

# 有序势博弈及其在智能体无线网络中的应用

于永渊, 冯俊娥<sup>†</sup>, 潘金凤

(山东大学 数学学院, 济南 250100)

**摘 要:** 有序势博弈具有广泛的应用, 势有向图中不含单向圈是判定有序势博弈的一个充分必要条件. 利用矩阵半张量积和置换矩阵, 通过博弈的支付矩阵求取势有向图的邻接矩阵. 通过收缩势有向图中的双向圈, 将单向圈的存在性问题转化为判断收缩后的图中圈的存在性问题. 此外, 分析有序势函数的一些基本性质, 并给出有序势函数的具体计算方法. 最后结合线性规划讨论了有序势博弈在延长智能体无线网络系统寿命的应用.

**关键词:** 有序势博弈; 半张量积; 邻接矩阵; 有序势函数; 无线网络

**中图分类号:** TP273      **文献标志码:** A

## Ordinal potential game and its application in agent wireless networks

YU Yong-yuan, FENG Jun-e<sup>†</sup>, PAN Jin-feng

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China)

**Abstract:** The ordinal potential game has a large number of applications. It is proved that a finite game is ordinal potential game if and only if its potential directed graph(PDG) contains no unidirectional circle. The adjacency matrix of PDG is obtained by the payoff matrix. By Reducing connected bidirectional circles into a node, the problem of judging the existence of unidirectional circles is converted, into testifying the existence of cycles in the reduced graph. Furthermore, some properties of ordinal potential function(OPF) and its calculating method are presented. Finally, combined with linear programming, the application of ordinal potential game in prolonging the lifetime of agent wireless networks is studied.

**Keywords:** ordinal potential game; semi-tensor product; adjacency matrix; ordinal potential function; wireless networks

## 0 引 言

Rosenthal<sup>[1]</sup> 在研究拥塞博弈时首次提出势博弈的概念. Monderer 等<sup>[2]</sup> 首次系统地研究了势博弈, 同时给出几个广义势博弈的概念, 包括加权势博弈、有序势博弈、广义有序势博弈、优选势博弈, 其中势博弈、有序势博弈在社会经济、分布式优化<sup>[3]</sup>、无线传感网络<sup>[4]</sup> 都有广泛应用. 文献[2]得到了一个较好的势博弈判据, 即在每一个步长为4的简单圈 $\gamma$ 上,  $I(\gamma, u) = 0$ . 由于需要找到所有的4圈, 该简洁的结果背后蕴含很大的计算量. Norde 等<sup>[5]</sup> 研究了更为广义的有序势概念, 将势函数、支付函数抽象成二元关系进行考虑. Cheng<sup>[6]</sup> 基于其原创的矩阵半张量积理论, 首次给出了计算势函数和判断势博弈的方法. 同年, Cheng 等<sup>[7]</sup> 进一步给出了加权势博弈的相关结果以及在多智能体控制方面的具体应用.

有序势博弈是比势博弈更为广义的概念, 相比势

博弈, 有序势博弈也具有的性质. 例如, 有序势函数的最值点便是博弈的纯纳什均衡点<sup>[2]</sup>. Voorneveld 等<sup>[8]</sup> 给出了有序势博弈的判据, 一个可数的博弈是有序势博弈当且仅当策略空间中不含弱升圈. Tang 等<sup>[9]</sup> 在研究二人严格博弈时证明了二人严格博弈优选等价于一个伪超模博弈, 当且仅当其优选等价于一个有序势博弈. 本文从文献[8]的结果出发, 将策略空间中的策略定义为节点, 根据有序势博弈定义中的比较关系定义边集, 进而将判定有序势博弈的问题转化到势有向图上考虑, 从而证明了一个博弈为有序势博弈的充要条件是该博弈的势有向图中不含单向圈.

直观上讲, 有序势博弈对于策略改变引起的收益增减可以在某种意义下实现统一, 这种统一便是所谓的有序势函数. 即使一个博弈是势博弈, 势函数也只是在相差一个常数的意义下唯一, 即势函数并不唯一, 那么有序势函数也不会是唯一的. 本文的思路是

收稿日期: 2016-02-21; 修回日期: 2016-07-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374025).

作者简介: 于永渊(1992—), 男, 博士生, 从事布尔网络、博弈论的研究; 冯俊娥(1971—), 女, 教授, 博士生导师, 从事奇异系统、逻辑网络等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: fengjune@sdu.edu.cn

对策略空间中的策略进行赋值,一方面,如果赋值能够满足有序势博弈定义中的要求,则可以得到一个有序势函数,即博弈是有序势博弈;另一方面,如果赋值过程中出现逻辑错误,无法完成赋值,则博弈必然不是有序势博弈.事实上,  $a > b > c > d > a$  是唯一的一种逻辑错误,此时无法找到满足条件的  $a, b, c, d$ ,也就无法完成赋值.

在无线网络中,为各个节点供电的电池在理论分析中容易被忽视,但在工程实际中非常重要.电量合理分配可以使系统运行尽量长的时间,如果一个节点电量耗尽,则即使其他节点仍有大量电量,也会对系统的连通性造成破坏.一个合理的想法是,切换系统的拓扑,在不同阶段使用不同的连通方式,使各个节点的电量“此消彼长,此起彼伏”,最终实现电量最大程度的利用.

本文首先给出必需的基本概念和相关结论,主要包括势博弈、有序势博弈、代数图论和矩阵半张量积;然后将判定一个博弈是否为有序势博弈的问题转化到图上,建立势有向图,利用矩阵半张量积和置换矩阵,分步计算出势有向图的邻接矩阵;接着分两种情形处理势有向图中的圈,给出判断一个博弈是否为有序势博弈的具体算法,并分析有序势函数结构向量的一些性质;最后结合线性规划讨论了有序势博弈在延长智能体无线网络系统寿命的应用.

### 1 预备知识

#### 1.1 符号含义

1) 矩阵  $B \in R^{n \times m}$ ,  $B = \{b_{ij}\}_{nm}$ , 记  $\text{sgn}B = \{\text{sgn}(b_{ij})\}_{nm}$ ,  $\text{abs}B = \{\text{abs}(b_{ij})\}_{nm}$ ,  $\text{sgn}$ 、 $\text{abs}$  分别表示符号函数和取绝对值.  $[B]_{ij}$  表示矩阵  $B$  第  $i$  行第  $j$  列位置的元素,  $B \succeq 0$  表示  $B$  的任意元素  $b_{ij} \geq 0$ .

2) 矩阵  $A \in R^{n \times nq}$ ,  $A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_q)$ , 其中矩阵  $A_i \in R^{n \times n}$ . 记

$$\text{diag}_n(A) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_q \end{bmatrix} \in R^{nq \times nq}.$$

3) 当  $B$  是  $n \times n$  方阵时,  $\text{tr}(B) = \sum_{i=1}^n [B]_{ii}$  为矩阵  $B$  的迹.  $\text{diag}_o(B)$  表示将矩阵  $B$  的对角元素变为 0 后得到的矩阵, 有

$$[\text{diag}_o(B)]_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j; \\ [B]_{ij}, & i \neq j. \end{cases}$$

4) 矩阵  $C \in R^{mp \times nq}$ , 记  $C^{T(p \times q)}$  为  $C$  的  $p \times q$  块

转置<sup>[10-11]</sup>, 即将  $C$  中  $p \times q$  大小的子矩阵看作整体取转置.

5)  $\odot$  表示 Hadamard 积<sup>[11]</sup>.

6)  $|S|$  表示集合  $S$  的势, 即集合  $S$  中元素的个数.

7)  $\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times n}^T$  表示元素全为 1 的  $n$  维列向量,  $\mathbf{1}_{m \times n}$  表示元素全为 1 的  $m \times n$  矩阵.

8)  $\delta_n^i$  表示  $n$  阶单位矩阵的第  $i$  列,  $\delta_n^0$  为零向量,  $E_{ij}^n$  为第  $i$  行第  $j$  列位置为 1、其他位置为 0 的  $n \times n$  阶矩阵.

9) 设  $\mathcal{D} = \{1, 0\}$ ,  $\mathcal{D}_k = \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $k \geq 2$ ,  $\Delta_k = \{\delta_k^i | i = 1, 2, \dots, k\}$ .

10) 设  $A, B \in \mathcal{D}^{n \times n}$ ,  $A$  与  $B$  中的元素只有 0 和 1.  $a \vee b = \max\{a, b\}$ ,  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ .  $A \diamond B$  表示  $A$  和  $B$  在布尔运算下的矩阵乘法.  $A^{(m)}$  表示  $A$  在布尔运算下的矩阵  $m$  次幂, 运算时加法是  $\vee$ , 乘法是  $\wedge$ .

11)  $A_1, A_2 \in \mathcal{D}^{n \times n}$ ,  $A_i = (a_{uv}^{(i)})_{n \times n}$ ,  $i = 1, 2$ .  $A_1 \ominus A_2 = (a_{uv}^{(1)} \ominus a_{uv}^{(2)})_{n \times n} = (\alpha_{uv})_{n \times n}$ , 其中

$$\alpha_{uv} = \begin{cases} 0, & a_{uv}^{(1)} < a_{uv}^{(2)}; \\ a_{uv}^{(1)} - a_{uv}^{(2)}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

12) 如果一个矩阵  $L \in R^{m \times n}$  的每一列都是  $\delta_m^i$  的形式, 则称  $L$  为逻辑矩阵. 将所有的  $m \times n$  阶逻辑矩阵构成的集合记为  $\mathcal{L}^{m \times n}$ .  $\delta_m[i_1, i_2, \dots, i_n]$  表示一个逻辑矩阵, 其第  $j$  列为  $\delta_m^{i_j}$ .

13) 设  $(V, E)$  是图,  $x \in V$  是节点,  $N_r(x)$  表示在图  $(V, E)$  中能到达节点  $x$  的路径数.

#### 1.2 势博弈和有序势博弈

博弈是一个三元组  $G = (N, S, U)$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  为玩家集,  $S = \prod_{i=1}^n S_i$ . 其中:  $S_i$  为玩家  $i$  的策略集,  $S_i = \{s_i^1, \dots, s_i^{m_i}\}$ ,  $|S_i| = m_i$ ,  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  为支付函数,  $u_i: S \rightarrow R$ .

定义 1<sup>[2]</sup> 对于博弈  $G$ , 如果存在函数  $P: S \rightarrow R$ , 对于  $\forall i \in N, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s'_i, s''_i \in S_i$ , 有

$$\begin{aligned} & u_i(s'_i, s_{-i}) - u_i(s''_i, s_{-i}) = \\ & P(s'_i, s_{-i}) - P(s''_i, s_{-i}), \end{aligned}$$

其中  $S_{-i} = \prod_{j \neq i}^n S_j$ , 则称该博弈为势博弈, 称满足该条件的函数  $P$  为势函数.

如果对于  $\forall i \in N, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s'_i, s''_i \in S_i$ , 存在函数  $P: S \rightarrow R$  满足

$$\begin{aligned} & u_i(s'_i, s_{-i}) - u_i(s''_i, s_{-i}) \leq 0 \Leftrightarrow \\ & P(s'_i, s_{-i}) - P(s''_i, s_{-i}) \leq 0, \end{aligned}$$

则称该博弈为有序势博弈, 称满足该条件的函数  $P$  为

有序势函数.

序列  $\gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  称为策略空间  $S$  中的一个路径, 如果  $x_i \in S, i = 1, 2, \dots, m$ , 且满足  $\forall k \geq 1$ , 则  $x_k$  与  $x_{k+1}$  仅在一个位置  $i(k)$  不同. 更确切地说, 如果设  $x_k = (s_1^k, s_2^k, \dots, s_n^k)^T, x_{k+1} = (s_1^{k+1}, s_2^{k+1}, \dots, s_n^{k+1})^T$ , 其中  $s_i^k, s_i^{k+1} \in S_i$ , 则当  $i \neq i(k)$  时,  $s_i^k = s_i^{k+1}$ , 当  $i = i(k)$  时,  $s_i^k \neq s_i^{k+1}$ . 若  $\forall x_k \in \gamma, u_{i(k)}(x_k) \leq u_{i(k)}(x_{k+1})$ , 则称路径  $\gamma$  是非退化的<sup>[8]</sup>.

**定义2**<sup>[8]</sup> 如果策略空间  $S$  中的有限路径  $\gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  满足: 1)  $x_1 = x_m$ ; 2)  $\gamma$  非退化; 3) 存在  $k$  使得  $u_{i(k)}(x_k) < u_{i(k)}(x_{k+1})$ . 则称路径  $\gamma$  为  $S$  的一个弱升圈.

**引理1**<sup>[2]</sup> 一个博弈  $G = (N, S, U)$ , 如果  $S$  可数, 则博弈  $G$  是有序势的, 当且仅当  $S$  中不含弱升圈.

### 1.3 代数图论

图是一种直观的数学工具, 其实质是一种二元关系. 图由两部分组成, 点集和边集, 分别记为  $V, E, E \subseteq V \times V$ . 如果  $(i, j) \in E$ , 一定有  $(j, i) \in E$ , 则图  $(V, E)$  称为无向图; 如果存在  $(i, j)$  和  $(j, i)$  不同时属于  $E$ , 则图  $(V, E)$  称为有向图. 令  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ , 图  $(V', E')$  称为图  $(V, E)$  的子图. 特别地, 如果  $E' = (V' \times V') \cap E$ , 则图  $(V', E')$  称为图  $(V, E)$  限制在  $V'$  上的子图.

在有向图  $(V, E)$  中, 假设  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是节点集, 如果  $(v_i, v_{i+1}) \in E, i = 1, 2, \dots, k-1$ , 且  $v_k = v_1$ , 则称  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$  是  $(V, E)$  中的  $(k-1)$  圈.

**定义3**  $(V, E)$  是有向图, 单向圈  $\{v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_k}\}$  表示  $\{v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_k}\}$  是  $(V, E)$  中的圈, 但  $\{v_{l_k}, v_{l_{k-1}}, \dots, v_{l_1}\}$  不是  $(V, E)$  中的圈. 如果  $\{v_{l_k}, v_{l_{k-1}}, \dots, v_{l_1}\}$  也是  $(V, E)$  中的圈, 则称为双向圈.

通过图1表明上述定义. 如图1所示,  $\{x_1, x_2, x_5, x_4, x_1\}$  是双向圈,  $\{x_1, x_4, x_5, x_6, x_3, x_2, x_1\}$  和  $\{x_5, x_6, x_3, x_5\}$  是单向圈.

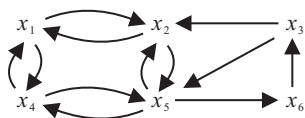


图1 单向圈与双向圈

**注1** 单向圈的长度一定是不少于3的, 2圈是双向圈.

**定义4**<sup>[12]</sup> 设  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是有向图  $(V, E)$  的边集, 令  $a_{ij}$  为节点  $v_i$  到节点  $v_j$  边的条数, 称  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为该有向图的邻接矩阵. 令

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

称  $H = (h_{ij})_{n \times n}$  为该图的可达矩阵.

**引理2**<sup>[12]</sup> 设  $A$  是有向图  $(V, E)$  的邻接矩阵,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 则  $[A^k]_{ij}$  为  $V$  中节点  $v_i$  到达节点  $v_j$  长度为  $k$  的路径数.

### 1.4 矩阵半张量积

矩阵半张量积由程代展等<sup>[10-11]</sup> 提出, 是普通矩阵乘法的推广. 经过最近几年的发展, 矩阵半张量积已形成完备的理论体系, 对于处理高维数据有独到之处.

**定义5**<sup>[11]</sup> 矩阵  $M \in R^{m \times n}$ , 矩阵  $N \in R^{p \times q}, t$  是  $n, p$  的最小公倍数,  $M, N$  的半张量积定义为

$$M \ltimes N = (M \otimes I_{t/n})(N \otimes I_{t/p}) \in R^{mt/n \times qt/p}.$$

注意到, 当  $n = p$  时,  $M \ltimes N = MN$ , 即半张量积实际上是普通矩阵乘法的推广, 而且半张量积运算保持了普通矩阵乘法的几乎全部性质.

**定义6**<sup>[6]</sup> 函数  $f: \mathcal{D}_k^n \rightarrow \mathcal{D}_k$  称为  $k$  值逻辑函数, 特别地, 当  $k = 2$  时, 称为布尔函数.

**定义7**<sup>[6,11]</sup> 函数  $c: \mathcal{D}_k^n \rightarrow R$  称为  $k$  值伪逻辑函数, 特别地, 当  $k = 2$  时, 称为伪布尔函数.

**引理3**<sup>[6]</sup> 1) 对于一个  $k$  值逻辑函数  $f: \mathcal{D}_k^n \rightarrow \mathcal{D}_k$ , 存在唯一的矩阵  $M_f \in \mathcal{L}^{k \times k^n}$ , 使得

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_f \ltimes_{i=1}^n x_i.$$

$M_f$  称为  $k$  值逻辑函数  $f$  的结构矩阵.

2) 对于一个  $k$  值伪逻辑函数  $c: \mathcal{D}_k^n \rightarrow R$ , 存在唯一的矩阵  $V_c \in R^{k^n}$ , 使得

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = V_c \ltimes_{i=1}^n x_i.$$

$V_c$  称为  $k$  值伪逻辑函数  $c$  的结构向量.

需要指出的一点是,  $\mathcal{D}_k$  中的元素  $i$  在做半张量积运算时是以  $\delta_k^i$  的形式参与的.

在博弈或是模糊控制中, 有时会出现不同变量在不同有限集中取值的情况, 这便是混合值的情形. 对于混合值的逻辑函数也有类似结果<sup>[12]</sup>.

如果一个数组  $S$  能够表示成

$$S = \{s_{i_1, i_2, \dots, i_k} | i_1 = 1, 2, \dots, n_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, n_k\}$$

的形式, 则称数组  $S$  是  $k$  维的, 数组  $S$  由指标  $i_1, i_2, \dots, i_k$  按照索引  $\text{Id}(i_1, i_2, \dots, i_k, n_1, n_2, \dots, n_k)$  排列. 这里只引入  $\sigma$  置换矩阵  $W_\sigma$  的一个性质<sup>[11]</sup>, 具体不再介绍.

**引理4**<sup>[11]</sup> 设行向量  $\omega_i \in R^{n_i} (i = 1, 2, \dots, k)$ , 则有  $\omega_1 \ltimes \dots \ltimes \omega_n \ltimes W_\sigma = \omega_{\sigma_1} \ltimes \omega_{\sigma_2} \ltimes \dots \ltimes \omega_{\sigma_k}$ .

为了使表达更加简洁, 如不特别指出, 文中进行的矩阵乘法运算是矩阵半张量积运算.

### 2 有序势博弈

对于博弈  $G$ , 将玩家  $i$  的策略集记为  $\{\delta_{m_i}^1, \dots, \delta_{m_i}^k, \dots, \delta_{m_i}^{m_i}\}$ . 其中:  $\delta_{m_i}^k \sim s_i^k, k = 1, 2, \dots, m_i$ .

将玩家的收益排成矩阵  $M$ , 按照玩家从 1 到  $n$  的顺序排列成行, 策略空间中策略按照索引  $\text{Id}(i_1, i_2, \dots, i_n; m_1, m_2, \dots, m_n)$  的顺序排列成列. 具体而言, 按照如下顺序排列:  $(s_1^1, \dots, s_{n-1}^1, s_n^1), (s_1^1, \dots, s_{n-1}^2, s_n^2), \dots, (s_1^1, \dots, s_{n-1}^{m_n}, s_n^{m_n}), (s_1^2, \dots, s_{n-1}^2, s_n^1), \dots, (s_1^1, \dots, s_{n-1}^{m_{n-1}}, s_n^{m_n}), \dots, (s_1^{m_1}, \dots, s_{n-1}^{m_{n-1}}, s_n^{m_n})$ .

矩阵  $M$  称为支付矩阵, 记为

$$M = (M_1^T \ M_2^T \ \dots \ M_n^T)^T.$$

很明显, 支付矩阵  $M$  中的元素表示玩家 (行) 在相应策略 (列) 下的收益.

玩家  $i$  的收益函数可以为

$$u_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = M_i \times_i^n s_i, \quad s_i \in S_i.$$

给定策略顺序, 只需明确  $M_i$  即可确定出玩家  $i$  在相应策略下的收益.

对于有序势博弈,  $\forall i \in N, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s'_i, s''_i \in S_i$ , 存在函数  $P$  满足  $u_i(s'_i, s_{-i}) - u_i(s''_i, s_{-i}) \leq 0$ , 当且仅当  $P(s'_i, s_{-i}) - P(s''_i, s_{-i}) \leq 0$ . 如果记与  $(s'_i, s_{-i})$  对应的向量为  $x'_i$ , 与  $(s''_i, s_{-i})$  对应的向量为  $x''_i$ , 即  $(s_1, s_2, \dots, s_n) \sim \times_i^n s_i$ , 则有序势博弈的定义可以改写为: 如果  $\forall i \in N, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s'_i, s''_i \in S_i$ , 存在结构向量  $M_P$ , 使得

$$M_i x'_i - M_i x''_i \leq 0 \Leftrightarrow M_P x'_i - M_P x''_i \leq 0.$$

则称有序势函数的结构向量  $M_P$  为有序势向量. 所以在策略顺序确定的情形下, 只需确定出有序势向量  $M_P$  即可确定出有序势函数.

#### 2.1 势有向图的构造

为了将有序势博弈的判定问题转化到图上进行研究, 结合有序势博弈的定义, 构造有向图  $(V, E)$ . 其中:  $V = S, E = \{(x, y) \mid x, y \in V, x, y \text{ 仅在一个位置 } i \text{ 处互异, 且 } u_i(x) \leq u_i(y)\}$ . 该图称为势有向图.

**引理 5** 势有向图中的单向圈与策略空间  $S$  中的弱升圈一一对应.

**证明** 设  $\gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  在  $S$  中为弱升圈, 由弱升圈定义可知,  $\gamma$  满足条件:

- 1)  $x_1 = x_m$ ;
- 2)  $\gamma$  非退化;
- 3) 存在  $k$  使得  $u_{i(k)}(x_k) < u_{i(k)}(x_{k+1})$ .

由势有向图中边的定义、条件 1) 和条件 2) 可知,  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  是势有向图中的圈, 再由条件 3) 可知,  $\{x_m, x_{m-1}, \dots, x_1\}$  不是势有向图中的圈, 所以  $\gamma$

是势有向图  $(V, E)$  中的单向圈. 同理可以证明, 势有向图中的单向圈也在策略空间  $S$  中为弱升圈. 从证明过程看, 一一对应是明显的.  $\square$

利用引理 5 和引理 1, 可以直接得到如下定理.

**定理 1** 博弈  $G$  是有序势的, 当且仅当势有向图中不包含单向圈.

策略空间  $S$  中的路径概念与势有向图中路的概念一一对应, 那么对有序势博弈的刻画可以体现到势有向图上, 所以只需对势有向图进行研究, 即可得到有序势博弈的性质和判定方法.

#### 2.2 势有向图的邻接矩阵

图的邻接矩阵是图的代数等价形式, 图的性质可以通过邻接矩阵得到. 本节主要讨论如何求取势有向图的邻接矩阵, 尤其当数据量较大时, 如何通过计算机实现. 获取邻接矩阵, 根据定义直接构造是一种方式, 如  $L = (l_{xy})_{|S| \times |S|}$ , 如果  $(x, y) \in E$ , 则  $l_{xy} = 1$ , 如果  $(x, y) \notin E$ , 则  $l_{xy} = 0$ . 矩阵  $L$  实际上是高维数组,  $x$  是行标,  $y$  是列标. 当玩家较少、策略集不大时用上述方法直接生成是可行的, 但如果玩家很多, 策略空间也很大时, 再用这种方法则较为复杂. 因为确定边的过程是一个比对的过程, 运算量较大. 针对这种情况, 本文给出便于计算机运行的方法.

将势有向图  $(V, E)$  限制在  $V$  的子集  $S_i \times s_{-i}$  上的子图记为  $(V(S_i, s_{-i}), E(S_i, s_{-i}))$ , 下面引入 3 个引理.

**引理 6** 全部的  $E(S_i, s_{-i})$  构成势有向图  $(V, E)$  边集  $E$  的一个分割.

**证明** 由于

$$\forall x = (s_1^x, s_2^x, \dots, s_n^x)^T,$$

$$y = (s_1^y, s_2^y, \dots, s_n^y)^T \in V, (x, y) \in E,$$

不妨设  $s_1^x \neq s_1^y, s_i^x = s_i^y, i = 2, 3, \dots, n$ , 则有

$$(x, y) \in E(S_1, s_{-1}), s_{-1} = (s_2^x, \dots, s_n^x)^T,$$

$$\bigcup_{i \in N} \bigcup_{s_{-i} \in S_{-i}} E(S_i, s_{-i}) \supseteq E,$$

包含关系的另一半是显然的.

反证. 假设存在  $i \neq j, E(S_i, s_{-i}) \cap E(S_j, s_{-j}) \neq \emptyset$ , 即  $\exists (x, y) \in E(S_i, s_{-i}), (z, w) \in E(S_j, s_{-j})$ , 使得  $(x, y) = (z, w)$ . 设  $\xi = (s_1^\xi, s_2^\xi, \dots, s_n^\xi)^T, \xi = x, y, z, w$ , 那么  $s_i^x = s_i^z = s_i^w = s_i^y$ , 矛盾. 类似可以证明  $\forall s_{-i}^1 \neq s_{-i}^2, E(S_i, s_{-i}^1) \cap E(S_i, s_{-i}^2) = \emptyset. \square$

**引理 7** 对于任意  $i \in N, V(S_i, s_{-i})$  是势有向图节点集  $V$  的分割.

**引理 8** 对于势有向图  $(V, E)$  的任意子图  $(V(S_i, s_{-i}), E(S_i, s_{-i}))$ , 任意两点都有一条或两条有向边, 且如果有两条有向边, 则其方向相反.

**证明** 设  $x, y \in V(S_i, s_{-i})$ ,  $x, y$  仅在位置  $i$  互异, 则有  $(x, y) \in E$ , 或  $(y, x) \in E$ . 如果  $u_i(x)$  与  $u_i(y)$  之间的关系是严格大于或小于的, 则  $(x, y)$  或  $(y, x)$  不同时属于  $E$ ; 如果  $u_i(x) = u_i(y)$ , 即  $u_i(x) \geq u_i(y)$  且  $u_i(x) \leq u_i(y)$ , 则  $(x, y), (y, x)$  同时属于  $E$ .  $\square$

对于支付矩阵  $(M_1^T \ M_2^T \ \cdots \ M_n^T)^T$ , 固定  $k$ , 由引理6和引理7确定的分割关系, 将  $M_k$  的列由按照索引  $\text{Id}(i_1, i_2, \dots, i_n, m_1, m_2, \dots, m_n)$  的排列顺序, 变为按照索引  $\text{Id}(\dots, i_k, \dots, m_k)$  的排列顺序(由引理4, 通过  $\sigma$  置换矩阵实现). 实际上,  $M_k$  在改变排列顺序后,  $i_k$  位置每一次进位, 意味着跑过一个  $V(S_k, s_{-k})$ , 相互比较  $V(S_k, s_{-k})$  中的点, 即可求得  $E(S_k, s_{-k})$ ,  $E(S_k, s_{-k})$  是势有向图边集  $E$  的分割, 所以会涵盖所有的边.

注意到, 利用上述方法确定边, 只需比较  $V(S_k, s_{-k})$  中任意两策略在  $u_k$  作用下收益的大小即可. 比较数值的大小通过作差并判断差的正负得到, 该方法有一个缺陷, 是会造成边的丢失. 如  $(x, y) \in E$ ,  $x$  与  $y$  在  $i$  处互异, 但  $u_i(x) = u_i(y)$ , 判断的结果是  $(x, y) \notin E$ . 为了补全可能丢失的信息, 实现对势有向图的等价刻画, 基于引理8对上述过程进行修正, 最终得到准确的邻接矩阵.

根据上述分析过程, 得到计算势有向图邻接矩阵的具体步骤如下(算法1).

**Step 1:** 令  $\overline{M}_j = M_j W_j$ ,  $W_j$  是  $\sigma$  置换矩阵, 将  $M_j$  的列由原来按  $\text{Id}(i_1, i_2, \dots, i_n; m_1, m_2, \dots, m_n)$  的排列顺序, 变为按照索引  $\text{Id}(\dots, i_j, \dots, m_j)$  的排列顺序.

**Step 2:** 令

$$B_j = \mathbf{1}_{|S_j|} \overline{M}_j - (\mathbf{1}_{|S_j|} \overline{M}_j)^T \cdot \mathbf{T}(|S_j| \times |S_j|).$$

**Step 3:** 令

$$\widetilde{A}_j = \text{sgn}[B_j + \text{abs}(B_j)].$$

**Step 4:** 令

$$A_j = \frac{1}{2} \text{sgn}(B_j + \mathbf{1}_{|S_j| \times |S_j|} - \mathbf{1}_{|S_{-j}|}^T I_{|S_j|}).$$

**Step 5:** 令

$$A = \sum_{j=1}^n W_j [\text{diag}_{|S_j|}(A_j)] W_j^T,$$

$$D = \sum_{j=1}^n W_j [\text{diag}_{|S_j|}(A_j - \widetilde{A}_j)] W_j^T.$$

实际上, Step 4 和 Step 5 也可通过如下 Step 4' 和 Step 5' 来实现.

**Step 4':** 令

$$D_j = \mathbf{1}_{|S_j| \times |S_j|} - [\text{sgn}(\text{abs} B_j) + \mathbf{1}_{|S_{-j}|}^T I_{|S_j|}].$$

**Step 5':** 令

$$D = \sum_{j=1}^n W_j [\text{diag}_{|S_j|}(D_j)] W_j^T,$$

$$A = \sum_{j=1}^n W_j [\text{diag}_{|S_j|}(D_j + \widetilde{A}_j)] W_j^T.$$

**注2** Step 2 的作用是对  $V(S_j, s_{-j})$  中任意两个策略的收益进行比较. Step 3 的作用是将  $B_j$  中非正的数变为0, 正数变为1. Step 4 的作用是为了补全可能丢失的信息, 使得刻画完整.

**注3** 矩阵  $A$  是势有向图  $(V, E)$  的邻接矩阵,  $D$  是  $(V, E)$  子图  $(V, E_c)$  的邻接矩阵, 其中  $E_c$  表示  $(V, E)$  中所有2圈的边的集合.

### 2.3 势有向图中的圈

上一节主要讨论了势有向图邻接矩阵的具体求法, 下面利用势有向图的邻接矩阵, 给出一个判定博弈是有序势博弈的充要条件. 分两种情形进行讨论.

**情形1**  $D = 0$ .

**引理9** 在势有向图中, 圈  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  是双向的, 当且仅当  $\forall i = 1, 2, \dots, m-1, \{x_i, x_{i+1}\}$  是2圈.

**证明** 必要性. 由于  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  是圈,  $\{x_m, x_{m-1}, \dots, x_1\}$  也是圈,  $(x_i, x_{i+1}) \in E$ , 且  $(x_{i+1}, x_i) \in E, i = 1, 2, \dots, m-1$ , 即  $\{x_i, x_{i+1}\}, i = 1, 2, \dots, m-1$ , 是2圈.

充分性. 由于  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  是圈,  $\forall i = 1, 2, \dots, m-1, (x_i, x_{i+1}) \in E$ , 且  $\{x_i, x_{i+1}\} (i = 1, 2, \dots, m-1)$  是2圈,  $(x_{i+1}, x_i) \in E, i = 1, 2, \dots, m-1$ , 即  $\{x_m, x_{m-1}, \dots, x_1\}$  也是圈,  $\gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  是双向的.  $\square$

**引理10** 在势有向图  $(V, E)$  中, 下列命题等价:

- 1)  $D = 0$ ;
- 2)  $(V, E)$  中无2圈;
- 3)  $(V, E)$  中无双向圈;
- 4)  $\forall x, y \in V, x$  与  $y$  仅在一个位置互异, 不妨设第  $i$  个位置, 则  $u_i(x) > u_i(y)$  或  $u_i(x) < u_i(y)$ .

**证明** 1)  $\Leftrightarrow$  2).  $D$  是  $(V, E)$  子图  $(V, E_c)$  的邻接矩阵, 结论显然.

2)  $\Rightarrow$  3). 反证法. 假如  $(V, E)$  中有双向圈, 由引理9,  $(V, E)$  中有2圈, 矛盾.

3)  $\Rightarrow$  2). 2圈本身就是双向的, 所以  $(V, E)$  中无双向圈, 则必然没有2圈.

2)  $\Leftrightarrow$  4).  $\forall x, y \in V$ , 如果  $x, y$  仅在第  $i$  个位置互异, 则  $(x, y)$  与  $(y, x)$  有且仅有一个在边集  $E$  中.  $\square$

由引理10可以得到如下结论.

**定理2** 如果势有向图中不含双向圈, 则该图中

的圈一定是单向圈。

**推论1** 如果博弈G的势有向图不含2圈,则该博弈是有序势博弈,当且仅当其势有向图的邻接矩阵A满足

$$\text{tr}(A^i) = 0, i = 3, 4, \dots, |S|.$$

**情形2**  $D \neq 0$ .

本文的一个设计思路是对策略空间S中的任意策略x赋值P(x),使得任意x, y ∈ S, x与y仅在一个位置i处不同,有

$$\text{sgn}(P(x) - P(y)) = \text{sgn}(u_i(x) - u_i(y)).$$

如果能够完成这种赋值,则该博弈一定是有序势的,而且得到了一个有序势函数;如果无法完成赋值,即出现逻辑错误,则必然不是有序势的,唯一的一种逻辑错误就是a > b > c > d > a,此时无法找到满足条件的a、b、c、d,也就无法完成赋值。

基于这种设计思路,如果存在(x, y) ∈ E, u\_i(x) = u\_i(y), i是策略x、y唯一互异的位置,则x、y应当赋相同的值,即P(x) = P(y),只需对x、y中的一个策略赋值即可。从势有向图上而言,就是将2圈收缩为一个点,然后再赋值,如此可以将势有向图中的双向圈去掉,从而转变成不含双向圈的情形。

考虑图(V, E\_c)由孤立点和2圈构成,根据连通性将其分成一些极大连通分支,所有的极大连通分支是(V, E\_c)的分割,即将连通作为一个等价关系,从而得到分割。实际上,有的极大连通分支是孤立点,有的是2圈的并。(V, E\_c)的极大连通分支记为(V^k, E\_c^k), k = 1, 2, ..., t, 其中t是极大连通分支的个数。

记(V, E\_c)的可达矩阵为H, H的极大线性无关组为R, H对极大连通分支有很好的刻画。由于在同一极大连通分支中,各节点相互可达,对于H中相应的行和列取子阵,得到的子矩阵是元素全为1的方阵。

将(V, E)中2圈收缩到一点,收缩之后的图,重边视为一条,不加区别,该图记为(V\_R, E\_R),称为势商有向图,其邻接矩阵记为A\_R。

**注4** 上述的收缩,从商集的角度来理解,就是将(V, E\_c)中各个极大连通分支包含的节点作为一个等价类。取商集的过程,便是收缩的过程,将等价类中的节点视为一个,不再加以区分。

**引理11** 势商有向图(V\_R, E\_R)的邻接矩阵A\_R有如下性质:

- 1)  $\text{diag}_o(A_R) = \text{diag}_o(\text{sgn}(R^T A_R R))$ ;
- 2)  $\text{diag}_o(A_R) = \text{diag}_o(R^T \diamond A \diamond R)$ 。

**证明** 在图(V, E\_c)中,同一极大连通分支的各节点彼此可达,所以存在置换矩阵P,使得

$$P^T H P = \begin{bmatrix} 1_{n_1 \times n_1} & & & \\ & 1_{n_2 \times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{n_t \times n_t} \end{bmatrix},$$

其中t为极大连通分支的个数。选择合适的极大线性无关组排成矩阵R,使得

$$P^T R = \begin{bmatrix} 1_{n_1} & & & \\ & 1_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{n_t} \end{bmatrix},$$

所以有 $R^T A R = R^T P P^T A P P^T R$ , 即

$$\begin{bmatrix} 1_{n_1}^T & & & \\ & 1_{n_2}^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{n_t}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tt} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1_{n_1} & & & \\ & 1_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{n_t} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_t \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i,j=1}^n N_i^T A_{ij} N_j,$$

其中N\_i是第i列全为1、其余元素为0的n\_i × t维矩阵。

注意到,  $N_i^T A_{ij} N_j = t_{ij} E_t^{ij}$ 。当i ≠ j时, t\_{ij}表示极大连通分支i到极大连通分支j的长度为1的路径数,所以有

$$\text{diag}_o(\text{sgn}(R^T A R)) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \text{sgn}(N_i^T A_{ij} N_j) =$$

$$\sum_{i,j=1, i \neq j}^n \text{sgn}(t_{ij}) E_t^{ij}.$$

结合A\_R的意义可知,  $A_R = \text{diag}_o(\text{sgn}(R^T A R))$ 。

下面证明2)。有A = (a\_{ij}), B = (b\_{ij}) ∈ D^{t × t},  $\text{sgn}(AB) = A \diamond B$ 。  $\bigvee_{k=1}^t a_{ik} \wedge b_{kj} = 0 \Leftrightarrow \forall k, a_{ik} \wedge b_{kj} = 0 \Leftrightarrow \forall k, a_{ik} b_{kj} = 0 \Leftrightarrow \text{sgn}\left(\sum_{k=1}^t a_{ik} b_{kj}\right) = 0$ 。同理可证  $\bigvee_{k=1}^t a_{ik} \wedge b_{kj} = 1$ 的情况。□

**引理12** 势商有向图(V\_R, E\_R)中有自环,当且仅当H ⊖ A不是对称阵,其中H是(V, E)的子图(V,

$E_c$ )的可达矩阵,  $A$ 是势有向图  $(V, E)$  的邻接矩阵.

**证明** 由引理11的证明可知, 存在置换矩阵  $P$ , 使得

$$P^T H P = \begin{bmatrix} 1_{n_1 \times n_1} & & & \\ & 1_{n_2 \times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{n_t \times n_t} \end{bmatrix}.$$

由于通过置换矩阵作合同变换, 只是改变原来矩阵中元素的位置, 有

$$P^T (H \ominus A) P = P^T H P \ominus P^T A P = \begin{bmatrix} 1_{n_1 \times n_1} - A_{11} & & & \\ & 1_{n_2 \times n_2} - A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{n_t \times n_t} - A_{tt} \end{bmatrix}.$$

注意到, 任意的  $A_{kk}$  是  $(V, E)$  限制在  $V^k$  上的子图的邻接矩阵, 该子图记为  $(V^k, E^k)$ , 对于  $\forall k = 1, 2, \dots, t$ ,  $(V^k, E^k)$  是  $(V, E_c)$  的极大连通分支.  $(V_R, E_R)$  有自环当且仅当存在  $k$ , 在  $(V^k, E^k)$  中, 存在  $x, y \in V^k$ , 但  $(x, y)$  和  $(y, x)$  不同时属于  $E_c$ , 即  $A_{kk}$  不对称, 从而  $H \ominus A$  不是对称阵.  $\square$

**推论2** 如果存在  $i$ , 使得  $[R^T A R]_{ii}$  为奇数, 则势商有向图  $(V_R, E_R)$  中有自环.

**注5** 为何矩阵  $R^T A R$  要分成两部分来分别考虑? 原因在于  $\text{sgn}(R^T A R)$  并不是势商有向图  $(V_R, E_R)$  的邻接矩阵, 因为进行收缩的位置不论有无自环,  $\text{sgn}(R^T A R)$  在相应位置取值都为1, 所以将  $R^T A R$  分成两部分考虑. 经过收缩后, 势有向图  $(V, E)$  中的单向圈对应到势商有向图  $(V_R, E_R)$  只能是自环、2圈或者仍是单向圈, 由此得到如下定理.

**定理3** 一个博弈  $G$  是有序势的, 当且仅当势商有向图  $(V_R, E_R)$  中无自环, 且  $\text{tr}(A_R^i) = 0, i = 2, 3, \dots, t$ , 其中  $t$  是矩阵  $A_R$  的阶数.

**注6** 对不含有2圈的情形,  $(V_R, E_R) = (V, E)$ .

判断一个博弈是否为有序势博弈, 本文采用由浅入深的研究方法, 先考虑势有向图中不含双向圈的特殊情形. 对于含有双向圈的复杂情形, 将2圈作为一个等价关系, 进而在其商集上考虑, 将问题转化到不含双向圈的情况.

根据上面的结论, 基于势有向图给出判断一个博弈是否是有序势的具体步骤(算法2).

**Step 1:** 计算势有向图  $(V, E)$  的邻接矩阵  $A$  和子图  $(V, E_c)$  的邻接矩阵  $D$ .

**Step 2:** 判断  $D$  是否为0, 如果  $D = 0$ , 则转至 Step 3, 否则转至 Step 4.

**Step 3:** 计算  $\text{tr}(A^i)$ , 如果对于  $i = 3, 4, \dots, |S|$ ,  $\text{tr}(A^i) \equiv 0$ , 则转至 Step 6, 否则转至 Step 7.

**Step 4:** 计算  $(V, E_c)$  的可达矩阵  $H$  和  $H$  的极大线性无关组  $R$ , 判断势商有向图  $(V_R, E_R)$  中, 是否包含自环, 如果有自环, 则转至 Step 7, 否则转至 Step 5.

**Step 5:**  $\bar{A}_R = \text{diag}_o(\text{sgn}(R^T A R))$ , 计算  $\text{tr}(\bar{A}_R^i)$ , 如果对于  $i = 2, 3, \dots, t$ ,  $\text{tr}(\bar{A}_R^i) \equiv 0$ , 其中  $t$  是矩阵  $\bar{A}_R$  的阶数, 则转至 Step 6, 否则, 转至 Step 7.

**Step 6:** 该博弈是有序势的, 结束.

**Step 7:** 该博弈不是有序势的, 结束.

## 2.4 有序势函数

本节主要研究计算有序势函数的方法和有序势函数的性质, 为了给出有序势函数的具体计算方法, 先给出势有向图的性质.

**定理4** 一个博弈  $G$  是有序势博弈, 对于任意策略  $x$  和策略  $y$ ,  $x$  与  $y$  仅在一个位置互异, 且其势有向图中不含2圈, 那么  $P(x) > P(y)$ , 当且仅当在其势有向图中  $N_r(x) > N_r(y)$ .

**证明** 必要性. 设策略  $x$  与  $y$  仅在一个位置互异, 且  $P(x) > P(y)$ , 于是  $(y, x) \in E$ , 设  $\gamma$  为到达  $y$  的任一路径, 则  $\gamma \cup (y, x)$  便是到达  $x$  的路径, 所以  $N_r(x) > N_r(y)$ .

充分性. 反证法, 假设  $P(x) \leq P(y)$ , 由于  $D = 0$ , 则  $P(x) < P(y)$ , 由必要性的证明可知  $N_r(x) > N_r(y)$ , 矛盾, 所以  $P(x) > P(y)$ .  $\square$

由定理4给出的性质容易想到, 在势有向图  $(V, E)$  中, 如果不含2圈, 则可以将到达策略(节点)  $x$  的路径数  $N_r(x)$  赋值给  $x$ , 作为  $P(x)$ ; 不失一般性, 对于含有2圈的情况, 在势商有向图去掉自环的子图上考虑, 求出结果后, 再用  $R$  还原回去, 得到该博弈的一个有序势函数.

如下定理给出计算有序势函数的具体方法.

**定理5** 如果一个有序势博弈的势有向图不含2圈, 则该博弈的一个有序势函数为

$$P(s_1, s_2, \dots, s_n) = 1^T \left( \sum_{i=1}^{|S|} A^i \right) \times_i^n s_i, \quad s_i \in S_i.$$

一般地, 如果一个博弈是有序势博弈, 则该博弈的一个有序势函数为

$$P(s_1, s_2, \dots, s_n) = 1^T \left( \sum_{i=1}^t A_R^i \right) R^T \times_i^n s_i, \quad s_i \in S_i.$$

**注7** 对  $A$  或  $A_R$  作幂求和时, 不一定算到  $|S|$  或  $t$  次幂, 如果对于某个  $\beta, A^\beta = 0$  或  $A_R^\beta = 0$ , 求和便可以终止. 实际上, 在判定是否为有序势博弈时, 定理3

中关于迹为0的条件,可以改为  $\text{tr}\left(\sum_{j=1}^i A_R^j\right) \neq 0, i = 2, 3, \dots, t$ ,那么在求有序势函数时,会节省一些计算机存储空间.

定理5的优点在于,当判断出一个博弈是有序势博弈后,直接可以得到一个有序势向量,进而得到有序势函数.在判断出博弈是有序势博弈后,如果势有向图  $(V, E)$  中不含2圈,则可以通过解关于  $P(x) (x \in V = S)$  的不等式组

$$P(x) \leq P(y), (x, y) \in E,$$

确定出所有的有序势向量.如果含有2圈,则在势商有向图上考虑类似的不等式组,确定出所有的有序势向量.对于一个有序势博弈,将其所有的有序势函数的结构向量构成的集合记为  $S_{OPF}$ .下面给出  $S_{OPF}$  的一些性质.

**定理6** 有序势博弈所有有序势函数的结构向量构成的集合  $S_{OPF}$  具有如下性质:

- 1)  $M_P \in S_{OPF}, \forall k > 0, c \in R, k(P - c1_{|S|}) \in S_{OPF}$ .
- 2)  $M_{P_i} \succeq 0 \in S_{OPF}, i = 1, 2, M_{P_1} \odot M_{P_2} \in S_{OPF}$ .

**2.5 数值算例**

考虑文献[9]中一个二人博弈的模型,二人的策略集分别是  $\{T, M, B\}$  和  $\{L, M, R\}$ ,在相应的策略下,二人的收益如表1所示.将其改写成支付矩阵  $M$  的形式,有

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} TL, TM, TR, ML, MM, MR, BL, BM, BR \end{matrix} \\ \begin{matrix} TL, TM, TR \\ ML, MM, MR \\ BL, BM, BR \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

其中:矩阵  $M$  的第1行表示玩家1在相应策略下的收益,  $M$  的第2行表示玩家2的收益,策略的排列顺序在  $M$  上方标示.按照算法1的 Step 1,利用  $\sigma$  置换矩阵  $W_1 = \delta_9[1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9]$  改变支付矩阵  $M$  第1行的排列顺序,使之按照  $TL, ML, BL, TM, MM, BM, TR, MR, BR$  的顺序排列,然后按照算法1中 Step 2 ~ Step 5 依次进行运算,得到

$$W_1 \text{diag}_3(\tilde{A}_1) W_1^T = [\delta_9^0, \delta_9^5 + \delta_9^8, \delta_9^0, \delta_9^1, \delta_9^0, \delta_9^0, \delta_9^3, \delta_9^0, \delta_9^3 + \delta_9^6].$$

对于矩阵  $M$  的第2行不改变顺序,依次按照算法1中 Step 2 ~ Step 5 进行运算,得到

$$\text{diag}_3(\tilde{A}_2) = [\delta_9^3, \delta_9^1 + \delta_9^3, \delta_9^0, \delta_9^5 + \delta_9^6, \delta_9^0, \delta_9^0, \delta_9^0, \delta_9^0, \delta_9^7 + \delta_9^8].$$

类似地,由 Step 5 或 Step 5' 可得

$$D = [\delta_9^7, \delta_9^0, \delta_9^6, \delta_9^0, \delta_9^8 + \delta_9^6, \delta_9^3 + \delta_9^5, \delta_9^1 + \delta_9^8, \delta_9^7 + \delta_9^5, \delta_9^0].$$

于是得到势有向图的邻接矩阵

$$A = W_1 \text{diag}_3(\tilde{A}_1) W_1^T + \text{diag}_3(\tilde{A}_2) + D.$$

表1 二人收益

(玩家1, 玩家2)	收益		
	L	M	R
T	(0,1)	(1,2)	(0,0)
M	(1,1)	(0,0)	(0,0)
B	(0,0)	(0,0)	(1,1)

由于  $D \neq 0$ , 需要考虑势商有向图. 利用引理11给出的收缩方法,收缩时需要用到  $(V, E_c)$  的可达矩阵  $H$  和  $H$  的极大线性无关组  $R, R^T = \delta_4[1, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 4], H$  和  $R^T A R$  分别为

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R^T A R = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于  $[R^T A R]_{11} = 11$  是奇数,由推论2可知,该博弈不是有序势博弈.

上述过程从图上进行分析.图2为势有向图,即邻接矩阵  $A$  对应的有向图,将图2中双向圈的部分提取出来得到图3,图3包含4个极大连通分支,它们的可达关系通过  $H$  刻画.对图收缩,将极大连通分支收缩到一点,收缩后得到图4,图4中的  $\star$  表示  $TL, BL, BM, MM, MR, TR$  等6个节点收缩到一起得到的节点.

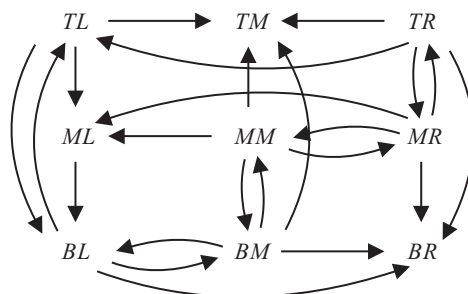


图2 势有向图

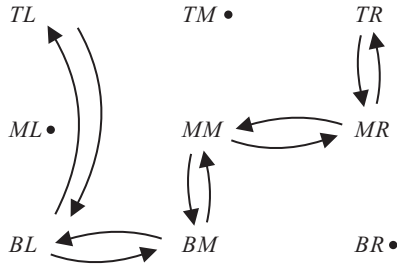


图3 势有向图的子图

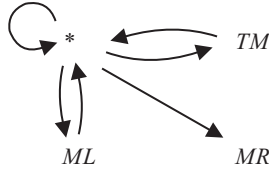


图4 收缩后的势有向图

文献[9]在判断该博弈是否为有序势博弈时,只是指出  $\{TL, BL, BM, MM, MR, TR, TL\}$  是弱升圈,所以该博弈不是有序势博弈.至于具体如何确定弱升圈,文献[9]没有具体说明.实际上弱升圈的长度至少是3,很难从博弈收益中直接找出.本文给出判断博弈是否为有序势博弈的具体算法,不仅可以判定一个博弈是否为有序势博弈,同时可以给出相应的有序势函数,这些都是对前人工作的提升.

### 3 延长智能体无线网络系统寿命中的应用

智能体无线网络系统的运行需满足两个必备条件:一是各个节点都有电量维持运作;二是系统各节点是连通的.任何一个条件不满足,都认为系统不能继续运作,那么,在保持连通的基础上,只需满足第1个条件即可.文献[10]采用合作拓扑控制,当一个节点成为系统“短板”,通过提高其他节点的能耗保证连通性,并降低该点能耗,从而可以在一定程度上延长系统的寿命.本文所采用的方式是将通信方式(信道的选择)视为策略,节点单位时间的能耗视为收益(支付),建立一个简化的模型.

不同的策略组合可能让系统连通也可能不连通,所以先将不连通的策略组合剔除,然后通过势有向图找出容许极小拓扑集.容许极小拓扑是指这样一种策略组合(连通方式):在该拓扑结构下可以保证系统的连通性,但如果去掉一条边,则会使系统不连通.该连通方式具有收益是极小值的特点.系统连通方式在容许极小拓扑集中切换,通过线性规划确定切换的时间、连通方式和系统最大运行时间.文献[10]中设计的算法,各节点从最大的能耗出发,依次调整策略,最后计算出最大运行时间,本文始终在容许极小拓扑集中切换,所以最后计算出的系统运作时间比文献[10]更长.

由势博弈的定义可以发现,博弈  $G = (N, S, U)$ , 玩家集为  $N$ , 策略空间  $S = \prod_{i=1}^n S_i$ ,  $S_i$  是玩家  $i$  的策略集,  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  为支付函数.如果任意  $i \in N$ , 玩家  $i$  的收益  $u_i$  只与  $i$  的策略有关,则博弈  $G$  是一个势博弈.

**定义8** 博弈  $G = (N, S, U)$ , 如果策略  $s$  对于任意  $s' \in S$ ,  $s$  与  $s'$  仅在一个位置互异, 设该位置为  $i$ , 则有  $u_i(s) \geq (\leq) u_i(s')$ , 策略  $s$  称为  $G$  的极大(小)值点.

如果  $G$  是一个有序势博弈, 则其有序势函数为  $P$ . 如果策略  $s$  对  $\forall i \in N, \forall s' \in S$ ,  $s$  与  $s'$  仅在一个位置  $i$  互异, 则有  $P(s) \geq (\leq) P(s')$ , 策略  $s$  为有序势博弈  $G$  的极大(小)值点. 结合势有向图的定义, 可以得到如下定理.

**定理7** 设  $G$  是一个有序势博弈, 其势有向图  $(V, E)$  的邻接矩阵为  $A$ , 策略  $s$  在索引下排在第  $i$  个, 则该博弈在策略  $s$  处取极大值, 当且仅当  $A$  的第  $i$  行是零向量, 第  $i$  列不是零向量; 该博弈在策略  $s$  处取极小值, 当且仅当  $A$  的第  $i$  列是零向量, 第  $i$  行不是零向量.

**注8** 对于系统运行的第2个必备条件, 从实际上讲, 系统各节点直接或间接通信, 才能传达彼此信息, 才能使系统处于一个整体, 更好地协作、配合、完成系统的任务. 所以说, 此时要求的连通是强连通, 即节点之间彼此相互可达, 即各个智能体之间有直接的信道或间接的信道, 才能保证彼此信息可以互达. 进一步考虑, 可以发现并非所有的策略都可以保证连通性, 所以应当先将不能保证系统连通的策略组合去掉, 然后应用定理7的方法.

结合具体例子表明本文方法的可行性.

**例1** 对于3-智能体无线系统, 3个智能体记为  $N = \{1, 2, 3\}$ . 智能体1的策略集为

$$S_1 = \{(1, 3), (1, 2), (1, 3) \wedge (1, 2)\} \doteq \{s_1^1, s_1^2, s_1^3\}.$$

其中:  $(1, 2)$  为智能体1向智能体2传递信息,  $(1, 3) \wedge (1, 2)$  为智能体1向智能体2和3传递信息, 其余类似. 智能体2的策略集为

$$S_2 = \{(2, 1), (2, 3), (2, 1) \wedge (2, 3)\} \doteq \{s_2^1, s_2^2, s_2^3\}.$$

智能体3的策略集为

$$S_3 = \{(3, 2), (3, 1), (3, 2) \wedge (3, 1)\} \doteq \{s_3^1, s_3^2, s_3^3\}.$$

将列按  $s_1^1 s_2^1 s_3^1, s_1^1 s_2^2 s_3^2, \dots, s_1^3 s_2^3 s_3^3$  的顺序, 按智能体1、2、3的顺序, 设收益矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \leftarrow 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \right].$$

通过算法1可得势有向图的邻接矩阵为

$$A = I_9 \otimes C + I_3 \otimes B \otimes I_3 + B \otimes I_9.$$

其中:  $C = [\delta_3^0, \delta_3^1, \delta_3^2 + \delta_3^3]$ ,  $B = [\delta_3^2, \delta_3^0, \delta_3^1 + \delta_3^2]$ .

易验证  $s_1^1 s_2^2 s_3^3$ ,  $s_1^1 s_2^2 s_3^1$ ,  $s_1^1 s_2^2 s_3^2$ ,  $s_1^1 s_2^3 s_3^2$ ,  $s_1^2 s_2^1 s_3^2$ ,  $s_1^2 s_2^1 s_3^1$ ,  $s_1^2 s_2^2 s_3^1$ ,  $s_1^3 s_2^2 s_3^1$  不能保证系统连通, 将  $A$  中上述策略对应的行和列变为0向量, 得到矩阵

$$\hat{A} = [\delta_{27}^0, \delta_{27}^0, \delta_{27}^1 + \delta_{27}^6, \delta_{27}^0, \delta_{27}^0, \delta_{27}^0, \delta_{27}^0, \dots, \delta_{27}^9 + \delta_{27}^{18} + \delta_{27}^{21} + \delta_{27}^{24} + \delta_{27}^{25} + \delta_{27}^{26}].$$

由定理7得到容许极小拓扑集

$$\mathcal{J} = \{J_1 = s_1^1 s_2^1 s_3^1, J_2 = s_1^2 s_2^2 s_3^2, J_3 = s_1^2 s_2^3 s_3^1\}.$$

确定容许极小拓扑集后, 只需确定如何切换即可. 假设在  $J_1, J_2, J_3$  下运行的时间分别为  $t_1, t_2, t_3$ , 那么有

$$\begin{aligned} \max t &= t_1 + t_2 + t_3; \\ \text{s.t. } 3t_1 + t_2 + t_3 &\leq b_1, \\ 3t_1 + 2t_2 + 5t_3 &\leq b_2, \\ t_1 + 4t_2 + t_3 &\leq b_3, \\ t_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$b_1, b_2, b_3$  分别代表初始时3个智能体电池的电量, 特别地, 当  $b_1 = b_2 = b_3 = 100$  时, 利用Matlab可以求得  $t_1 = 20, t_2 = 20, t_3 = 0$ . 如果不切换, 则系统最多运行33.3个时间单位, 切换后, 系统可以运行40个时间单位, 寿命提高21%.

**注9** 该方法所确定的切换方式并没有具体指出何时切换, 这恰是该方法的一个优点. 因为只要在  $J_1$  方式下运行20单位, 在  $J_2$  方式下运行20单位, 即可使系统达到最大寿命, 切换时间有多种组合方式. 这意味着, 如果考虑对系统的多个方面同时优化, 则所确定出的切换方式与本文仅考虑电量所确定出的切换方式会有很好的相容性.

## 4 结 论

本文主要研究一类特殊的博弈——有序势博弈. 借助矩阵半张量积和图等数学工具, 将有序势博弈的判定和求取有序势函数转化到势有向图上进行考虑, 并得到判断有序势博弈、计算有序势函数的代

数方法. 同时, 利用势有向图和线性规划提高了3-智能体无线网络系统的寿命. 最后通过例子表明了所提出方法的有效性.

当策略空间很大或智能体个数很多时, 本文方法运算量较大, 因此设计减少运算量的新算法是值得考虑的. 另外, 通过有序势博弈在提高多智能体无线网络系统寿命方面的应用, 可进一步研究其他方面的优化问题.

## 参考文献(References)

- [1] Rosenthal R W. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria[J]. Int J of Game Theory, 1973, 2(1): 65-67.
- [2] Monderer D, Shapley L S. Potential games[J]. Games and Economic Behavior, 1996, 14910: 124-143.
- [3] Zhang J, Zhao G, Qi D. Distributed optimization and state based ordinal potential games[C]. Communications in Computer and Information Science. London: Springer, 2012: 113-121.
- [4] Chu X, Sethu H. Cooperative topology control with adaptation for improved lifetime in wireless sensor networks[J]. Ad Hoc Networks, 2015, 30(5): 99-114.
- [5] Norde H, Patrone F. A potential approach for ordinal games[J]. Sociedad de Estadística Investigación Operativa Top, 2001, 9(1): 69-75.
- [6] Cheng D Z. On finite potential game[J]. Automatica, 2014, 50(7): 1793-1801.
- [7] Cheng D Z, Wan X, Liu T. A survey on potential evolutionary game and its applications[J]. J of Control and Decision, 2014, 2(1): 26-45.
- [8] Voorneveld M, Norde H. A characterization of ordinal potential games[J]. Games and Economic Behavior, 1997, 19(2): 235-242.
- [9] Tang P, Lin F. Two equivalence results for two-person strict games[J]. Games and Economic Behavior, 2014, 71(2): 479-486.
- [10] Cheng D Z, Qi H, Zhao Y. An introduction to semi-tensor product of matrices and its applications[M]. Singapore: World Scientific, 2012: 1-50.
- [11] Cheng D Z, Qi H. Semi-tensor product of matrices theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2011: 1-157.
- [12] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory[M]. London: Springer, 2004: 163-165.

(责任编辑: 郑晓蕾)