$,称$\mathcal{F}\{z_1,z_2,\cdots,z_r\}$为$\mathcal{X}$由$\{z_1,z_2,\cdots,z_r\}$生成的子空间.

定义2 [7] 子空间$\mathcal{Z}=\mathcal{F}\{z_1,z_2,\cdots,z_r\}$称为正则子空间,如果存在$z_{r+1},z_{r+2},\cdots,z_m\in\mathcal{X}$使得$(z_1,z_2,\cdots,z_m)^{\mathrm{T}}$是逻辑坐标变换,则称$\{z_1,z_2,\cdots,z_r\}$为$\mathcal{Z}$的子基,$\mathcal{F}\{z_{r+1},z_{r+2},\cdots,z_m\}$为$\mathcal{Z}$的一个补空间.

定理1 令$\mathcal{X}=\mathcal{F}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是混合值逻辑控制系统(1)的状态空间,子空间$\mathcal{Z}=\mathcal{F}\{z_1,z_2,\cdots,z_r\}\subset\mathcal{X}$,其中$z_i\in\mathcal{D}_{l_i}$,$i=1,2,\cdots,r$.设$l=l_1l_2\cdots l_r$,$x=x_1x_2\cdots x_n$,$z=z_1z_2\cdots z_r=Mx$,其中$M$为逻辑矩阵,则$\mathcal{Z}$是正则子空间当且仅当存在一个逻辑矩阵$N$,使得

$$MN^{\mathrm{T}}=1_{l\times kl^{-1}}.\tag{9}$$

证明 设$z_{r+1},z_{r+2},\cdots,z_m\in\mathcal{X}$是$m-r$个逻辑函数,其代数形式为$\tilde{z}=z_{r+1}z_{r+2}\cdots z_m=Nx$.$\mathcal{Z}$是子基为$z_1,z_2,\cdots,z_r$的正则子空间,当且仅当存在一个逻辑矩阵$N$,使得变换$z\tilde{z}=MxNx$是逻辑坐标转换.由式(2)$\sim$(4),可以得到

$$MxNx=M(I_k\otimes N)\Phi_kx=$$
$$(M\otimes I_{kl^{-1}})(I_k\otimes N)\Phi_kx=(M\otimes N)\Phi_kx.\tag{10}$$

$z\tilde{z}=MxNx$是逻辑坐标转换,当且仅当矩阵$(M\otimes N)\Phi_k$是置换矩阵或

$$(M\otimes N)\Phi_k1_k=1_k.\tag{11}$$

直接计算,得到

$$\Phi_k 1_k =$$

$$\begin{bmatrix} \delta_k^1 & & & \\ & \delta_k^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_k^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_k^1 \\ \delta_k^2 \\ \vdots \\ \delta_k^k \end{bmatrix} = V_c(I_k). \tag{12}$$

将式(12)代入(11),得到

$$(M \otimes N)V_c(I_k) = 1_k. \tag{13}$$

由引理2,式(13)可以写为$NM^{\mathrm{T}} = 1_{kl^{-1}\times l}$,即为式(9). □

推论1 在定理1的条件下,令

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{F}\{z_{r+1}, z_{r+2}, \cdots, z_m\},$$

其中$\tilde{z} = z_{r+1}z_{r+2}\cdots z_m = Nx$,则$\mathcal{Z}$与$\tilde{\mathcal{Z}}$互为补空间的充分必要条件为式(9).

定理2 在定理1的条件下,$\mathcal{Z}$是正则子空间,当且仅当

$$M1_k = kl^{-1}1_l, \tag{14}$$

或等价于

$$MM^{\mathrm{T}} = kl^{-1}I_l, \tag{15}$$

其中$z_i \in \mathcal{D}_{l_i}$.

证明 因为M是逻辑矩阵,所以式(14)等价于(15).

必要性.对式(9)右乘$1_{kl^{-1}}$,得到

$$MN^{\mathrm{T}}1_{kl^{-1}} = kl^{-1}1_l. \tag{16}$$

考虑到N是逻辑矩阵,由引理3,有$N^{\mathrm{T}}1_{kl^{-1}} = 1_k$,从而由式(16)得到(14).

充分性.由式(14)可见,M的每一行有kl^{-1}个1,存在置换矩阵T,使得

$$MT = 1_{kl^{-1}}^{\mathrm{T}} \otimes I_l. \tag{17}$$

设

$$N = (I_{kl^{-1}} \otimes 1_l^{\mathrm{T}})T^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

可见N是逻辑矩阵,且

$$MN^{\mathrm{T}} =$$
$$(1_{kl^{-1}}^{\mathrm{T}} \otimes I_l)(I_{kl^{-1}} \otimes 1_l) =$$
$$1_{kl^{-1}}^{\mathrm{T}} \otimes 1_l = 1_{l\times kl^{-1}}.$$

从而由定理1得到$\mathcal{Z}$是正则子空间. □

注1 定理1是逻辑控制系统理论中的新结果.但定理2的结果恰好是文献[21]中的定理2.不过,这里给出新的更为简洁的证明,且在证明过程中给出了计算补空间的更方便的方法.

3 友好子空间

友好子空间的概念对解决逻辑控制系统的干扰解耦问题起着重要的作用[10,20-21].

定义3[21] 设$\mathcal{X} = \mathcal{F}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是混合值逻辑控制系统(1)的状态空间,设$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_p\} \subset \mathcal{X}$,$\mathcal{Y} = \mathcal{F}\{Y\}$.如果$\mathcal{Z}$是正则子空间且$\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$,则称$\mathcal{Z}$是$Y$-友好子空间.

定理3 设$\mathcal{X} = \mathcal{F}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是状态空间,其中$x_i \in \mathcal{D}_{k_i}$,$k = k_1k_2\cdots k_n$.假设子空间$\mathcal{Y} = \mathcal{F}\{y_1, y_2, \cdots, y_p\}$的代数形式为$y = y_1y_2\cdots y_p = Hx$,存在一个子基为$\{z_1, z_2, \cdots, z_r\}$的$Y$-友好子空间$\mathcal{Z} = \mathcal{F}\{z_1, z_2, \cdots, z_r\}$,当且仅当存在向量$\alpha$使得

$$H1_k = kl^{-1}\alpha, \tag{19}$$

其中$z_i \in \mathcal{D}_{l_i}$且$l = l_1l_2\cdots l_r$.

证明 必要性.假设$\{z_1, z_2, \cdots, z_r\}$的代数形式为$z = Mx$,其中$M \in \mathcal{L}_{l\times k}$.假设$y_i \in \mathcal{D}_{\lambda_i}$,且$\lambda = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p$.因为$\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$,所以存在$G \in \mathcal{L}_{\lambda\times l}$使得$y = Gz$,从而$H = GM$.考虑到$\mathcal{Z}$是子基为$\{z_1, z_2, \cdots, z_r\}$的正则子空间,由定理2得到$M1_k = kl^{-1}1_l$,因此有

$$H1_k = GM1_k = G(kl^{-1}1_l) = kl^{-1}\alpha, \tag{20}$$

其中$\alpha = G1_l$.

充分性.由式(19)可知,H的第i行有$kl^{-1}a_i$个1,其中$i = 1, 2, \cdots, \lambda$,$\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_\lambda]^{\mathrm{T}}$.存在一个置换矩阵$P$,使得

$$HP = \begin{bmatrix} 1_{kl^{-1}a_1}^{\mathrm{T}} & & & \\ & 1_{kl^{-1}a_2}^{\mathrm{T}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{kl^{-1}a_\lambda}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = G\tilde{M}. \tag{21}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} 1_{a_1}^{\mathrm{T}} & & & \\ & 1_{a_2}^{\mathrm{T}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{a_\lambda}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\tilde{M} =$$

$$\begin{bmatrix} 1_{kl^{-1}}^{\mathrm{T}} \otimes I_{a_1} & & & \\ & 1_{kl^{-1}}^{\mathrm{T}} \otimes I_{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{kl^{-1}}^{\mathrm{T}} \otimes I_{a_\lambda} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

设$M = \tilde{M}P^{\mathrm{T}}$,由式(21)得$H = GM$,由式(19)得到

$$\sum_{i=1}^{\lambda} a_i = 1_\lambda^{\mathrm{T}}\alpha = lk^{-1}1_\lambda^{\mathrm{T}}H1_k = lk^{-1}1_k^{\mathrm{T}}1_k = l. \tag{24}$$

因此,由式(22)～(24)可见,G和M分别是$l\times\lambda$和$l\times k$矩阵.由式(23)得

$$M1_k=\tilde{M}P1_k=\tilde{M}1_k=kl^{-1}1_l. \quad (25)$$

从而由定理2得到,$z=Mx$是正则子空间$\mathcal{Z}$的子基的代数形式.又因为$y=Hx=GMx=Gz$,得到$\mathcal{Y}\subset\mathcal{Z}$且$\mathcal{Z}$是$Y$-友好子空间. □

3.1 不变子空间

文献[6]已经有了逻辑控制系统不变子空间的概念,但需要正则性假设(见文献[8]中的注8.5),下面给出没有正则性假设的不变子空间的概念.

定义4 称子空间$\mathcal{Y}=\mathcal{F}\{y_1,y_2,\cdots,y_p\}\subset\mathcal{X}$为混合值逻辑控制系统(1)的不变子空间,如果存在逻辑映射$g(\cdot)$,使得$Y(t+1)=g(Y(t))$,即对于任意初始值$X(0)$和控制序列$\{U(t)\}_{t=0}^{+\infty}$,有$h(X(t+1))=g(h(X(t)))$.

在$\mathcal{Y}$是正则子空间的假设下,定义4恰好是文献[6]二值逻辑控制系统不变子空间的定义.

定理4 考虑混合值逻辑控制系统(1)的代数形式(5),假设子空间$\mathcal{Y}=\mathcal{F}\{y_1,y_2,\cdots,y_p\}$的子基代数形式为$y=Hx$,其中$y_i\in\Delta_{\lambda_i}$,$\lambda=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p$,那么如下叙述是等价的:

1) 子空间$\mathcal{Y}$是式(1)的不变子空间;

2) 存在逻辑矩阵$G\in\mathcal{L}_{\lambda\times\lambda}$,使得

$$HF=GH(1_s^{\mathrm{T}}\otimes I_k); \quad (26)$$

3) 存在逻辑矩阵$G\in\mathcal{L}_{\lambda\times\lambda}$,满足

$$HF(1_s\otimes I_k)=sGH. \quad (27)$$

证明 1)⇒2).因为$\mathcal{Y}$是不变子空间,所以由定义4可知存在逻辑矩阵$G\in\mathcal{L}_{\lambda\times\lambda}$,使得$y(t+1)=Gy(t)$.一方面,有

$$Gy(t)=GHx(t)=GH(1_s^{\mathrm{T}}\otimes I_k)u(t)x(t),$$

其中最后一个等号由式(8)得到.另一方面,有

$$y(t+1)=Hx(t+1)=HFu(t)x(t).$$

从而,对于任意的$u(t)$和$x(t)$,有

$$GH(1_s^{\mathrm{T}}\otimes I_k)u(t)x(t)=HFu(t)x(t).$$

进而得到式(26).

2)⇒3).在式(26)等号两边右乘$1_s\otimes I_k$,得到

$$\begin{aligned}&HF(1_s\otimes I_k)=\\&GH(1_s^{\mathrm{T}}\otimes I_k)(1_s\otimes I_k)=\\&GH(1_s^{\mathrm{T}}1_s\otimes I_k)=sGH.\end{aligned}$$

3)⇒2).设$F=[F_1,F_2,\cdots,F_s]$,其中$F_i\in\mathcal{L}_{k\times k}$.直接计算,得到

$$\begin{aligned}&HF(1_s\otimes I_k)=H[F_1,F_2,\cdots,F_s](1_s\otimes I_k)=\\&HF_1+HF_2+\cdots+HF_s.\end{aligned}$$

由式(27)得

$$HF_1+HF_2+\cdots+HF_s=sGH. \quad (28)$$

因为所有的HF_i都是逻辑矩阵,所以由引理6和式(28)得到$HF_i=GH$,从而有

$$\begin{aligned}&HF=\\&H[F_1,\ F_2,\cdots,F_s]=[GH,\ GH,\cdots,GH]=\\&GH[I_k,\ I_k,\ \cdots,\ I_k]=GH(1_s^{\mathrm{T}}\otimes I_k).\end{aligned}$$

2)⇒1).由引理5和式(26),得

$$\begin{aligned}&y(t+1)=Hx(t+1)=HFu(t)x(t)=\\&GH(1_s^{\mathrm{T}}\otimes I_k)u(t)x(t)=GHx(t)=Gy(t).\end{aligned}$$

因此$\mathcal{Y}$是不变子空间. □

定理5 除定理4条件外,进一步假设H是行满秩的,那么$\mathcal{Y}$是不变子空间当且仅当

$$\frac{1}{s}HF(1_s\otimes I_k)H^{\mathrm{T}}(HH^{\mathrm{T}})^{-1} \quad (29)$$

是逻辑矩阵.

证明 必要性.假设$\mathcal{Y}$是不变子空间.由定理4,一定存在$G\in\mathcal{L}_{\lambda\times\lambda}$满足式(27).对式(27)等号两边右乘$H^{\mathrm{T}}$,得

$$HF(1_s\otimes I_k)H^{\mathrm{T}}=sGHH^{\mathrm{T}}. \quad (30)$$

因为H行满秩,所以HH^{T}是可逆矩阵,从而式(30)与

$$G=\frac{1}{s}HF(1_s\otimes I_k)H^{\mathrm{T}}(HH^{\mathrm{T}})^{-1} \quad (31)$$

是等价的,因此式(29)是逻辑矩阵.

充分性.记逻辑矩阵(29)为G,有

$$\frac{1}{s}HF(1_s\otimes I_k)H^{\mathrm{T}}=GHH^{\mathrm{T}}. \quad (32)$$

因为H是行满秩逻辑矩阵,所以HH^{T}是非奇异对角矩阵.令$HH^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}\{\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ h_\lambda\}$,其中$\mu_i>0,i=1,2,\cdots,\lambda$,那么式(32)可以重新写为

$$\frac{1}{s}HF(1_s\otimes I_k)H^{\mathrm{T}}=[\mu_1G_1,\ \mu_2G_2,\ \cdots,\ \mu_\lambda G_\lambda]. \quad (33)$$

由引理3得

$$1_\lambda^{\mathrm{T}}HF(1_s\otimes I_k)=1_{ks}^{\mathrm{T}}(1_s\otimes I_k)=s1_k^{\mathrm{T}}. \quad (34)$$

令

$$HF(1_s\otimes I_k)=[Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_k], \quad (35)$$

其中$Q_i\in\Delta_\lambda$是逻辑向量.式(34)等价于

$$1_\lambda^{\mathrm{T}}\frac{1}{s}Q_i=1,\ \forall i=1,2,\cdots,k. \quad (36)$$

下面证明

$$\frac{1}{s}HF(1_s\otimes I_k)=GH. \tag{37}$$

记

$$[H^{\mathrm{T}}]_i=\delta_k^{r_{i1}}+\delta_k^{r_{i2}}+\cdots+\delta_k^{r_{i\mu_i}}, \tag{38}$$

其中$i=1,2,\cdots,\lambda$.因为H是逻辑矩阵,所以有

$$\bigcup_{i=1}^{\lambda}\{r_{i1},\ r_{i2},\cdots,r_{i\mu_i}\}=\{1,2,\cdots,k\}. \tag{39}$$

由式(33)得

$$\begin{aligned}&\mu_iG_i=\\&\Big[\frac{1}{s}HF(1_s\otimes I_k)H^{\mathrm{T}}\Big]_i=\\&\frac{1}{s}[Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_k](\delta_k^{r_{i1}}+\delta_k^{r_{i2}}+\cdots+\delta_k^{r_{i\mu_i}})=\\&\frac{1}{s}(Q_{r_{i1}}+Q_{r_{i2}}+\cdots+Q_{r_{i\mu_i}}).\end{aligned} \tag{40}$$

由式(39)、(40)和引理6得

$$\frac{1}{s}Q_{r_{i1}}=\frac{1}{s}Q_{r_{i2}}=\cdots=\frac{1}{s}Q_{r_{i\mu_i}}=G_i.$$

即

$$[HF(1_s\otimes I_k)/s]_{r_{ij}}=G_i,$$

$$i=1,2,\cdots,s,\ j=1,2,\cdots,\mu_i.$$

同理,可以得到

$$[GH]_{r_{ij}}=G_i,\ i=1,2,\cdots,s,\ j=1,2,\cdots,\mu_i.$$

从而有

$$[HF(1_s\otimes I_k)/s]_{r_{ij}}=[GH]_{r_{ij}},$$

$$i=1,2,\cdots,s,\ j=1,2,\cdots,k_i.$$

进一步考虑到式(39),得到$HF(1_s\otimes I_k)/s=GH$.因此,由定理4得$\mathcal{Y}$是不变子空间. □

推论2 在定理4的条件下,进一步假设$\mathcal{Y}$是子基为$\{y_1,y_2,\cdots,y_p\}$的正则子空间,那么$\mathcal{Y}$是不变子空间的充分必要条件为

$$\frac{\lambda}{sk}HF(1_s\otimes I_k)H^{\mathrm{T}} \tag{41}$$

是逻辑矩阵.

证明 因为$\mathcal{Y}$是正则子空间,所以由定理2得到$HH^{\mathrm{T}}=k\lambda^{-1}I_\lambda$,式(29)可以重新写为(41). □

注2 即使对于二值的布尔逻辑控制系统,推论1的结果也是新的.此外,定理5还可以进一步推广到H不是行满秩的情况.如果不假设H行满秩,则HH^{T}是非负对角矩阵,其可能为奇异矩阵.令

$$HH^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_\lambda\},$$

其中$\mu_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,\lambda$,其广义逆矩阵$(HH^{\mathrm{T}})^+$是$\mathrm{diag}\{\hat\mu_1,\hat\mu_2,\cdots,\hat\mu_\lambda\}$,其中

$$\hat\mu_i=\begin{cases}1/\mu_i,\ \mu_i\neq 0;\\0,\ \mu_i=0;\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,\lambda.$$

在不假定H行满秩的情形下,定理5的结论可以推广为:$\mathcal{Y}$是不变子空间当且仅当

$$\frac{1}{\lambda}HF(1_\lambda\otimes I_k)H^{\mathrm{T}}(HH^{\mathrm{T}})^+ \tag{42}$$

是一个伪逻辑矩阵,即该矩阵的每一列是逻辑向量或零向量.

3.2 数值例子

考虑混合值逻辑控制系统

$$\begin{cases}x_1(t+1)=f_1(x_1(t),x_2(t),u(t)),\\x_2(t+1)=f_2(x_1(t),x_2(t),u(t)).\end{cases}$$

其中:$x_1\in\mathcal{D}_3,x_2\in\mathcal{D}_4,u\in\mathcal{D}_2$.假设系统的代数形式为$x(k+1)=Fu(k)x(k),x\in\Delta_{12},u\in\Delta_2,F\in\mathcal{L}_{12\times 24}$.考虑子空间$\mathcal{Y}=\mathcal{F}\{y\}$,其中$y\in\mathcal{D}_3$.假设$y$的代数形式是$y=Hx$,其中

$$H=\delta_3[1,2,2,1,3,3,2,3,2,2,3,2].$$

显然,$H1_{12}=2[1,3,2]^{\mathrm{T}}$.由定理2,$\mathcal{Y}$不是正则子空间.由定理3的证明可以计算$Y$-友好子空间$\mathcal{Z}=\mathcal{F}\{z\}$.由式(21),有

$$HP=\delta_3[1,2,2,1,3,3,2,3,2,2,3,2]P=$$
$$\delta_3[1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3].$$

因此得到置换矩阵

$$P=\delta_{12}[1,4,2,3,7,9,10,12,5,6,8,11].$$

这意味着

$$P^{\mathrm{T}}=\delta_{12}[1,3,4,2,9,10,5,11,6,7,12,8].$$

利用式(22)得到$G=\delta_2[1,2,2,2,3,3]$.由式(23)得

$$\tilde M=\delta_6[1,1,2,3,4,2,3,4,5,6,5,6].$$

令$M=\tilde MP^{\mathrm{T}}=\delta_6[1,2,3,1,5,6,4,5,2,3,6,4]$,可验证$H=GM$.令$z=Mx,\mathcal{Z}=\mathcal{F}\{z\}$是$Y$-友好子空间.因为$\mathcal{Z}$是正则子空间,所以可以利用定理2构造其补空间.由式(17)得

$$MT=\delta_6[1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,6].$$

因此得到置换矩阵为

$$T=\delta_{12}[1,2,3,7,5,6,4,9,10,12,8,11].$$

从而有

$$T^{\mathrm{T}}=\delta_{12}[1,2,3,7,5,6,4,11,8,9,12,10].$$

由式(18),得到

$$N = \delta_2[1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2]T^{\mathrm{T}} = \delta_2[1,1,1,2,1,1,1,2,2,2,2,2].$$

可以验证$MN^{\mathrm{T}} = 1_{6\times 2}$.令$\tilde{z} = Nx$, $\bar{\mathcal{Z}} = \mathcal{F}\{\tilde{z}\}$,得到$\mathcal{Z}$的补空间为$\tilde{\mathcal{Z}}$.设

$$F = \delta_{12}[2,1,4,3,5,6,1,6,1,4,5,1, 9,4,1,10,11,8,1,11,4,1,5,1].$$

利用定理5计算式(29),得到

$$\frac{1}{2}HF(1_2 \otimes I_{12})H^{\mathrm{T}}(HH^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是逻辑矩阵.从而由定理5可知,$\mathcal{Y}$是不变子空间.注意到,这里$\mathcal{Y}$不是正则子空间.这表明,在没有正则性的假设下,仍然可以讨论不变子空间的问题.

4 结 论

本文研究了混合值逻辑控制网络的正则子空间的互补、正则子空间的判定、友好子空间和不变子空间,得到了许多新的理论结果和计算方法.在以后的研究工作中,将重点考虑混合值逻辑控制系统状态空间方法的进一步应用.

参考文献(References)

[1] Akutsu T, Hayashida M, Ching W, et al. Control of Boolean networks: Hardness results and algorithms for tree structured networks[J]. J of Theoretical Biology, 2007, 244(4): 670-679.

[2] Datta A, Choudhary A, Bittner M L, et al. External control in Markovian genetic regulatory networks: The imperfect information case[J]. Bioinformatics, 2004, 20(6): 924-930.

[3] Rosin D P, Rontani D, Gauthier D J. Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks[C]. Physical Review Letters, 2013, 110(10): 1214-1222.

[4] Cheng D, Qi H. Controllability and observability of Boolean control networks[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1659-1667.

[5] Cheng D, Qi H. A linear representation of dynamics of Boolean networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(10): 2251-2258.

[6] Cheng D, Qi H. State-space analysis of Boolean networks[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2010, 21(4): 584-594.

[7] Cheng D, Li Z, Qi H. Realization of Boolean control networks[J]. Automatica, 2010, 46(1): 62-69.

[8] Cheng D, Qi H, Li Z. Analysis and control of Boolean networks: A semi-tensor product approach[M]. London: Springer, 2011.

[9] Cheng D, Qi H, Li Z, et al. Stability and stabilization of Boolean networks[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(2): 134-156.

[10] Cheng D. Disturbance decoupling of Boolean control networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(1): 2-10.

[11] Cheng D, Zhao Y. Identification of Boolean control networks[J]. Automatica, 2011, 47(4): 702-710.

[12] Laschov D, Margaliot M. Controllability of Boolean control networks via the perron-frobenius theory[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1218-1223.

[13] Laschov D, Margaliot M, Even G. Observability of Boolean networks: A graph-theoretic approach[J]. Automatica, 2013, 48(8): 2351-2362.

[14] Laschov D, Margaliot M. A maximum principle for single-input Boolean control networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(4): 913-917.

[15] Fornasini E, Valcher M E. Optimal control of Boolean control networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2014, 59(5): 1258-1270.

[16] Zou Y, Zhu J. System decomposition with respect to inputs for Boolean control networks[J]. Automatica, 2014, 50(4): 1304-1309.

[17] Zou Y, Zhu J. Decomposition with respect to outputs for Boolean control networks[C]. Proc 19th World Congress of the Int Federation of Automatic Control. Cape Town: Elsevier, 2014: 10331-10336.

[18] Zou Y, Zhu J. Kalman decomposition for Boolean control networks[J]. Automatica, 2015, 54(4): 65-71.

[19] Zhu J, Ju P. Regular subspaces and invariant subspaces of Boolean control networks[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(5): 504-508.

[20] Zhang L, Feng J. Further results on disturbance decoupling of mix-valued logical networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2014, 59(6): 1630-1634.

[21] Liu Z, Wang Y. Disturbance decoupling of mix-valued logical networks via the semi-tensor product method[J]. Automatica, 2012, 48(8): 1839-1844.

[22] Magnus J R, Neudecker H. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics[M]. New York: John Wiley & Sons, 2007.

（责任编辑：郑晓蕾）