

基于证据理论和前景理论的犹豫-直觉模糊语言多准则决策方法

谭春桥[†], 贾 媛

(中南大学 商学院, 长沙 410083)

摘 要: 在犹豫模糊语言和直觉模糊语言的基础上, 提出一种新的犹豫-直觉模糊语言集, 并定义得分函数、精确函数和 Hamming 距离公式. 针对准则值为犹豫-直觉模糊语言的不确定多准则决策问题, 构建基于证据理论和前景理论的拓展型 VIKOR 方法. 该决策方法利用证据理论处理自然状态发生的概率未知的不确定状况, 应用前景理论刻画人在做决策时的有限理性行为, 使决策结果更能反映实际情况. 最后, 通过算例表明了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 犹豫-直觉模糊语言; 证据理论; 前景理论; VIKOR 法

中图分类号: C934

文献标志码: A

Multi-criteria decision-making method based on evidence theory and prospect theory for hesitant-intuitionistic fuzzy linguistic

TAN Chun-qiao[†], JIA Yuan

(School of Business, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: As an extension of hesitant fuzzy linguistic and intuitionistic fuzzy linguistic, the hesitant-intuitionistic fuzzy linguistic set is proposed, and its score function, accuracy function and Hamming distance are also defined. In order to deal with uncertain multi-criteria decision-making problems under the hesitant-intuitionistic fuzzy linguistic environment, an extended VIKOR method based on the evidence theory and prospect theory is proposed. The evidence theory can well deal with the situation where the probability information is unknown. And the prospect theory takes bounded rationality into consideration, which can make the decision more realistic. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: hesitant-intuitionistic fuzzy linguistic; evidence theory; prospect theory; VIKOR method

0 引 言

在多准则决策问题中, Zadeh 提出了利用模糊集^[1]来表示多准则决策问题的不确定和复杂性. 然而, 在决策过程中有些评价难以用模糊数值表达, 于是语言评价集^[2]受到了广泛的关注. 王坚强等^[3]定义了直觉模糊语言集, 该语言能够表达准则的隶属度和非隶属度. 为了表达决策者在做决策时的犹豫心理, Lin 等^[4]提出了犹豫模糊语言集. 虽然直觉模糊语言和犹豫模糊语言能够反映决策者在做决策时的某些实际行为, 但都各自具有不足: 直觉模糊语言没有考虑决策者的犹豫心理, 犹豫模糊语言不能表示语言的非隶属度. 为了克服直觉模糊语言和犹豫模糊语言

的缺陷, 基于 Zhou 等^[5]提出的犹豫-直觉模糊集, 本文定义了犹豫-直觉模糊语言集, 它既可以描述出准则隶属于和非隶属于语言评价集的程度, 又能反映出决策者的犹豫心理, 包含的评价信息能够更好地表达决策问题中的模糊性和不确定性.

在现实中还存在着一类不确定性, 即决策者只知道有哪些自然状态可能出现, 但不知道各状态出现的概率. 证据理论^[6]作为一种不确定推理方法, 可以清楚地表达和处理不确定或不知道的信息. 基于证据理论强大的不确定信息处理能力, 可采用证据理论来处理这种自然状态发生的概率未知的不确定性. 针对准则值是犹豫-直觉模糊语言的上述不确定多准则决策

收稿日期: 2015-12-26; 修回日期: 2016-03-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271217); 湖南省杰出青年基金项目(2016JJ1024).

作者简介: 谭春桥(1975—), 男, 副教授, 博士生导师, 从事不确定性决策等研究; 贾媛(1990—), 女, 硕士生, 从事行为决策理论及应用的研究.

[†]通讯作者. E-mail: chunqiaot@sina.com

问题,决策方法的选择很重要.然而,目前的不确定多准则决策方法基本上是建立在期望效用理论基础之上,即假设决策者是完全理性的.而在现实决策过程中,决策者在做决策时往往表现出有限理性的行为特征(例如会出现参照依赖、对收益和损失具有不同的风险态度、敏感度递减等),因此,运用基于期望效用理论的决策方法处理决策问题不能反映出决策者的真实选择.针对此现象,一些学者考虑将决策者的行为因素引入到决策分析中,结合前景理论^[7]、后悔理论^[8]、公平关切^[9]等行为经济学理论进行决策分析.其中,前景理论^[10]以其符合人类决策思维的优势得到了最为广泛的应用.

鉴于此,针对准则值是犹豫-直觉模糊语言的不确定多准则决策问题,本文构建了基于证据理论和前景理论的拓展型VIKOR^[11]决策方法.该方法用证据理论处理了未知的概率信息,应用前景理论刻画人的有限理性行为.最后用VIKOR方法对方案进行择优,算例分析表明了所提出方法的有效性和可行性.

1 预备知识

1.1 证据理论和Pignistic概率转换方法

证据理论是一种不确定推理方法,以其强大的不确定信息表达和处理能力被广泛应用于信息融合^[12]、模式识别和决策分析^[13]等众多领域.

设某个判决问题所有可能的结果(答案或评价等级)构成一个有限集合 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$, Θ 的所有子集用幂集合 2^Θ 表示,若 Θ 中有 N 个元素,则 Θ 的幂集合 2^Θ 的元素个数为 2^N ,表示为

$$2^\Theta = \{\emptyset, \{\theta_1\}, \dots, \{\theta_N\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \dots, \{\theta_1, \theta_N\}, \{\theta_1, \theta_2, \theta_N\}, \dots, \Theta\}.$$

定义1^[6] 对于有限集合 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$,如果存在映射 $m: 2^\Theta \in [0, 1]$,满足

$$m(\emptyset) = 0, \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1,$$

则称 m 为 Θ 上 A 的基本信度分配(BBA)函数,也称mass函数.对于任意 $A \in \Theta$, $m(A)$ 表示对 A 的精确信任程度,当BBA仅在单点子集上定义时将退化为概率.

将证据理论应用到决策分析时,得到基本信度分配函数后,将面临决策问题,此时往往需要将BBA转换为概率,即将子集上的mass赋值汇聚到单个元素上.目前,研究如何将BBA转换为概率的方法有很多,但各自都具有缺点.本文采用Smets等^[14]提出的

Pignistic概率转换方法,该方法基于平均分配,转换时损失的信息较小,转化公式如下:

$$p_{\theta_n} = \sum_{\theta_n \in B} \frac{m(B)}{|B|}. \quad (1)$$

其中: θ_n 为 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ 中的任意一个元素, B 为包含元素 θ_n 的 Θ 中的一些子集.

1.2 前景理论

前景理论^[10]主要考虑价值函数和决策权重,前景价值 V 表示如下:

$$V = \sum_{i=1}^n \pi(p_i) v(x_i). \quad (2)$$

其中

$$\pi(p) = \begin{cases} \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}, & x \geq x_0; \\ \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}}, & x < x_0 \end{cases} \quad (3)$$

为概率的增函数,称为决策权重; x_0 表示参照点;参数 γ 和 δ 不同,表示当面临收益和损失时,决策权重有所不同;且

$$v(x) = \begin{cases} (x - x_0)^\alpha, & x \geq x_0; \\ -\lambda(-(x - x_0))^\beta, & x < x_0 \end{cases} \quad (4)$$

为价值函数,是决策者主观感受形成的价值, x_0 表示参照点,参数 α 和 β ($0 < \alpha, \beta < 1$)分别表示面临收益和损失时价值函数的凹凸程度, α 和 β 越大,凹凸程度越大,这表明决策者的敏感性是递减的,参数 $\lambda > 1$ 表示人们对损失比收益更敏感.

1.3 VIKOR决策模型

VIKOR方法是由Opricovic^[11]提出的一种经典的决策方法,相比TOPSIS法和ELECTRE法,VIKOR方法最大的优点是它既最大化了群效用,又最小化了个体遗憾,将决策者的主观偏好行为考虑进去,使决策结果更加合理.VIKOR方法的基本思想是:先确定正理想解和负理想解,其中正、负理想解分别指方案在各评估指标中的最佳值和最差值;然后根据各方案的评估值与理想指标值的距离大小对方案进行优劣排序.在评价过程中,VIKOR方法运用 L_p -metric聚合函数,有

$$L_{pi} = \left\{ \sum_{j=1}^n [w_j (f_j^* - f_{ij}) / (f_j^* - f_j^-)]^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

其中: $1 \leq p \leq \infty$, p 为聚合函数的距离参数(本文 $p = 1$);每个方案用 A_i 表示, $i = 1, 2, \dots, m$, m 为方案个数; $j = 1, 2, \dots, n$, n 为评价指标个数; f_{ij} 为方案 A_i 在第 j 个评价指标的评估值; $f_j^* = \max_i f_{ij}$ 和

$f_j^- = \min_i f_{ij}$ 分别为正理想解和负理想解; w_j 为评价指标的权重; 测度 L_{pi} 为方案 A_i 到理想解的距离.

2 犹豫-直觉模糊语言集及其相关定义

2.1 犹豫-直觉模糊语言集

犹豫-直觉模糊语言集是基于犹豫-直觉模糊集^[5]提出的,它结合了犹豫模糊语言和直觉模糊语言两者的优点,并弥补了它们各自在表达不确定信息上的不足.与犹豫模糊语言相比,犹豫-直觉模糊语言还能够表达某一语言评价集的非隶属度;与直觉模糊语言相比,犹豫-直觉模糊语言可以描述某一语言评价的多个可能的隶属度.

定义2^[5] 设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为一给定论域, X 上的一个犹豫-直觉模糊集 K 可以表示为

$$K = \{(x_i, h_{k(x_i)}, v_{k(x_i)}) | x_i \in X\}.$$

其中: $h_{k(x_i)}$ 和 $v_{k(x_i)}$ 为 x_i 隶属和非隶属于 K 的程度, $h_{k(x_i)} \subseteq [0, 1]$ 为一个犹豫模糊集,且满足

$$\max\{h_{k(x_i)}\} + v_{k(x_i)} \leq 1.$$

任意一个 $(h_{k(x_i)}, v_{k(x_i)})$ 表示犹豫-直觉模糊集中的犹豫-直觉模糊元素.

设 $S = (s_i | i = 0, 1, \dots, g)$ 是由奇数个语言术语组成的集合,称为语言术语集.其中: $g+1$ 是语言术语的个数, g 为语言术语集的粒度.语言术语集满足以下条件:

- 1)有序性,如果 $i > j$,则 $s_i > s_j$;
- 2)存在逆运算, $s_i = \text{neg}(s_j), i + j = g$;
- 3)如果 $s_i > s_j$,则 $\max(s_i, s_j) = s_i, \min(s_i, s_j) = s_j$.

定义3 设 X 为一给定论域,且 $s_{\theta(x)} \in S, X$ 上的一个犹豫-直觉模糊语言集 A 可以表示为

$$A = \{\langle x[s_{\theta(x)}, (h_{k(x)}, v_{k(x)})] \rangle | x \in X\}.$$

其中: $s_{\theta(x)}$ 为一个语言术语,表示元素 x 的语言评价价值; $\theta(x)$ 为该语言评价价值对应的脚标值; $h_{k(x)}$ 和 $v_{k(x)} \in [0, 1]$ 为 x 隶属和非隶属于 $s_{\theta(x)}$ 的程度; $h_{k(x)}$ 为一个犹豫模糊集,满足 $h_{k(x)} \subseteq [0, 1]$ 和 $\max\{h_{k(x)}\} + v_{k(x)} \leq 1$; 任意一个 $(s_{\theta(x)}, (h_{k(x)}, v_{k(x)}))$ 表示犹豫-直觉模糊语言集中的犹豫-直觉模糊语言元素.

$v_{k(x)}$ 可用犹豫模糊集 $h_{k(x)}$ 中隶属度最大的 $h_{k(x)}^+$ (其中 $h_{k(x)}^+ = \max\{h_{k(x)}\}$) 来表示 $v_{k(x)} = 1 - h_{k(x)}^+$, 这表明 x 隶属于语言评价价值 $s_{\theta(x)}$ 是高可信度的.所以犹豫-直觉模糊语言集又可以表示为

$$A = \{\langle x[s_{\theta(x)}, (h_{k(x)}, 1 - h_{k(x)}^+)] \rangle | x \in X\}.$$

本文采用这种形式表示犹豫-直觉模糊语言集.

例如,假设用语言术语集 $S = \{s_0, s_1, s_2\}$ (差, 一般, 好) 中的语言术语评价某个冰箱的制冷效果.决策者本打算用直觉模糊语言 $\langle s_2, (0.6, 0.4) \rangle$ 评价, 这样既给出了冰箱的制冷效果是 s_2 (好) 的隶属度 0.6, 又给出了非隶属度 0.4; 但是决策者在给出 s_2 (好) 的隶属度时可能是犹豫的, 会用 $(0.5, 0.6, 0.7)$ 这样的犹豫数表示.在这种情况下,用犹豫-直觉模糊语言 $\langle s_2, (\{0.5, 0.6, 0.7\}, 0.3) \rangle$ 可以恰当地表达决策者的这种既包含语言的隶属度和非隶属度, 又体现犹豫心理的评估.

本文提出的犹豫-直觉模糊语言集和 Beg 等^[15]提出的犹豫直觉模糊语言集都是针对犹豫模糊语言和直觉模糊语言在描述上的不足, 而对语言评价集进行的补充完善, 但是两者是不同的概念. 首先, 两者是基于不同的理论进行定义的, Beg 等的犹豫直觉模糊语言集基于直觉模糊集^[16]和犹豫模糊语言集, 而本文的犹豫-直觉模糊语言集基于直觉语言模糊集、犹豫模糊语言集和 Zhou 等^[5]提出的犹豫-直觉模糊集. 其次, 两者在表达形式上是不同的, 本文提出的犹豫-直觉模糊语言集的隶属度和非隶属度都是用 $[0, 1]$ 实数表示的, 而 Beg 等的犹豫直觉模糊语言集的隶属度和非隶属度是用语言值表示的.

2.2 犹豫-直觉模糊语言的排序和距离公式

定义4 对于犹豫-直觉模糊语言

$$a = (s_{\theta(x)}, (h_{k(x)}, 1 - h_{k(x)}^+)),$$

其记分函数 $S(a)$ 定义为

$$S(a) = \frac{\theta(x)}{2} \left[1 + \sum_{\gamma \in h_{k(x)}} \frac{\gamma}{l(h_{k(x)})} - (1 - h_{k(x)}^+) \right].$$

精确函数 $H(a)$ 定义为

$$H(a) = \theta(x) \left[1 - \sum_{\gamma \in h_{k(x)}} \frac{\gamma}{l(h_{k(x)})} - (1 - h_{k(x)}^+) \right].$$

其中: $l(h_{k(x)})$ 为 $h_{k(x)}$ 的个数; γ 为犹豫模糊集 $h_{k(x)}$ 中的元素.

定义5 设 a_1, a_2 为任意两个犹豫-直觉模糊语言:

1) 如果 $S(a_1) < S(a_2)$, 则 $a_1 < a_2$.

2) 如果 $S(a_1) = S(a_2)$, 则

$$\begin{cases} H(a_1) > H(a_2), & a_1 < a_2; \\ H(a_1) < H(a_2), & a_1 > a_2; \\ H(a_1) = H(a_2), & a_1 = a_2. \end{cases}$$

定义6 对于任意两个犹豫-直觉语言 $a_i = (s_{\theta(x_i)}, (h_{k(x_i)}, 1 - h_{k(x_i)})) (i = 1, 2)$, a_1 与 a_2 之间的 Hamming 距离定义为

$$D(a_1, a_2) = \left| \left(h_{k(x_1)}^+ + \sum_{\gamma_1 \in h_{k(x_1)}} \frac{\gamma_1}{l(h_{k(x_1)})} \right) \frac{\theta_{(x_1)}}{2} - \left(h_{k(x_2)}^+ + \sum_{\gamma_2 \in h_{k(x_2)}} \frac{\gamma_2}{l(h_{k(x_2)})} \right) \frac{\theta_{(x_2)}}{2} \right|.$$

上述任意两个犹豫-直觉模糊语言之间的 Hamming 距离具有如下的性质.

性质1 犹豫-直觉模糊语言 a_1 和 a_2 的 Hamming 距离满足以下条件:

- 1) $0 \leq D(a_1, a_2) \leq g$;
- 2) $D(a_1, a_1) = 0$;
- 3) $D(a_1, a_2) = D(a_2, a_1)$.

证明 1)可知

$$0 \leq h_{k(x_i)} \leq 1, 0 \leq \theta(x_i) \leq g,$$

进而有

$$0 \leq \frac{h_{k(x_i)}^+ + \sum_{\gamma_i \in h_{k(x_i)}} \frac{\gamma_i}{l(h_{k(x_i)})}}{2} \leq 1, \\ 0 \leq \left(h_{k(x_i)}^+ + \sum_{\gamma_i \in h_{k(x_i)}} \frac{\gamma_i}{l(h_{k(x_i)})} \right) \frac{\theta_{(x_i)}}{2} \leq g.$$

所以

$$0 \leq \left| \left(h_{k(x_1)}^+ + \sum_{\gamma_1 \in h_{k(x_1)}} \frac{\gamma_1}{l(h_{k(x_1)})} \right) \frac{\theta_{(x_1)}}{2} - \left(h_{k(x_2)}^+ + \sum_{\gamma_2 \in h_{k(x_2)}} \frac{\gamma_2}{l(h_{k(x_2)})} \right) \frac{\theta_{(x_2)}}{2} \right| \leq g.$$

2)有

$$D(a_1, a_1) = \left| \left(h_{k(x_1)}^+ + \sum_{\gamma_1 \in h_{k(x_1)}} \frac{\gamma_1}{l(h_{k(x_1)})} \right) \frac{\theta_{(x_1)}}{2} - \left(h_{k(x_1)}^+ + \sum_{\gamma_1 \in h_{k(x_1)}} \frac{\gamma_1}{l(h_{k(x_1)})} \right) \frac{\theta_{(x_1)}}{2} \right| = 0.$$

3)有

$$D(a_1, a_2) = \left| \left(h_{k(x_1)}^+ + \sum_{\gamma_1 \in h_{k(x_1)}} \frac{\gamma_1}{l(h_{k(x_1)})} \right) \frac{\theta_{(x_1)}}{2} - \left(h_{k(x_2)}^+ + \sum_{\gamma_2 \in h_{k(x_2)}} \frac{\gamma_2}{l(h_{k(x_2)})} \right) \frac{\theta_{(x_2)}}{2} \right|,$$

$$D(a_2, a_1) = \left| \left(h_{k(x_2)}^+ + \sum_{\gamma_2 \in h_{k(x_2)}} \frac{\gamma_2}{l(h_{k(x_2)})} \right) \frac{\theta_{(x_2)}}{2} - \left(h_{k(x_1)}^+ + \sum_{\gamma_1 \in h_{k(x_1)}} \frac{\gamma_1}{l(h_{k(x_1)})} \right) \frac{\theta_{(x_1)}}{2} \right|.$$

所以 $D(a_1, a_2) = D(a_2, a_1)$. $\square$

3 基于证据理论和前景理论的不确定多准则决策模型

3.1 不确定环境下的犹豫-直觉模糊语言多准则决策问题描述

不确定环境下犹豫-直觉模糊语言多准则决策问题: 设备选方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, A_i 为第 i 个方案, $i \in M, M = \{1, 2, \dots, m\}$. 准则集 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, C_j 为第 j 个准则, $j \in N, N = \{1, 2, \dots, n\}$. 通常, 准则分为效益型和成本型, 效益型准则是越大越好, 成本型准则是越小越好. 准则权重向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, w_j 为准则 C_j 的权重, $j \in N$, 且满足

$$0 \leq w_j \leq 1, \sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

自然状态集 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_h\}$, s_k 为第 k 种自然状态, $k \in H, H = \{1, 2, \dots, h\}$. 第 k 种自然状态 s_k 发生的概率为 p_{s_k} , 整个自然状态发生的概率集合 $P = \{p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_h}\}$, 满足

$$0 \leq p_{s_k} \leq 1, \sum_{k=1}^h p_{s_k} = 1.$$

由于现实问题的复杂性和信息获取的不方便性, 要求决策者提供精确的概率分布是困难的, 自然状态发生的概率一般是未知的, 在这种情况下采用证据理论中的 BBA 的生成方法^[17-19], 再结合专家意见得到自然状态 S 的基本信度分配 $m(B)$. 其中: $m(\cdot)$ 为基本信度分配函数; B 为 S 的子集 ($B \in S$); x_{ij}^k 为在自然状态 s_k 准则 C_j 下对方案 A_i 的评价, 用犹豫-直觉模糊语言表示, 即 $x_{ij}^k = \langle s_{\theta(x)}, (h_{k(x)}, v_{k(x)}) \rangle$; r_{ij}^k 为自然状态 s_k 准则 C_j 下方案 A_i 的期望值, 是决策者根据已有信息和对未来的预期给出的, 此期望值作为前景理论的参照值, 用犹豫-直觉模糊语言表示.

3.2 基于证据理论和前景理论的VIKOR决策模型

在不确定环境下, 运用证据理论表达和处理自然状态发生的概率未知的情况, 然后结合前景理论, 提出拓展的 VIKOR 决策模型, 具体过程如下.

Step 1: 进行规范化.

在不确定多准则决策问题中,首先需要对准则类型进行规范化处理,对于效益型的准则一般不需要处理直接可用来运算,但对于成本型的准则先应用式(6)进行规范化,有

$$\bar{A} = \langle s_{(g-\theta(x))}, (h_{k(x)}, v_{k(x)}) \rangle. \quad (6)$$

规范化之后的准则值和期望值分别表示为 $\bar{x}_{ij}^k$ 和 $\bar{r}_{ij}^k$.

Step 2: 利用 Pignistic 概率转换方法求出概率值 p_{s_k} .

基于得到的基本信度分配,由下式求得各自然状态发生的概率值:

$$p_{s_k} = \sum_{s_k \in B} \frac{m(B)}{|B|}. \quad (7)$$

决策问题由不确定性决策问题转化为基本决策问题.

Step 3: 确定方案的前景决策矩阵.

对于现实的决策问题,决策者往往更加重视预期与结果的差距,而不是结果本身,故本文以给定的期望值 r_{ij}^k 作为参照点,利用式(8)计算各个准则下的前景值,得到前景矩阵 $V = [V_{ij}]_{m \times n}$,有

$$V_{ij} = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^h \pi(p_{s_k}) v(\bar{x}_{ij}^k). \quad (8)$$

其中

$$\pi(p_{s_k}) = \begin{cases} \frac{p_{s_k}^\gamma}{(p_{s_k}^\gamma + (1 - p_{s_k})^\gamma)^{1/\gamma}}, & \bar{x}_{ij}^k \geq \bar{r}_{ij}^k; \\ \frac{p_{s_k}^\delta}{(p_{s_k}^\delta + (1 - p_{s_k})^\delta)^{1/\delta}}, & \bar{x}_{ij}^k < \bar{r}_{ij}^k. \end{cases} \quad (9)$$

$$\bar{v}_{ij}^k = \begin{cases} (D(\bar{x}_{ij}^k, \bar{r}_{ij}^k))^\alpha, & \bar{x}_{ij}^k \geq \bar{r}_{ij}^k; \\ -\lambda(D(\bar{x}_{ij}^k, \bar{r}_{ij}^k))^\beta, & \bar{x}_{ij}^k < \bar{r}_{ij}^k. \end{cases} \quad (10)$$

参数 $\gamma = 0.61, \delta = 0.69, \lambda = 2.25, \alpha = \beta = 0.88^{[20]}$.

Step 4: 运用 VIKOR 方法对方案进行择优.

Step 4.1: 分别求出正理想解 V_j^* 和负理想解 V_j^- ,有

$$V_j^* = \max_i V_{ij}, \quad (11)$$

$$V_j^- = \min_i V_{ij}. \quad (12)$$

Step 4.2: 利用下式计算 S_i, R_i, Q_i :

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{V_j^* - V_{ij}}{V_j^* - V_j^-} \right), \quad (13)$$

$$R_i = \max_j \left\{ w_j \left(\frac{V_j^* - V_{ij}}{V_j^* - V_j^-} \right) \right\}, \quad (14)$$

$$Q_i = v \frac{S_i - S^-}{S^* - S^-} + (1 - v) \frac{R_i - R^-}{R^* - R^-}. \quad (15)$$

其中

$$S^* = \max_i \{S_i\}, S^- = \min_i \{S_i\},$$

$$R^* = \max_i \{R_i\}, R^- = \min_i \{R_i\};$$

v 为决策机制系数,本文取 $v = 0.5$,既最大化了群效用又最小化了个体遗憾.

Step 4.3: 对方案进行排序择优.

判断准则 1 如果结果能够同时满足以下两个条件,则最优方案便是按照 Q_i 值由小到大排序后最小的方案(假设 $A_{(1)}$ 是按照 Q_i 值由小到大进行排序后第一小的方案):

条件 1: $Q_{(2)} - Q_{(1)} \geq 1/(m-1)$, m 表示方案个数, $Q_{(1)}$ 、 $Q_{(2)}$ 分别表示排序第 1 小和第 2 小的方案 $A_{(1)}$ 和 $A_{(2)}$ 对应的值.

条件 2: 按照 S 值或 R 值由小到大排序, $A_{(1)}$ 是第 1 小的方案.

判断准则 2 如果条件 2 不满足,则 $A_{(1)}$ 和 $A_{(2)}$ 均为折衷解;如果条件 1 不满足,则通过式 $Q_{(i)} - Q_{(1)} < 1/(m-1)$ 确定 i 值中的最大的值 M ,得到最终折衷解集为 $\{A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(M)}\}$.

4 算例分析

设有 3 个备选公司(A_1 : 汽车公司, A_2 : 计算机公司, A_3 : 食品公司), 某风险投资企业欲从中选择一个公司进行投资, 对 3 个备选公司从经济收益、风险分析、社会政治影响这 3 个准则(分别用 C_1 、 C_2 、 C_3 表示)进行评估, 权重向量 $W = (0.5, 0.35, 0.15)^T$. 在投资期间, 有 3 种可能的自然状态: 好、中、差(分别用 s_1 、 s_2 、 s_3 表示), 这 3 种不同状态出现的概率分别用 p_1 、 p_2 、 p_3 表示. 由于现实问题的复杂性和信息获取的不方便性, 3 种自然状态出现的概率是未知的. 应用证据理论 BBA 函数的生成方法^[21-23], 并参考专家的意见, 得到自然状态 S 的基本信度分配为

$$m(B_1) = 0.2, m(B_2) = 0.4,$$

$$m(B_3) = 0.25, m(B_4) = 0.15.$$

其中

$$B_1 = \{s_1\}, B_2 = \{s_1, s_2\},$$

$$B_3 = \{s_2, s_3\}, B_4 = \{s_1, s_2, s_3\},$$

除了 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 , 剩余子集的基本信度分配全为 0.

基于上述 3 个评估准则, 专家以犹豫-直觉模糊语言的形式分别给出了 3 家公司在 3 种自然状态下的评估值和期望值, 如表 1、表 2 和表 3 所示, 其中犹豫-直觉模糊语言取自语言术语集 $S = \{s_0, s_1, s_2,$

表 1 市场状态好时各方案的准则值和期望值

	C_1	C_2	C_3
A_1	$\langle s_5, (\{0.67, 0.70\}, 0.30) \rangle$	$\langle s_6, (\{0.62, 0.73, 0.80\}, 0.20) \rangle$	$\langle s_7, (0.78, 0.22) \rangle$
A_2	$\langle s_5, (\{0.80, 0.75, 0.70\}, 0.20) \rangle$	$\langle s_7, (\{0.62, 0.78\}, 0.22) \rangle$	$\langle s_6, (\{0.62, 0.68\}, 0.32) \rangle$
A_3	$\langle s_5, (\{0.92, 0.96\}, 0.04) \rangle$	$\langle s_6, (\{0.91, 0.87\}, 0.09) \rangle$	$\langle s_6, (\{0.86, 0.92\}, 0.08) \rangle$
期望值	$\langle s_5, (0.71, 0.29) \rangle$	$\langle s_6, (\{0.82, 0.89\}, 0.11) \rangle$	$\langle s_7, (\{0.66, 0.62\}, 0.34) \rangle$

表 2 市场状态中时各方案的准则值和期望值

	C_1	C_2	C_3
A_1	$\langle s_3, (0.98, 0.02) \rangle$	$\langle s_5, (\{0.75, 0.81\}, 0.19) \rangle$	$\langle s_5, (\{0.78, 0.82, 0.87\}, 0.13) \rangle$
A_2	$\langle s_4, (\{0.82, 0.89\}, 0.11) \rangle$	$\langle s_4, (0.88, 0.12) \rangle$	$\langle s_4, (\{0.78, 0.70\}, 0.22) \rangle$
A_3	$\langle s_5, (\{0.78, 0.86, 0.80\}, 0.20) \rangle$	$\langle s_5, (\{0.82, 0.88\}, 0.12) \rangle$	$\langle s_4, (0.71, 0.29) \rangle$
期望值	$\langle s_4, (\{0.68, 0.78\}, 0.22) \rangle$	$\langle s_4, (0.83, 0.17) \rangle$	$\langle s_4, (\{0.81, 0.78, 0.71\}, 0.19) \rangle$

表 3 市场状态差时各方案的准则值和期望值

	C_1	C_2	C_3
A_1	$\langle s_1, (\{0.94, 0.98\}, 0.02) \rangle$	$\langle s_3, (0.95, 0.05) \rangle$	$\langle s_2, (\{0.82, 0.88, 0.92\}, 0.08) \rangle$
A_2	$\langle s_2, (\{0.89, 0.79\}, 0.11) \rangle$	$\langle s_1, (\{0.87, 0.90\}, 0.10) \rangle$	$\langle s_2, (0.71, 0.23) \rangle$
A_3	$\langle s_3, (\{0.81, 0.88, 0.86\}, 0.12) \rangle$	$\langle s_2, (\{0.68, 0.61\}, 0.32) \rangle$	$\langle s_3, (\{0.88, 0.78\}, 0.12) \rangle$
期望值	$\langle s_2, (\{0.87, 0.92\}, 0.08) \rangle$	$\langle s_2, (\{0.67, 0.77, 0.85\}, 0.15) \rangle$	$\langle s_2, (0.92, 0.08) \rangle$

$s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$, 分别对应于: 极差、很差、差、稍差、一般、稍好、好、很好、极好.

根据上面提出的决策方法, 具体过程如下.

Step 1: 规范化处理. 因为 3 个准则都是效益型的, 所以准则值和期望值都无需进行规范化处理.

Step 2: 用 Pignistic 概率转换方法将 BBA 转换为概率. 根据上述已知的基本信度分配, 利用式 (7) 求出各自然状态发生的概率, 分别为

$$p(s_1) = 9/20, p(s_2) = 3/8, p(s_3) = 7/40.$$

Step 3: 确定方案的前景决策矩阵 V . 首先, 由式 (9) 求出面临收益和损失时的决策权重.

当决策者面临收益时, 有

$$\pi(p(s_1)) = 0.396, \pi(p(s_2)) = 0.358,$$

$$\pi(p(s_3)) = 0.246;$$

当决策者面临损失时, 有

$$\pi(p(s_1)) = 0.411, \pi(p(s_2)) = 0.364,$$

$$\pi(p(s_3)) = 0.225.$$

然后, 利用式 (8) 和 (10) 得到前景矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} -0.7181 & -0.2080 & 0.7089 \\ 0.2659 & -0.4249 & -1.0329 \\ 1.0716 & 0.2486 & 0.2053 \end{bmatrix}.$$

Step 4: 运用 VIKOR 方法对方案进行择优. 由式 (11) 和 (12), 求得正负理想解为

$$V_j^+ = \{1.0716, 0.2486, 0.7089\},$$

$$V_j^- = \{-0.7181, -0.4249, -1.0329\}.$$

由式 (13)~(15) 得到 S_i 、 R_i 和 Q_i 值如表 4 所示.

表 4 S_i 、 R_i 和 Q_i 值

方案	S_i	R_i	Q_i
A_1	0.7373	0.5	1
A_2	0.7251	0.35	0.8392
A_3	0.0434	0.0065	0

由以上数据, 有 $Q_3 < Q_1 < Q_2$, 且满足条件 1 和条件 2. 所以依据判断准则 1, 得到最优方案为 A_3 , 即应该选择投资食品公司.

5 结 论

本文定义了犹豫-直觉模糊语言集,针对准则值为犹豫-直觉语言的不确定多准则决策问题,提出了一种基于证据理论和前景理论的拓展型VIKOR决策方法.该决策方法具有以下优点:1)利用证据理论很好地处理了自然状态发生的概率未知的情况,继而求出各状态发生的概率,将问题转化成基本的决策问题;2)前景理论的应用将人的有限理性行为考虑进去,使决策结果更加合理.但是该方法也有不足之处,只考虑了准则值为犹豫-直觉模糊语言、准则权重为实数的决策问题,而有关准则权重为区间数或者语言数的情况没有加以讨论,所以准则值为犹豫-直觉模糊语言、准则权重为区间数或者语言数的决策问题尚有待进一步研究.

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. Information Science, 1975, 8(3): 199-249.
- [3] 王坚强, 李寒波. 基于直觉语言集结算子的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1571-1574.
(Wang J Q, Li H B. Multi-criteria decision-making method based on aggregation operators for intuitionistic linguistic fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1571-1574.)
- [4] Lin R, Zhao X F, Wei G W. Models for selecting an ERP system with hesitant fuzzy linguistic information[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(5): 2155-2165.
- [5] Zhou W, Xu Z, Chen M. Preference relations based on hesitant-intuitionistic fuzzy information and their application in group decision making[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 87(1): 163-175.
- [6] 韩德强, 杨艺, 韩崇昭. DS证据理论研究进展及相关问题探讨[J]. 控制与决策, 2014, 29(1): 1-11.
(Han D Q, Yang Y, Han C Z. Advances in DS evidence theory and related discussions[J]. Control and Decision, 2014, 29(1): 1-11.)
- [7] 王坚强, 周玲. 基于前景理论的灰色随机多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1658-1664.
(Wang J Q, Zhou L. Grey-stochastic multi-criteria decision-making approach based on prospect theory[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2010, 30(9): 1658-1664.)
- [8] 张晓, 樊治平, 陈发动. 基于后悔理论的风险型多属性决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(9): 2313-2320.
(Zhang X, Fan Z P, Chen F D. Method for risky multiple attribute decision making based on regret theory[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2013, 33(9): 2313-2320.)
- [9] 李波, 李宜楠, 侯丽婷, 等. 具有公平关切的零售商对双渠道供应链决策影响分析[J]. 控制与决策, 2015, 30(5): 955-960.
(Li B, Li Y N, Hou L T, et al. Impact of fair-minded retailer on decision of supply chain in dualchannel[J]. Control and Decision, 2015, 30(5): 955-960.)
- [10] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-292.
- [11] Opricovic S. Multicriteria optimization of civil engineering systems[J]. Faculty of Civil Engineering, 1998, 2(1): 5-21.
- [12] Aminravan F, Sadiq R, Hoorfar M, et al. Multi-level information fusion for spatiotemporal monitoring in water distribution networks[J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(7): 3813-3831.
- [13] Song Y, Wang X, Lei L, et al. Combination of interval-valued belief structures based on intuitionistic fuzzy set[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 67(1): 61-70.
- [14] Smets P, Kennes R. The transferable belief model[J]. Artificial Intelligence, 1994, 66(2): 191-234.
- [15] Beg I, Rashid T. Hesitant intuitionistic fuzzy linguistic term sets[J]. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 2014, 20(3): 53-64.
- [16] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [17] Florea M C, Jusselme A L, Grenier D, et al. Approximation techniques for the transformation of fuzzy sets into random sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159(3): 270-288.
- [18] Boudraa A O, Bentabet A, Salzenstein F, et al. Dempster-Shafer's basic probability assignment based on fuzzy membership functions[J]. Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis, 2004, 4(1): 1-9.
- [19] Han D, Han C, Deng Y. Novel approaches for the transformation of fuzzy membership function into basic probability assignment based on uncertainty optimization[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2013, 21(2): 289-322.
- [20] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. J of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297-323.

(责任编辑: 郑晓蕾)