文章编号: 1001-0920(2017)02-0378-07 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1098

多属性群决策问题中基于最小叉熵的权重集成方法

何大义†, 陈小玲, 许加强

(中国地质大学(北京) 人文经管学院，北京 100083)

摘 要: 基于决策者的效用函数,通过将客观属性值矩阵转换为主观属性值矩阵来反映决策者对属性值的不同判断.首先通过使用熵权法,依据属性的主观值矩阵和客观值矩阵分别确定属性的主观权重和客观权重;然后基于最小叉熵准则构建优化模型,将所有决策者的主观属性权重综合成一个权重向量;最后,再次利用最小叉熵准则集成属性的主观权重和客观权重.所提出方法充分考虑了所有决策者对多属性决策问题的不同判断,提供了一种基于信息熵的可行权重集成方法.

关键词: 多属性群决策；最小叉熵准则；熵权法；权重集成

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Weight aggregation method based on principle of minimum cross-entropy in multiple attribute group decision-making

HE Da-yi†, *CHEN Xiao-ling*, *XU Jia-qiang*

(School of Humanities and Economic Management, China University of Geosciences(Beijing), Beijing 100083, China)

Abstract: Based on the decision-makers' utility function, the attributes value matrix is converted to the subjective attributes value matrix to reflect their subjective judgments on the attributes value. By utilizing the entropy weighting technique, the decision-maker's subjective weight and objective weight of attributes are determined individually based on the subjective attributes value matrix and attributes value matrix. Then, based on the principle of minimum cross-entropy, all decision-makers' subjective weights are integrated into a single weight vector. Then, by applying the principle of minimum cross-entropy again, a weight aggregation method is proposed to combine the subjective and objective weight of attributes. Finally, a multiple attribute group decision-making(MAGDM) example of project choosing is presented to illustrate the procedure of the proposed method. The method proposed fully takes all decision-makers' various evaluation on a multiple attribute decision-making(MADM) problem into consideration, which provides a feasible method based on the information-theoretic entropy to aggregate weights in MAGDM problems.

Keywords: MAGDM；principle of minimum cross-entropy；entropy weighting technique；weight aggregation

0 引 言

多属性群决策(MAGDM)是群决策和多属性决策相交叉所形成的决策科学领域的热点问题,其理论和方法建立在行为科学、系统科学、管理科学、信息科学、人工智能以及社会学、心理学、经济学等学科领域基础上.MAGDM的目标在于基于不同决策者信息,对具有多属性的备选决策进行排序以作出最优选择[1].

MAGDM兴起于20世纪90年代末,很多学者从不同的角度对MAGDM问题进行了研究,但尚未形成理论体系.MAGDM所面对的问题往往是复杂的,决策准则、属性集合的选取、属性权重、专家权重的确定、不同形式的属性信息的集结、决策步骤等都会影响到决策的结果.王众托认为,多层次多目标多人决策问题是当前处理社会经济系统的规划与管理任务的有力工具,也是当今决策科学的热点课题[2].

如何综合每一位专家对不同属性的偏好信息是群体决策的重要前提[1-3],它通过使用适当的集成技术,将每一位专家对属性重要性的偏好融入到整个属性权重中.基于距离测度的决策方法在多属性群决策中得到广泛使用,许多学者对此进行了相关研究[1,3-18].该方法可以用于将可供选择方案与理

收稿日期: 2015-09-05；**修回日期:** 2016-01-18.

基金项目: 中央高校基本科研业务费优秀教师项目(2-9-2015-033).

作者简介: 何大义(1973−),男,副教授,博士,从事优化理论与方法、决策理论与方法等研究；陈小玲(1991−),女,硕士生,从事决策理论与方法、聚类分析的研究.

†通讯作者. E-mail: hedy@cugb.edu.cn

想结果进行比较,并将最接近理想结果的备选方案作为最优方案[6-8].在决策中经常使用的距离测度包括Hamming距离[3,7]、欧氏距离[8-10]、Minkowski距离[11]、有序加权距离测量[13-18]等.在过去的几十年里,出现了许多权重确定与集成方法.在这些方法中,有序加权平均算子(OWA)[19]、连续区间数据算子(COWA)[20]运用最为广泛,这一方法也吸引了越来越多学者的注意[21-27].徐泽水[25-26]提出了一种基于模糊语言评估的GIOWA算子和FIOWA算子的多属性群决策方法,极大地扩展了其应用范围.梁鑫等[27]基于H-OWA算子的优点和局限性,提出了基于三角模糊数的FH-OWA算子,并应用于模糊多属性决策中,得出FH-OWA算子在信息聚合时侧重所有决策者意见的"一致性",而不是个别专家的权威性的结论.

多属性群决策权重集成的前提是要先确定专家权重和指标权重,概括起来,可以分为四大类: 1)主观赋权法; 2)客观赋权法; 3)主客观综合赋权法; 4)交互式赋权法[36].主观赋权法能充分体现决策者的意见,但易受决策者经验、知识等因素的影响,造成决策的过程与结果具有较强的主观性[28-29];客观赋权法有较强的理论依据,但计算结果往往与实际相悖,且方法中多是基于一些数学模型的求解,计算量大,过程复杂,而且忽略了决策者主观意向的影响[29-30];主客观综合赋权方法是将决策的主观偏好与属性所包含的客观信息相结合的一种折衷处理方法,能够不同程度地反映主、客观因素对决策的影响,但决策结果往往依赖于主客观信息的集成方法,所以这一模式中集成方法的合理性争议较多[31-32];交互式赋权法在集成客观信息和决策者主观意见的过程中,通过不断地调整和修正来得到最佳协调权重,从而使决策更为科学合理,但该方法需要以合适的环境参数为前提[33].

多属性群决策问题在对属性赋权时,既要考虑属性本身的差异及重要性(即属性客观权重),同时又要考虑由于经验知识不同而对属性的不同认识(即主观权重),最终将主客观权重结合起来,达到主客观的统一.徐泽水等[34]提出了一种基于线性目标规划的组合赋权法.丁勇等[35]通过二元语义和基于最小偏差分布确定属性的主观权重和客观权重,进而集成主客观权重,为属性值和属性权重均为语言形式的多属性群决策问题提供了一种新的方法.针对权重信息未知或不全的多属性问题,郭凯红等[36]通过熵权法确定指标权重,利用证据距离合成决策者权重,进而运用模糊变换集成属性和决策者的客观权重,具有较强的客观性.而林晶等[29]针对属性值以不同的数据形式出现,通过改进直接模糊熵,进而与熵权法相结合的方法来确定属性的客观权重,最后与主观权重组合赋权并对方案进行排序.

综上,多属性群决策问题中主客观赋权法均有一定的局限性,而集成主客观权重的方法也不尽相同.本文提出一种基于最小叉熵的权重集成方法,从信息论角度,并参照决策论中通用做法,引入效用函数来反映决策者主观偏好;利用最小叉熵准则反映不同权重之间的差异(距离),建立权重集成模型;确定属性的客观权重和决策者的主观权重,并将主客观权重相融合,从而为MAGDM问题的权重集成提供一条新的途径.

1　理论基础与问题描述

1.1　熵权法与最小叉熵准则

熵权法是一种广泛应用于多属性决策和综合评价问题中的客观赋权方法,它根据各属性数据的变异程度,利用信息熵计算出各属性的权重,避免了主观因素的干扰,具有较强的客观性.假设在一个由m个方案n个属性所构成的多属性决策问题中,属性数据规范化处理后的矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中r_{ij}为属性$j\,(j=1,2,\cdots,n)$在方案$i\,(i=1,2,\cdots,m)$下的规范化处理后的属性值.

根据式(1),利用熵权法可以得到各属性权重为

$$\omega_j=\frac{1-E_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}(1-E_j)}.$$

其中

$$E_j=-\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m}\frac{r_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m}r_{ij}}\ln\frac{r_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m}r_{ij}},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

这里E_j为信息熵的扩展形式,显然有$0\leqslant\omega_j\leqslant 1$且$\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j=1$.

叉熵也称为相对熵、Kullback-Leibler散度或距离[37].若$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$和$\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$为同一事件集上的两个概率分布,则叉熵定义为

$$D(\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q})=\sum_{i=1}^{n}p_i\ln\frac{p_i}{q_i}. \tag{2}$$

叉熵反映了两个概率分布之间的"距离",但它

不满足距离测度的对称性和三角不等式的要求,所以常被看作是一种有方向性的距离.如式(2)反映的是概率分布$\boldsymbol{p}$到概率分布$\boldsymbol{q}$的距离.在式(2)中容易发现,当$p_i = q_i$时,有$D(\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}) = 0$,而且亦已证明当两个概率差异越大时,叉熵越大,所以有时叉熵也作为差异性的度量.在本文中也将叉熵看作为差异性的度量.

最小叉熵准则是基于距离或差异性最小化的概率分布估计方法.若给定某事件集上的先验概率分布$\boldsymbol{q}$,在其他相关信息的基础上(如数据的某些统计特征),根据最小叉熵准则确定概率分布$\boldsymbol{p}$,使其最为"接近"先验概率分布$\boldsymbol{q}$,则最小叉熵准则可描述为

$$\min\ D(\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{p_i}{q_i}.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1;\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i f_{ri} = a_r,\ r = 1,2,\cdots,k.\end{cases}$$

其中:f_{ri}为定义在事件集上的一些函数,a_r为定义在事件集上的某些信息特征.

1.2 MAGDM问题描述

本文将多属性群决策问题描述为一个四元组:$\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{X}\rangle$.其中:$\boldsymbol{A} = \{a_i|i = 1,2,\cdots,m\}$为方案集,且$m \geqslant 2$;$\boldsymbol{C} = \{c_j|j = 1,2,\cdots,n\}$为属性集,且$n \geqslant 2$,假设属性满足可加性;$\boldsymbol{D} = \{d_k|k = 1,2,\cdots,l\}$为决策者集($l \geqslant 2$).第$i$个方案第$j$个属性的值为$x_{ij}$(不失一般性,假设$x_{ij} \geqslant 0$,若不满足,则可采用适当的数据平移处理方法保证数据差异性不变),即

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

当只有一个决策者时,这是一个多属性决策问题,只需考虑不同属性的权重确定,然后使用加权求和、加权积法、TOPSIS等方法即可给出优选方案或方案排序.但当存在多个决策者的意见需要考虑时,这是多属性群决策问题:一方面必须考虑不同决策者重要性差异,另一方面还要考虑不同决策者对多属性决策问题的判断.

假设不同决策者对不同属性的重要性判断上存在差异,参照决策论的通用做法,引入决策者效用函数来反映这一差异.令第k个决策者的效用函数为$u_k(x)$,不失一般性,仍然假设$u_k(x) \geqslant 0$,则第k个决策者面临的决策问题为

$$\boldsymbol{U}_k = \begin{bmatrix} u_k(x_{11}) & \cdots & u_k(x_{1n})\\ u_k(x_{21}) & \cdots & u_k(x_{2n})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_k(x_{m1}) & \cdots & u_k(x_{mn})\end{bmatrix},\ k = 1,2,\cdots,l. \tag{4}$$

需要说明的是,这里采用了单变量的效用函数形式.事实上,如果要考虑不同属性间的相互影响,则可以采用多属性效用函数形式,但这并不影响后文的相关讨论,故简单起见,此处采用了单变量的效用函数.

假设第k个决策者对属性权重的判断为$\boldsymbol{\beta}^k = (\beta_1^k,\beta_2^k,\cdots,\beta_n^k)$,这样,对于第$k$个决策者而言,对方案$a_i$的评价结果为$v_i^k$,即

$$v_i^k = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^k u_k(x_{ij}),\ i = 1,2,\cdots,m. \tag{5}$$

进一步假设决策者权重为$\boldsymbol{w} = (w_1,w_2,\cdots,w_l)$,于是决策群对方案$a_i$的综合评价结果$s_i$为

$$s_i = \sum_{k=1}^{l} w_k v_i^k,\ i = 1,2,\cdots,m. \tag{6}$$

根据s_i即可给出方案排序或最优方案.事实上,将式(5)代入(6),可以得到

$$s_i = \sum_{k=1}^{l} w_k \sum_{j=1}^{n} \beta_j^k u_k(x_{ij}) = F(\boldsymbol{w}\circ\boldsymbol{\beta})\circ G(\boldsymbol{X}). \tag{7}$$

由此可见,MAGDM问题的本质在于如何对决策者权重与属性权重进行合成,以及合成后权重与属性值的综合计算.

2 基于最小叉熵的权重集成方法

在MAGDM问题中,客观、全面地确定专家权重和指标权重,并科学地进行权重集成是有效求解MAGDM问题的关键.本文将重点讨论在属性权重未知的情况下权重集成的方法,该方法的基本思路如图1所示.

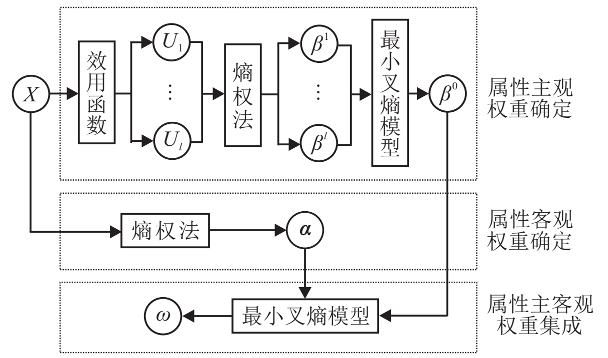

图1 权重集成思路

在MAGDM问题中,属性权重一方面因属性值的差异而存在不同,这种差异是客观存在的,故称其

为属性的客观权重;另一方面,属性权重也因决策者的判断差异而有所不同,这一差异与决策者的经验、知识等主观认识相关,故称其为属性的主观权重.在图1中,属性权重集成的最终结果为$\boldsymbol{\omega}$,是主客观权重相结合的计算结果.在属性主观权重确定方面,首先根据标准化处理后的原始数据$\boldsymbol{X}$,引入不同决策者的效用函数$u_k(x)$,将$\boldsymbol{X}$转化为因决策者主观认识不同而存在差异的效用值矩阵$\boldsymbol{U}_k$;然后,利用熵权法在不同的$\boldsymbol{U}_k$基础上得到不同决策者对属性权重的判断;最后,为了综合所有决策者对属性权重的判断,基于距离最小的思路构建最小叉熵模型,得到综合了所有决策者意见的属性主观权重$\boldsymbol{\beta}^0$.在属性客观权重确定方面,以属性原始数据$\boldsymbol{X}$为基础,利用熵权法得到其客观权重为$\boldsymbol{\alpha}$.最后,再次利用最小叉熵模型合成属性的主观权重和客观权重,得到主客观相结合的属性权重$\boldsymbol{\omega}$.

多属性群决策结果依赖于权重的确定与集成方法,由于主客观权重相结合的集成方法能够同时兼顾决策问题的主客观信息而得到了普遍认可.但是,现有的权重确定与集成方法都或多或少地添加了额外的信息,这种额外信息的添加无疑会影响到决策的结果,而且目前较多的争议也是针对这种添加信息的合理性.而信息熵方法可以有效地避免这一不足.在权重确定方面使用了熵权法,其本质是最大熵原理,即在无额外信息的基础上仅依据数据本身的差异性来反映权重.在权重集成方法方面,由于概率的归一性的特征,单纯依据现有距离的计算方法(如欧氏距离)确定集成权重时存在不足.叉熵是反映概率分布之间距离或差异性公认的有效方法,而最小叉熵模型同样可以避免人为添加额外信息的影响,所以利用最小叉熵方法进行权重集成更具有合理性.

2.1　属性客观权重的确定

属性的客观权重依赖于属性数据本身的差异,不因决策者的不同而变化.根据式(3)所给出的属性值矩阵,从客观性要求出发,利用熵权法得到属性的客观权重向量,令其为$\boldsymbol{\alpha}$,即

$$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n). \tag{8}$$

其中

$$\alpha_j=\frac{1-E_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}(1-E_j)},$$

$$E_j=-\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}}\ln\frac{x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}},$$

$$j=1,2,\cdots,n.$$

2.2　属性主观权重的确定

基于每个决策者对不同属性重要性认识的差异,可以根据式(4)利用熵权法得到另一权重向量,令其为第k个决策者的属性主观权重,即

$$\boldsymbol{\beta}^k=(\beta_1^k,\beta_2^k,\cdots,\beta_n^k), \tag{9}$$

这样,所有决策者的属性主观权重向量可构成一个权重矩阵,即

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1\\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_1^l & \beta_2^l & \cdots & \beta_n^l\end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中

$$\beta_j^k=\frac{1-E_j^k}{\sum\limits_{j=1}^{n}(1-E_j^k)},$$

$$E_j^k=-\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_k(x_{ij})}{\sum\limits_{i=1}^{m}u_k(x_{ij})}\ln\frac{u_k(x_{ij})}{\sum\limits_{i=1}^{m}u_k(x_{ij})},$$

$$j=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,l.$$

2.3　属性主客观权重的集成

为综合所有决策者对属性权重的判断,假设决策者主观权重合成结果为$\boldsymbol{\beta}^0=(\beta_1^0,\beta_2^0,\cdot,\beta_n^0)$,主客观权重合成结果为$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$,且它们均满足权重的规范性要求.

在合成决策者权重时,一方面要考虑决策者自身的权重,另一方面希望尽量充分考虑到所有决策者的意见,基于此,利用最小叉熵准则建立如下优化模型以合成决策者权重:

$$\min\ D=\sum_{k=1}^{l}w_kD_k(\boldsymbol{\beta}^0,\boldsymbol{\beta}^k); \tag{11}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\beta_j^0=1,\ \beta_j^0\geqslant 0. \tag{12}$$

其中: $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_l)$为决策者权重,且

$$D_k(\boldsymbol{\beta}^0,\boldsymbol{\beta}^k)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j^0\ln\frac{\beta_j^0}{\beta_j^k}, \tag{13}$$

即Kullback-Leibler距离(叉熵).为了求解模型(11)和(12),构造Lagrange函数如下:

$$L(\boldsymbol{\beta}^0,\lambda)=\sum_{k=1}^{l}w_k\sum_{j=1}^{n}\beta_j^0\ln\frac{\beta_j^0}{\beta_j^k}+(\lambda-1)\Big(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^0-1\Big), \tag{14}$$

其中$(\lambda-1)$为拉格朗日乘子.分别对$\beta_j^0\,(j=1,2,$

$\cdots,n)$和λ求偏导,得到如下方程组:

$$L_{\beta_j^0}=\frac{\partial L}{\partial \beta_j^0}=\sum_{k=1}^{l}w_k\Big(1+\ln\frac{\beta_j^0}{\beta_j^k}\Big)+(\lambda-1)=\sum_{k=1}^{l}w_k\ln\frac{\beta_j^0}{\beta_j^k}+\lambda=0, \tag{15}$$

$$L_\lambda=\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j^0-1=0. \tag{16}$$

由式(15)可得

$$\beta_j^0=\exp\Big(\sum_{k=1}^{l}w_k\ln\beta_j^k-\lambda\Big), \tag{17}$$

将其代入归一化条件可得

$$\sum_{j=1}^{n}\exp\Big(\sum_{k=1}^{l}w_k\ln\beta_j^k-\lambda\Big)=1,$$

即

$$\lambda=\ln\Big[\sum_{j=1}^{n}\exp\Big(\sum_{k=1}^{l}w_k\ln\beta_{kj}\Big)\Big]. \tag{18}$$

将式(18)代入(17),最终得到

$$\beta_j^0=\frac{\exp\Big(\sum_{k=1}^{l}w_k\ln\beta_j^k\Big)}{\sum_{j=1}^{n}\exp\Big(\sum_{k=1}^{l}w_k\ln\beta_j^k\Big)},\ j=1,2,\cdots,n. \tag{19}$$

所以,模型(11)和(12)存在最优解.

需要说明的是,在这一最小叉熵模型中假设决策者权重$\boldsymbol{w}$是已知的.事实上,如果决策者权重未知,则需将模型中的目标函数(11)改写成

$$\min\ D=\sum_{k=1}^{l}D_k(\boldsymbol{\beta}^0,\boldsymbol{\beta}^k), \tag{20}$$

也可根据前述方法得到主观权重集成结果$\boldsymbol{\beta}^0$,即

$$\beta_j^0=\frac{\exp\Big(\sum_{k=1}^{l}\ln\beta_j^k\Big)}{\sum_{j=1}^{n}\exp\Big(\sum_{k=1}^{l}\ln\beta_j^k\Big)}=\frac{\prod_{k=1}^{l}\beta_j^k}{\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{l}\beta_j^k}.$$

而且,在求得$\boldsymbol{\beta}^0$后,可计算得到$D_k(\boldsymbol{\beta}^k,\boldsymbol{\beta}^0)$,如果$D_k$越小,则说明第$k$个决策者的判断越接近“共同知识”,该决策者的信息越为重要,其权重应越大.这样,也可以计算得到决策者的权重(当然这已偏离了本文的研究主题,这里只是提供一种决策者权重确定的思路,仅供参考).

总之,在得到决策者主观权重合成结果$\boldsymbol{\beta}^0$后,需要进一步集成属性的客观权重$\boldsymbol{\alpha}$.再次利用最小叉熵准则建立优化模型,可以求得权重分配使其与主客观权重的距离最小.如果主客观权重分配为γ和$(1-\gamma)$,则有

$$\min\ \gamma D(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\beta}^0)+(1-\gamma)D(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha}); \tag{21}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\omega_j=1,\ \omega_j\geqslant 0. \tag{22}$$

这与前述模型类似,可以得到此问题的最优解为

$$\omega_j=\frac{\exp[\gamma\ln\beta_j^0+(1-\gamma)\ln\alpha_j]}{\sum_{j=1}^{n}\exp[\gamma\ln\beta_j^0+(1-\gamma)\ln\alpha_j]}. \tag{23}$$

至此,确定了MAGDM问题中属性主客观相结合的权重,再结合式(3)给出的属性数据,利用加权求和、TOPSIS等方法即可得到方案的最终排序,作出决策.

3 算例分析

某公司董事会由5人组成$d_k(k=1,2,\cdots,5)$,现有4个投资项目$a_i(i=1,2,3,4)$可供选择.制订了4项评估指标:c_1为技术可行性,c_2为投资收益率,c_3为市场前景预期,c_4为安全系数.属性权重信息未知.经咨询相关专业机构后得到如表1所示的属性数据(均百分制).

表1 算例原始数据

项目	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	85	88	90	85
a_2	74	78	85	75
a_3	70	65	65	70
a_4	65	60	50	68

容易发现,这是一个特殊的MAGDM问题,以现有数据容易得到4个项目的排序结果应为$a_1\succ a_2\succ a_3\succ a_4$.下面利用本文所提出的方法求解这一问题,一方面说明该方法的基本过程,另一方面验证本文方法的可行性.

在这一MAGDM问题中,决策者权重和属性权重均未知.依据本文方法,首先利用熵权法得到属性的客观权重为

$$\boldsymbol{\alpha}=(0.109\,2,0.250\,3,0.556\,1,0.084\,5).$$

假设$u_1(x)=x,u_2(x)=x^2,u_3(x)=\sqrt{x},u_4(x)=\ln x,u_5(x)=\mathrm{e}^x$,根据利用效用函数转换后的数据得到的决策者属性权重矩阵为

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0.109\,2&0.250\,3&0.556\,1&0.084\,5\\0.11\,86&0.263\,0&0.525\,9&0.092\,5\\0.105\,3&0.244\,5&0.569\,1&0.081\,1\\0.100\,3&0.237\,3&0.586\,2&0.076\,3\\0.251\,8&0.251\,8&0.244\,6&0.251\,8\end{bmatrix},$$

进而,利用最小叉熵模型可以得到决策者属性权重合

成结果为

$$\beta^0 = (0.134\,1, 0.261\,0, 0.496\,0, 0.108\,9),$$

此为决策者权重未知时的结果. 如果决策者权重已知, 如 $\boldsymbol{w} = (0.3, 0.4, 0.1, 0.1, 0.1)$, 则得到的决策者属性权重合成结果为

$$\beta^0 = (0.124\,2, 0.259\,8, 0.517\,3, 0.098\,7).$$

进一步假设 $\gamma = 0.3$, 得到主客合成的属性权重结果为: 决策者权重未知时, 有

$$\omega = (0.116\,4, 0.254\,0, 0.538\,4, 0.091\,3);$$

决策者权重已知时, 有

$$\omega = (0.113\,6, 0.253\,3, 0.544\,5, 0.088\,6).$$

根据属性权重合成结果, 利用加权和的方式得到4个项目的得分如表2所示.

表 2 算例计算结

项目	决策者权重未知	决策者权重已知
a_1	88.45	88.48
a_2	81.03	81.09
a_3	66.04	66.01
a_4	55.39	55.83

由表2可以得到最终4个项目的排序为 $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4$, 这与前述的直觉判断是一致的, 从而验证了本文方法的可行性和合理性.

4 结 论

多属性群决策问题是决策科学领域的热点研究问题, 其中属性权重的确定与集成是其重要的研究内容. 本文针对属性权重和专家权重未知的情况, 利用熵权法确定属性的客观权重, 再利用决策者的效用函数反映其对不同属性值的判断, 进而依据熵权法确定不同决策者的属性主观权重; 然后利用最小叉熵准则, 基于距离最小化, 构建了属性主观权重集成的优化模型与主客观权重集成的优化模型, 并通过算例验证了这一方法的可行性和合理性. 该方法为这一类多属性群决策问题的权重集成提供了一种新的思路.

参考文献(References)

[1] Zhou L G, Chen H Y, Liu J P. Continuous ordered weighted distance measure and its application to multiple attribute group decision making[J]. Group Decision and Negotiation, 2013, 22(2): 739-758.

[2] 熊欣. 基于模糊逻辑的金融风险投资决策分析[D]. 长沙：中南大学公共管理学院, 2009.
(Xiong X. Analysis of the financial risk investment decision based on fuzzy logic[D]. Changsha: School of Public Administration, Central South University, 2009.)

[3] Sengupta A, Pal T K. Fuzzy preference ordering of interval numbers in decision problems[M]. Heidelberg: Springer, 2009: 140-143.

[4] Hamming R W. Error-detecting and error-correcting codes[J]. Bell System Technical Journal, 1950, 29(2): 147-160.

[5] Karayiannis N B. Soft learning vector quantization and clustering algorithms based on ordered weighted aggregation operators[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2000, 11(5): 1093-1105.

[6] Kaufmann A. Introduction to the theory of fuzzy subsets[M]. New York: Academic Press, 1975: 247-255.

[7] Merigó J M, Casanovas M. Decision making with distance measures and linguistic aggregation operators[J]. Int J of Fuzzy Systems, 2010, 12(3): 190-198.

[8] Merigó J M, Casanovas M. Induced aggregation operators in the Euclidean distance and its application in financial decision making[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(6): 7603-7608.

[9] Merigó J M, Casanovas M. Decision-making with distance measures and induced aggregation operators[J]. Computers & Industrial Engineering, 2011, 60(1): 66-76.

[10] Merigó J M, Gil-Lafuente A M. On the use of the OWA operator in the Euclidean distance[J]. Int J of Computer Science and Engineering, 2008, 2(4): 170-176.

[11] Merigó J M, Gil-Lafuente A M. Using the OWA operator in the Minkowski distance[J]. Int Scholarly and Scientific Research & Innovation, 2008, 2(9): 616-624.

[12] Merigó J M, Gil-Lafuente A M. OWA operators in generalized distances[J]. Int Scholarly and Scientific Research & Innovation, 2009, 3(9): 822-829.

[13] Szmidt E, Kacprzyk J. Distances between intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(3): 505-518.

[14] Xu Z S. Dependent uncertain ordered weighted aggregation operators[J]. Information Fusion, 2008, 9(2): 310-316.

[15] Xu Z S. A method based on distance measure for interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making[J]. Information Sciences, 2010, 180(1): 181-190.

[16] Xu Z S, Chen J. Ordered weighted distance measure[J]. J of Systems Science and Systems Engineering, 2008, 17(4): 432-445.

[17] Xu Z S, Chen J. An overview of distance and similarity measures of intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008, 16(4): 529-555.

[18] Yue Z L. Deriving decision makers weights based on distance measure for interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(9): 11665-11670.

[19] Yager R R. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making[J]. IEEE

Trans on Systems, Man and Cybernetics B, 2004, 34(5): 1952-1963.

[20] 陈华友,刘金培,王慧. 一类连续区间数据的有序加权调和(C-OWH)平均算子及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(7): 86-92.
(Chen H Y, Liu J P, Wang H. A class of continuous ordered weighted harmonic(C-OWH) averaging operators for interval argument and its applications[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 28(7): 86-92.)

[21] Chen H Y, Zhou L G. An approach to group decision making with interval fuzzy preference relations based on induced generalized continuous ordered weighted averaging operator[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(10): 13432-13440.

[22] Chen H Y, Zhou L G. A relative entropy approach to group decision making with interval reciprocal relations based on COWA operator[J]. Group Decision and Negotiation, 2012, 21(4): 585-599.

[23] Yager R R, Xu Z S. The continuous ordered weighted geometric operator and its application to decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(10): 1393-1402.

[24] Zhou L G, Chen H Y. Continuous generalized OWA operator and its application to decision making[J]. Fuzzy Sets Systems, 2011, 168(1): 18-34.

[25] 徐泽水. 基于模糊语言评估和GIOWA算子的多属性群决策方法[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(2): 218-224.
(Xu Z S. Method based on fuzzy linguistic assessments and GIOWA operator in multi-attribute group decision-making[J]. J of Systems Science and Mathematical Sciences, 2004, 24(2): 218-224.)

[26] 徐泽水, 吴岱. 基于模糊语言判断矩阵和FIOWA算子的有限方案决策法[J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(1): 76-80.
(Xu Z S, Wu D. Method based on fuzzy linguistic judgement matrix and fuzzy induced ordered weighted averaging(FIOWA) operator for decision-making problems with a limited set of alternatives[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2004, 18(1): 76-80.)

[27] 梁鑫, 裴道武. FH-OWA算子及其在模糊多属性决策中的应用[J]. 计算机科学与探索, 2015, 9(6): 734-736.
(Liang X, Pei D W. FH-OWA operator and its application in fuzzy multiple attribute decision making[J]. J of Frontiers of Computer Science and Technology, 2015, 9(6): 734-736.)

[28] 慈铁军, 刘晓瑜. 基于决策者偏好的区间数多属性决策属性值规范化方法[J]. 统计与决策, 2015(3): 36-38.
(Chi T J, Liu X Y. Normalization method based on decision-maker preference with interval numbers[J]. Statistics and Decisions, 2015(3): 36-38.)

[29] 林晶, 王健. 基于改进直觉模糊熵的混合多属性决策方法研究[J]. 管理现代化, 2014, 34(6): 114-116.
(Lin J, Wang J. Method of multiple attribute decision-making based improved institutive fuzzy entropy[J]. Modernization of Management, 2014, 34(6): 114-116.)

[30] 张荣, 刘思峰. 一种基于判断矩阵信息的多属性群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(2): 373-375.
(Zhang R, Liu S F. Multi-attribute group decision-making method based on the information of judgement matrixes[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(2): 373-375.)

[31] 陈晓红, 杨志慧. 基于改进模糊综合评价法的信用评估体系研究——以我国中小上市公司为样本的实证研究[J]. 中国管理科学, 2015, 23(1): 36-38.
(Chen X H, Yang Z H. The study of credit evaluation system based on improved fuzzy evaluation method — Evidence from small and medium-sized enterprises in China[J]. Chinese J of Management Science, 2015, 23(1): 36-38.)

[32] 许叶军, 达庆利. 基于理想点的多属性决策主客观赋权法[J]. 工业工程与管理, 2005, 10(4): 45-47.
(Xu Y J, Da Q L. An objective and subjective synthetic approach to determine weights based on ideal-solution for multi-attribute decision making[J]. Industrial Engineering and Management, 2005, 10(4): 45-47.)

[33] 许叶军. 基于BP神经网络的交互式赋权法及应用研究[D]. 南京:东南大学经济管理学院, 2005.
(Xu Y J. Research on Interactive determining weights based on BP neural network and its application [D]. Nanjing: School of Economics and Management, Southeast University, 2005.)

[34] 徐泽水, 达庆利. 多属性决策的组合赋权方法研究[J]. 中国管理科学, 2002, 10(2): 84-86.
(Xu Z S, Da Q L. Study on method of combining weighting[J]. Chinese J of Management Science, 2002, 10(2): 84-86.)

[35] 丁勇, 梁昌勇, 朱俊红, 等. 群决策中基于二元语义的主客观权重集成方法[J]. 中国管理科学, 2010, 18(5): 165-170.
(Ding Y, Liang C Y, Zhu J H, et al. A subjective and objective weights integrated method based on 2-tuple linguistic for group decision making[J]. Chinese J of Management Science, 2010, 18(5): 165-170.)

[36] 郭凯红, 李文立. 权重信息未知情况下的多属性群决策方法及其拓展[J]. 中国管理科学, 2011, 19(5): 94-103.
(Guo K H, Li W L. A method for multiple attribute group decision making with complete unknown weight information and its extension[J]. Chinese J of Management Science, 2011, 19(5): 94-103.)

[37] Kullback S, Leibler R A. On information and sufficiency[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1951, 22(1): 79-86.

（责任编辑：李君玲）