

# 带扰动补偿的无抖振离散重复控制器设计

周文委<sup>†</sup>, 孙明轩, 张有兵

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

**摘要:** 针对周期离散系统的跟踪控制问题, 提出一种有限时间单调收敛的无抖振吸引律, 讨论扰动补偿措施并将其嵌入吸引律形成理想误差动态用于设计离散重复控制器. 通过分析补偿误差上界说明扰动补偿措施能抑制重复控制未能消除的扰动, 通过推导控制器稳态误差带说明吸引律的收敛性可使系统具有鲁棒稳定性. 针对伺服电机系统的仿真与实验验证了设计工作的有效性.

**关键词:** 重复控制; 吸引律; 扰动补偿; 跟踪控制

**中图分类号:** TP273      **文献标志码:** A

## Chatting-free discrete-time repetitive controller design with disturbance compensator

ZHOU Wen-wei<sup>†</sup>, SUN Ming-xuan, ZHANG You-bing

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract:** This paper studies the tracking control of periodic discrete-time system. A free-chatting attracting law and the methods of compensating disturbance are presented for designing the repetitive controller. The attracting law implanted in the controller drives the tracking error to origin monotonously in the finite time. The disturbance not eliminated by the repetitive controller is restricted in the upper bound of compensate errors. The steady state error band illustrates that the system is robust steady for the convergence of attracting law. Both simulation and experiments on the servo motor demonstrate the effectiveness of the repetitive controller design work.

**Keywords:** repetitive control; attracting law; compensating disturbance; tracking control

## 0 引言

滑模变结构控制是一种常用的非线性控制方法, 其滑动模态易于实现, 且在存在系统摄动或者外部扰动时, 通过控制量的切换使得系统具有不变性, 因而受到国内外学者的关注. 早期文献中, 不等式形式的到达条件未显示定义切换动态, 且不利于推广到多输入系统. 文献[1-2]提出的趋近律方法以等式形式提供到达条件, 可以直接导出控制器, 已成为变结构控制的主要方法之一.

回顾已发表的文献, 关于趋近律滑模控制的研究主要集中在趋近律的改进和新型趋近律的设计上. 在解决离散指数趋近律的抖振问题上, 较为常见的是断续函数连续化方法<sup>[2-4]</sup>. 文献[5-6]提出的无抖振离散趋近律设计方法适合更为一般的趋近律形式, 其中文献[6]给出了趋近律无抖振到达条件的一般形式;

考虑实际控制器有限的输出速度, 文献[7]提出的趋近律可通过调节变化速率满足控制输出的约束条件, 明确了控制效果与执行器速度限制的内在联系; 为了加快系统的瞬态过程, 文献[8]设计了双幂次趋近律, 在消除抖振的同时具有快速收敛特性, 并给出了到达时间表达式和不确定系统的稳态误差界; 在此基础上, 文献[9]进一步细分趋近阶段, 并进行有针对性的速率调节, 提高了全程趋近速率. 上述工作针对趋近律本身取得了较好效果, 但未考虑系统扰动对状态收敛性的影响.

实际系统往往含有各种扰动, 具有不确定性, 导致系统状态无法收敛至平衡点. 针对此问题, 常见的解决方法有扰动在线估计与补偿<sup>[10-12]</sup>、干扰观测器实现补偿<sup>[13-14]</sup>. 其中文献[10]给出了满足到达条件趋近律的一般形式, 放宽了对趋近律步步穿越滑模面

收稿日期: 2016-01-08; 修回日期: 2016-06-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573320); 浙江省自然科学基金项目(LY16E070005).

作者简介: 周文委(1978—), 男, 博士生, 从事重复控制的研究; 孙明轩(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事重复控制等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: zww@zjut.edu.cn

的要求,并针对慢变扰动信号讨论了扰动估计方法;文献[11]利用灰色估计器求解扰动项,降低了不确定项的影响;文献[12]通过带扰动补偿的趋近律设计控制器,利用实际切换函数与理想趋近律的偏差预测扰动,得到了较小的准滑模带宽;文献[13]引入干扰观测器实现了扰动估计误差与切换动态的解耦,提高了控制精度;文献[14]提出了一种新型趋近律,并构建了扩张扰动观测器用于扰动在线补偿;此外,文献[15-16]提出了一种变指数的切换和无切换趋近律,并通过中值补偿实现了扰动抑制.上述工作将系统扰动作为完全未知量处理,没有挖掘利用其部分可获知的信息以达到更高的控制精度.

应用中执行周期任务的被控对象常含有周期性扰动,重复控制方法适用于消除此类已知周期的扰动分量<sup>[17-18]</sup>.文献[19]将扰动信息嵌入趋近律,构建变结构重复控制器,形成了含扰动抑制措施的理想切换动态,使得闭环系统完全抑制周期扰动.在此基础上,本文将滑模控制的趋近运动植入时域表达的重复控制器,以跟踪误差取代切换函数,以原点取代滑模面,通过无抖振误差吸引律设计重复控制器,使得系统具有关于参数漂移和有界干扰的鲁棒性,同时消除与参考信号同频率的周期扰动.本文无抖振吸引律包含线性和非线性部分.非线性部分驱使系统误差在有限时间内单调无穿越逼近原点,线性部分使得误差一步到达并保持在原点.对于重复控制未能消除的扰动分量,本文讨论了补偿方法,并将其嵌入吸引律形成理想误差动态,从而提高系统跟踪性能.

## 1 问题描述

考虑带扰动的 $n$ 阶单输入不确定离散时间系统

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^n b_i u_{k+1-i} - \sum_{i=1}^n a_i y_{k+1-i} + w_k. \quad (1)$$

其中: $a_i$ 和 $b_i$ ( $i = 1, 2, \dots, n$ )为系统结构参数; $u_k$ 为 $kT$ ( $T$ 为采样周期)时刻的控制输入; $y_k$ 为系统输出;系统扰动与不确定因素的总和 $w_k = w_k^p + w_k^r$ , $w_k^p$ 为周期跟踪带来的扰动分量,频率为参考信号频率的整数倍,满足 $w_k^p = w_{k-N}^p$ ,称为规则分量, $w_k^r$ 为其余扰动分量,包含未建模动态、参数摄动、负载扰动和外部扰动等,称为不规则分量.记周期性的参考信号为 $r_k = r_{k-N}$ ( $N$ 为一周期的采样点数),则跟踪误差为 $e_k = r_k - y_k$ .

**假设1** 不规则扰动分量 $w_k^r$ 有界,即 $w_L^r \leq w_k^r \leq w_U^r$ ,记 $M = w_U^r - w_L^r$ .采样周期 $T$ 足够小,使得

$$|\Delta d_k| \leq M_d, |\Delta^2 d_k| \leq M_s. \quad (2)$$

其中

$$\Delta d_k = w_k - w_{k-1} - (w_{k-N} - w_{k-N-1}),$$

$$\Delta^2 d_k = \Delta d_k - \Delta d_{k-1}, M_s \leq M_d \leq M.$$

在实际系统数字采样过程中,前置抗混叠滤波器的使用保证了采样率远高于信号最高频率,即相对于采样时钟而言,被测量属于慢变信号.因此,假设1具有现实意义.

本文研究的问题是考虑扰动的不确定离散系统(1)设计离散重复控制器,从而实现周期性参考信号的跟踪,在完全抑制规则扰动分量的同时,通过扰动补偿机制尽可能消除其余慢变的不规则扰动分量,提高系统跟踪性能.

## 2 无抖振离散吸引律

为了刻画跟踪误差的收敛特性,本文首先考虑确定形式的离散吸引律

$$e_{k+1} = e_k - \min\{m|e_k|^\alpha, |e_k|\} \operatorname{sgn}(e_k). \quad (3)$$

其中: $m > 0, 0 < \alpha < 1$ .已发表文献中采用较多的指数趋近律及其改进形式在系统状态远离滑模面时收敛速度较快,而在接近滑模面时,或者通过等速项加快收敛速度,或者为削弱抖振而牺牲收敛速度.考虑实际系统驱动能力的限制,本文吸引律注重到达时间而不追求跟踪误差远离收敛域时的局部收敛速度.下面讨论其瞬态和稳态性能.

**定理1** 当 $w_k = 0$ 时,吸引律(3)定义的误差动态单调收敛无抖振,且经过 $k^*$ 控制步后到达并保持在零.其中 $k^* = \left\lceil \frac{e_0^{1-\alpha} - m}{m(1-\alpha)} \right\rceil$ , $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整.

**证明** 当 $|e_k| > m^{1/(1-\alpha)}$ 时, $m|e_k|^\alpha < |e_k|$ ,所以 $e_{k+1} \operatorname{sgn}(e_k) = |e_k| - m|e_k|^\alpha \in (0, |e_k|)$ ,即

$$|e_{k+1}| < |e_k|, \operatorname{sgn}(e_{k+1}) = \operatorname{sgn}(e_k). \quad (4)$$

因此 $e_k$ 同号单调递减.当 $|e_k| \leq m^{1/(1-\alpha)}$ 时, $m|e_k|^\alpha \geq |e_k|$ ,根据式(3)可得 $e_{k+1} = 0$ .因此吸引律(3)定义的误差动态单调收敛无抖振.

下面根据 $e_k$ 取值分析误差收敛控制步.当 $e_k > m^{1/(1-\alpha)} > 0$ 时, $e_{k+1} - e_k = -me_k^\alpha$ .记 $\Delta e_i = e_{i+1} - e_i, \Delta t = T$ ,则

$$\sum_{i=0}^k \Delta t = \sum_{i=0}^k \frac{T \Delta e_i}{-me_i^\alpha}. \quad (5)$$

当采样周期 $T$ 足够小时,式(5)相当于积分式

$$\int_0^{kT} dt = \int_{e_0}^{e_k} \frac{T}{-me_i^\alpha} de_i. \quad (6)$$

对式(6)两边求定积分,并令 $e_k \leq m^{1/(1-\alpha)}$ ,可以得到

$k \geq \frac{e_0^{1-\alpha} - m}{m(1-\alpha)}$ , 即当  $k = \left\lceil \frac{e_0^{1-\alpha} - m}{m(1-\alpha)} \right\rceil$  时, 满足  $e_k \leq m^{1/(1-\alpha)}$ . 在  $e_k \leq -m^{1/(1-\alpha)} < 0$  的情况下, 同理可得当  $k = \left\lceil \frac{e_0^{1-\alpha} - m}{m(1-\alpha)} \right\rceil$  时, 满足  $e_k \geq -m^{1/(1-\alpha)}$ .

由式(3)可得, 当  $|e_k| \leq m^{1/(1-\alpha)}$  时, 下一控制步  $e_{k+1} = 0$ . 因此跟踪误差从  $e_0$  开始在经过  $k^* = \left\lceil \frac{e_0^{1-\alpha} - m}{m(1-\alpha)} \right\rceil$  控制步后收敛到达零点.  $\square$

定理1表明, 吸引律(3)使得不考虑扰动( $w_k = 0$ )的确定系统(1)的输出逐步逼近参考信号, 并在  $k^*$  控制步后实现完全跟踪, 跟踪误差不变号, 控制过程无抖振. 由  $k^*$  的表达式可知, 系统瞬态性能取决于吸引律(3)中的幂次参数  $m$  和  $\alpha$ , 其中  $m$  越大, 跟踪误差到原点的收敛速度越快.

### 3 基于误差动态的重复控制器

重复控制方法适用于处理已知周期的规则扰动, 如假设1中的  $w_k^p$ . 以下先推导基于吸引律的重复控制器, 然后讨论未消除部分扰动的处理方法.

#### 3.1 控制器设计

为了便于植入误差吸引律以提高系统瞬态性能和鲁棒稳定性, 本文通过系统差分方程设计时域表达的重复控制器. 根据跟踪误差定义和式(1)可得

$$y_{k+1} = r_{k+1} - e_{k+1} = y_{k+1-N} + \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}(u_{k-i} - u_{k-N-i}) - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(y_{k-i} - y_{k-N-i}) + w_k - w_{k-N}. \quad (7)$$

由式(7)解得重复控制器

$$u_k = u_{k-N} - \frac{1}{b_1} \left[ e_{k+1} - e_{k+1-N} + d_k + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1}(u_{k-i} - u_{k-N-i}) - r_{k+1} - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(y_{k-i} - y_{k-N-i}) + r_{k+1-N} \right]. \quad (8)$$

其中:  $d_k = w_k - w_{k-N}$  为相邻周期的扰动变化量, 参考信号  $r_{k+1}$  已知,  $e_{k+1}$  由确定形式的吸引律(3)给出, 其余皆为历史运行信息. 根据前述对吸引律(3)的分析, 当  $k \geq k^*$  时,  $e_{k+1} = 0$ , 所以将式(8)代入(1)可得  $y_{k+1} = r_{k+1}$ . 由此可以看出, 植入吸引律(3)的重复控制器(8)能够实现系统完全跟踪. 然而, 实际系统的  $w_k$  难以量测, 所以含有扰动变化量  $d_k$  的控制器无法实施, 需要对  $d_k$  进行处理. 本文考虑将扰动信息嵌入离散吸引律, 形成不确定形式的误差动态方程, 从而通过扰动的历史信息动态补偿当前值, 实现精确的

跟踪控制.

**注1** 通过相邻周期扰动的差分可知,  $d_k = w_k^p - w_{k-N}^p + (w_k^r - w_{k-N}^r) = w_k^r - w_{k-N}^r$  中仅包含不规则分量信息, 所以即便不对控制器(8)中的  $d_k$  进行处理(令  $d_k = 0$ ), 系统扰动中的规则分量  $w_k^p$  亦能得到完全抑制, 这是本文采用重复控制法的初衷.

#### 3.2 零阶误差动态补偿

针对未知特性的扰动估计, 常见的办法是以中值  $\bar{d}_k$  补偿  $d_k$ , 补偿误差绝对值上界为  $M^{[17, 21]}$ . 文献[10]采用包含零阶补偿机制的理想误差动态方程

$$e_{k+1} = \tilde{e}_{k+1} - d_k - \sum_{i=0}^k (e_i - \tilde{e}_i). \quad (9)$$

其中:  $\tilde{e}_{k+1}$  为确定形式的吸引律, 要求满足文献[10]中式(8)给出的条件. 根据前文分析, 吸引律(3)能够在有限时间内单调收敛至原点, 符合  $\tilde{e}_{k+1}$  的要求, 所以本文取  $\tilde{e}_{k+1} = e_k - \min\{m|e_k|^\alpha, |e_k|\} \text{sgn}(e_k)$ .

由式(9)可得, 对于任意  $k \geq 1$ , 均满足

$$\sum_{i=0}^{k-1} (e_i - \tilde{e}_i) = \tilde{e}_k - e_k - d_{k-1}, \quad (10)$$

所以

$$\sum_{i=0}^k (e_i - \tilde{e}_i) = e_k - \tilde{e}_k + \sum_{i=0}^{k-1} (e_i - \tilde{e}_i) = -d_{k-1}. \quad (11)$$

根据假设1, 将式(11)代入(9). 当  $k \geq k^*$  时  $\tilde{e}_{k+1} = 0$ , 所以  $|e_{k+1}| = |d_{k+1} - d_k| = |\Delta d_k| \leq M_d < M$ . 可见, 在误差动态(9)的作用下, 稳态跟踪误差降低. 式(9)本质上是在满足假设1的情况下, 把连续信号  $d(t)$  看成具有零阶保持特性的信号, 以  $d_{k-1}$  估计  $d_k$  来得到小的补偿误差. 将式(9)代入(8), 得到采用零阶补偿的重复控制器

$$u_k = u_{k-N} - \frac{1}{b_1} \left[ e_k - e_{k+1-N} - \sum_{i=0}^k (e_i - \tilde{e}_i) - \min\{m|e_k|^\alpha, |e_k|\} \text{sgn}(e_k) + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1}(u_{k-i} - u_{k-N-i}) - r_{k+1} - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(y_{k-i} - y_{k-N-i}) + r_{k+1-N} \right]. \quad (12)$$

式(12)的优势在于: 1) 对慢变扰动信号作出动态补偿, 得到小的补偿误差; 2) 利用自身历史量测数据的累加, 计算工作量小; 3) 不需要知道  $d_k$  的界和中值.

#### 3.3 一阶误差动态补偿

零阶补偿法仅利用了前一采样瞬间的测量值, 未能考虑采样间隔的变动情况. 考虑采样间隔扰动信

息的一阶补偿原理如图1所示。

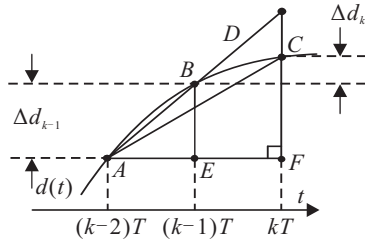


图1 一阶扰动估计

图1中A和B为慢变扰动 $d(t)$ 在 $(k-2)T$ 时刻开始的连续两个采样点,取值分别为 $d_{k-2}$ 和 $d_{k-1}$ ,C为 $kT$ 时刻未知的采样点 $d_k$ .过A、B点作一条直线,延长到 $kT$ 时刻得到D点.过A点作水平线经过 $(k-1)T$ 和 $kT$ 时刻分别为E点和F点.直线段BE的长度 $BE = d_{k-1} - d_{k-2} = \Delta d_{k-1}$ ,直线段CF的长度 $CF = d_k - d_{k-2} = \Delta d_k + \Delta d_{k-1}$ .当采样周期 $T$ 很小时,两个相邻采样间隔内的波形具有较好的线性度,对应图1中直线段AC与AD非常接近.特别地,当 $T \rightarrow 0$ 时,AC与AD重合.因此,当 $T$ 足够小时,可以以线段DF近似线段CF,带来的误差(即直线段DC的长)为

$$DC = DF - CF = 2BE - CF = 2\Delta d_{k-1} - (\Delta d_k + \Delta d_{k-1}) = -\Delta^2 d_k. \quad (13)$$

根据这一原理,本文对式(9)进行改进,得到新的误差动态

$$e_{k+1} = e_k - \min\{m|e_k|^\alpha, |e_k|\} \operatorname{sgn}(e_k) - d_k + d_{k-1} - \sum_{i=0}^k (e_i - \tilde{e}_i). \quad (14)$$

对于任意 $k \geq 1$ ,均满足

$$\sum_{i=0}^{k-1} (e_i - \tilde{e}_i) = \tilde{e}_k - e_k - d_{k-1} + d_{k-2}. \quad (15)$$

所以

$$\sum_{i=0}^k (e_i - \tilde{e}_i) = e_k - \tilde{e}_k + \sum_{i=0}^{k-1} (e_i - \tilde{e}_i) = -d_{k-1} + d_{k-2}. \quad (16)$$

将式(16)代入(14),当 $k \geq k^*$ 时,有 $|e_{k+1}| = |2d_{k-1} - d_k - d_{k-2}| = |\Delta^2 d_k| \leq M_s$ .从构思上,吸引律(14)把 $d(t)$ 看成具有一阶保持特性的信号,以 $2d_{k-1} - d_{k-2}$ 补偿 $d_k$ ,当假设1成立时,存在更小的误差上界 $M_s$ .

将式(14)代入(8),得到一阶补偿重复控制器

$$u_k = u_{k-N} - \frac{1}{b_1} \left[ e_k - e_{k+1-N} - \sum_{i=0}^k (e_i - \tilde{e}_i) - \min\{m|e_k|^\alpha, |e_k|\} \operatorname{sgn}(e_k) + d_{k-1} + \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1}(u_{k-i} - u_{k-N-i}) - r_{k+1} - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(y_{k-i} - y_{k-N-i}) + r_{k+1-N} \right]. \quad (17)$$

显然,控制器(17)依赖于误差动态方程和自身历史运行数据,是实际可行的。

**注2** 根据定义式 $d_k = w_k - w_{k-N}$ 和 $w_k$ 的有界性可知, $d_k$ 不可能始终保持正值或者负值.所以 $\Delta d_k = d_k - d_{k-1}$ 时正时负.显然,在 $\Delta d_k$ 由负变正的过程中 $\Delta^2 d_k > 0$ ;在 $\Delta d_k$ 由正变负的过程中 $\Delta^2 d_k < 0$ .因此,不论采用零阶补偿还是一阶补偿 $d_k$ ,补偿误差均时正时负。

#### 4 鲁棒稳定性

**定理2** 若系统(1)受到的不规则扰动分量 $w_k^r$ 满足假设1,则控制器(17)驱使跟踪误差单调收敛,且在有限时间内进入并稳定在半径为 $\Delta_{SS}$ 的原点邻域内. $\Delta_{SS}$ 为系统稳态误差带边界,表达式为

$$\Delta_{SS} = \max \left\{ M_s, \left( \frac{M_s}{m} \right)^{1/\alpha} \right\}. \quad (18)$$

**证明** 记 $\hat{d}_k$ 为扰动 $d_k$ 的补偿值,则控制器(17)的补偿误差 $|d_k - \hat{d}_k| = |\Delta^2 d_k| \leq M_s$ .以下根据吸引律参数的取值分两种情形讨论。

情形1:取 $m \geq M_s^{1-\alpha}$ ,则 $m^{1/(1-\alpha)} \geq \left( \frac{M_s}{m} \right)^{1/\alpha}$ .

1)当 $e_k > m^{1/(1-\alpha)}$ 时,误差动态方程和相邻控制步误差变化量为

$$\begin{cases} e_{k+1} = e_k - m e_k^\alpha + (\hat{d}_k - d_k), \\ \Delta e_k = e_{k+1} - e_k = -m e_k^\alpha + (\hat{d}_k - d_k). \end{cases} \quad (19)$$

因为 $e_k > \left( \frac{M_s}{m} \right)^{1/\alpha}$ ,所以 $\Delta e_k \leq M_s - m e_k^\alpha < 0$ ,即误差值单调递减.由式(19)和 $e_k$ 的取值范围可知 $e_{k+1} > \hat{d}_k - d_k \geq -M_s$ ,所以 $-M_s < e_{k+1} < e_k$ .

根据前文分析,一阶动态补偿误差 $d_k - \hat{d}_k$ 时正时负,且 $M_s$ 为 $d_k - \hat{d}_k$ 的上界.设常数 $-M_s < \lambda < M_s$ , $\varepsilon = m^{1/(1-\alpha)} + \lambda$ ,则随着时间的推移,必定存在包含无限多元素的整数集 $K$ ,使得当 $k \in K$ 时,满足 $d_k - \hat{d}_k > \lambda$ .因此,当 $k \in K$ 时, $|\Delta e_k| = m e_k^\alpha + d_k - \hat{d}_k > m^{1/(1-\alpha)} + \lambda = \varepsilon$ ,即误差收敛步长不小于 $\varepsilon$ ,所以必定在有限控制步后满足 $-M_s < e_{k+1} \leq m^{1/(1-\alpha)}$ .

2)当 $|e_k| < m^{1/(1-\alpha)}$ 时,由式(3)可得 $e_{k+1} = d_k - \hat{d}_k \in [-M_s, M_s]$ .

3)同理可得,当 $e_k < -m^{1/(1-\alpha)}$ 时,误差值单调递增,且在有限控制步后满足 $-m^{1/(1-\alpha)} \leq e_{k+1} < M_s$ .所以稳态误差在有限时间内收敛进入半径为 $M_s$ 的原点邻域内。

情形2:取  $m < M_s^{1-\alpha}$ , 则  $m^{1/(1-\alpha)} < \left(\frac{M_s}{m}\right)^{1/\alpha}$ .

1) 当  $|e_k| > \left(\frac{M_s}{m}\right)^{1/\alpha} > m^{1/(1-\alpha)}$  时, 误差动态情况与情形1中当  $|e_k| > m^{1/(1-\alpha)}$  时相同, 稳态误差在有限时间内收敛进入半径为  $M_s$  的原点邻域内.

2) 当  $m^{1/(1-\alpha)} < e_k \leq \left(\frac{M_s}{m}\right)^{1/\alpha}$  时, 误差动态方程与式(19)同. 根据  $e_k$  的取值范围和  $\hat{d}_k - d_k$  的变化范围可得  $\Delta e_k \in [-2M_s, M_s - m^{1/(1-\alpha)})$ , 所以  $\Delta e_k$  正负皆有可能. 根据式(19)和  $e_k$  的取值范围可知

$$e_{k+1} = e_k \left(1 - \frac{m}{e_k^{1-\alpha}}\right) + d_k - \hat{d}_k \in \left(-M_s, \left(\frac{M_s}{m}\right)^{1/\alpha}\right]. \quad (20)$$

3) 当  $|e_k| < m^{1/(1-\alpha)}$  时, 根据式(3)可得  $e_{k+1} = \hat{d}_k - d_k \in [-M_s, M_s]$ .

4) 同理可得, 当  $-\left(\frac{M_s}{m}\right)^{1/\alpha} \leq e_k < -m^{1/(1-\alpha)}$  时,  $e_{k+1} \in \left[-\left(\frac{M_s}{m}\right)^{1/\alpha}, M_s\right]$ . 又因为  $\left(\frac{M_s}{m}\right)^{1/\alpha} > M_s$ , 所以稳态误差进入半径为  $\left(\frac{M_s}{m}\right)^{1/\alpha}$  的原点邻域内.

综合以上两种情形, 稳态误差带边界  $\Delta_{SS}$  满足式(18).  $\square$

由定理2可知, 系统稳态误差带宽与扰动补偿误差上界有直接关系, 且随吸引律参数  $m$  的增大而降低, 直至  $m \geq M_s^{1-\alpha}$  时,  $\Delta_{SS} = M_s$ . 根据控制器表达式, 当  $|e_k|$  较大时, 处于吸引律的非线性部分, 过大的  $m$  要求大的控制量  $u_k$ . 因此, 应在考虑实际控制器输出能量限制的前提下选择合适的参数值.

由于工业现场的工况复杂, 实际系统扰动中常包含有不满足假设1的高频成份, 若高频成份有界, 则可通过定理3给出系统稳态性能.

**定理3** 若系统(1)的相邻周期扰动变化量  $d_k$  可分解为满足假设1的低频部分  $d_k^r$  和绝对值上界为  $M_g$  的高频部分  $d_k^g$ , 则采用控制器(17)使得跟踪误差单调收敛直至进入并稳定在半径为  $\tilde{\Delta}_{SS}$  的原点邻域内, 其中  $\tilde{\Delta}_{SS}$  为

$$\tilde{\Delta}_{SS} = \max \left\{ M_s + 4M_g, \left(\frac{M_s + 4M_g}{m}\right)^{1/\alpha} \right\}. \quad (21)$$

**证明** 上文考虑  $w_k^r$  满足假设1, 即  $d_k^g = 0$ . 此时的扰动变化量为  $d_k$ . 令包含高频部分的总扰动在  $kT$  时刻的取值为  $\tilde{d}_k$ . 考虑最坏情况, 图1中A、B和C点取值分别为

$$\begin{cases} \tilde{d}_{k-2} = d_{k-2} \pm M_g, \\ \tilde{d}_{k-1} = d_{k-1} \mp M_g, \\ \tilde{d}_k = d_k \pm M_g. \end{cases} \quad (22)$$

则  $\Delta \tilde{d}_k = \Delta d_k \pm 2M_g, \Delta \tilde{d}_{k-1} = \Delta d_{k-1} \mp 2M_g$ . 以

$\Delta \tilde{d}_k$  和  $\Delta \tilde{d}_{k-1}$  分别代替式(13)中的  $\Delta d_k$  和  $\Delta d_{k-1}$ , 得到扰动补偿误差为  $\Delta d_{k-1} - \Delta d_k \mp 4M_g$ . 因此误差绝对值上界  $\tilde{M}_s = M_s + 4M_g$ . 以  $\tilde{M}_s$  替代  $M_s$ , 通过与定理2相同的方法可知稳态误差界满足式(21).  $\square$

定理3拓展了控制器(17)的应用范围, 使之符合更复杂的实际工况. 特别地, 当  $M_g \ll M_s$  时, 式(21)给出的稳态界误差带宽接近式(18)的结论. 同理可知, 当存在高频扰动时, 在无扰动补偿(令控制器(8)中  $d_k = 0$ )的情况下,  $|d_k|$  的上界  $\tilde{M} = M + M_g$ , 得到的稳态误差界

$$\tilde{\Delta}_{SS} = \max \left\{ M + M_g, \left(\frac{M + M_g}{m}\right)^{1/\alpha} \right\}. \quad (23)$$

采用零阶补偿控制器(12)的误差绝对值上界  $\tilde{M}_d = M_d + 2M_g$  得到的稳态误差界为

$$\tilde{\Delta}_{SS} = \max \left\{ M_d + 2M_g, \left(\frac{M_d + 2M_g}{m}\right)^{1/\alpha} \right\}. \quad (24)$$

对比式(21)、(23)和(24)可知, 理论上, 当  $2M_g > M_d - M_s$  时, 采用零阶补偿较一阶补偿得到更小的稳态误差上界; 当  $M_g > M - M_d$  时, 采用无补偿控制器可以得到更小的稳态误差上界. 因此, 实际应用时应根据  $M_d$ 、 $M_s$  和  $M_g$  的值选取合适的补偿方法.

### 5 数值仿真与实验结果

为了验证所提出的设计方法, 对一伺服电机的转角位置跟踪系统分别进行仿真和实验. 该系统以DSP作为控制器, 通过内置速度环与电流环的EMLO驱动器控制100W伺服电机. 增量式光栅编码器反馈转角位置与DSP形成闭环控制系统. 驱动器和电机本体采用最小二乘法辨识, 得到二阶定常系统模型

$$y_{k+1} + a_1 y_k + a_2 y_{k-1} = b_1 u_k + b_2 u_{k-1} + w_k. \quad (25)$$

其中:  $a_1 = -0.5385, a_2 = 0.2504, b_1 = 0.3606, b_2 = 0.2358$ , 干扰项  $w_k$  表示各种未建模特性.

#### 5.1 仿真结果

仿真时, 给定参考信号  $r_k = 30 \sin\left(2\pi f T k + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f = 0.25 \text{ Hz}, T = 5 \text{ ms}$ . 系统(1)中取干扰项为

$$w_k = 2 \sin\left(2\pi f k + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(3\pi f k + \frac{\pi}{3}\right) + 0.2 + \sin(55.4\pi f k) + w_k^g. \quad (26)$$

其中: 前两项为参考信号整数倍频率的规则分量; 第3项为常值; 第4项为不规则分量; 第5项为存在不满足假设1的高频扰动, 具体形式为

$$w_k^g = \begin{cases} 0, & t < 10\text{s}; \\ 0.1 \text{rand}(k), & t > 10\text{s}. \end{cases} \quad (27)$$

其中  $\text{rand}(\cdot)$  为值域  $[-0.5, 0.5]$  内的随机函数. 10s前  $w_k^g = 0$ , 10s后以随机数模拟  $w_k^g, |w_k^g - w_{k-N}^g|$  的上界

$M_g = 0.1$ . 当  $t \leq 10$  s 时, 根据三角函数公式易知

$$\begin{cases} d_k = -1.618 \cos(55.4\pi f k - 27.7\pi f N), \\ \Delta d_k = -0.3513 \sin(55.4\pi f k - 27.7\pi f(N+1)), \\ \Delta^2 d_k = -0.0763 \cos(55.4\pi f k - 27.7\pi f(N+2)). \end{cases} \quad (28)$$

因此  $M = 1.618, M_d = 0.351, M_s = 0.076$ . 当  $t > 10$  s 时,  $\tilde{M} = M + M_g = 1.718, \tilde{M}_d = M_d + 2M_g = 0.551, \tilde{M}_s = M_s + 4M_g = 0.476$ . 选择吸引律参数  $m = 1.5, \alpha = 0.5$ , 在无扰动补偿的情况下采用重复控制器(8)得到跟踪误差如图2(a)和图2(b)所示. 考虑扰动补偿, 分别采用控制器(12)和(17)得到跟踪误差如图2(c)、图2(d)和图2(e)、图2(f)所示.

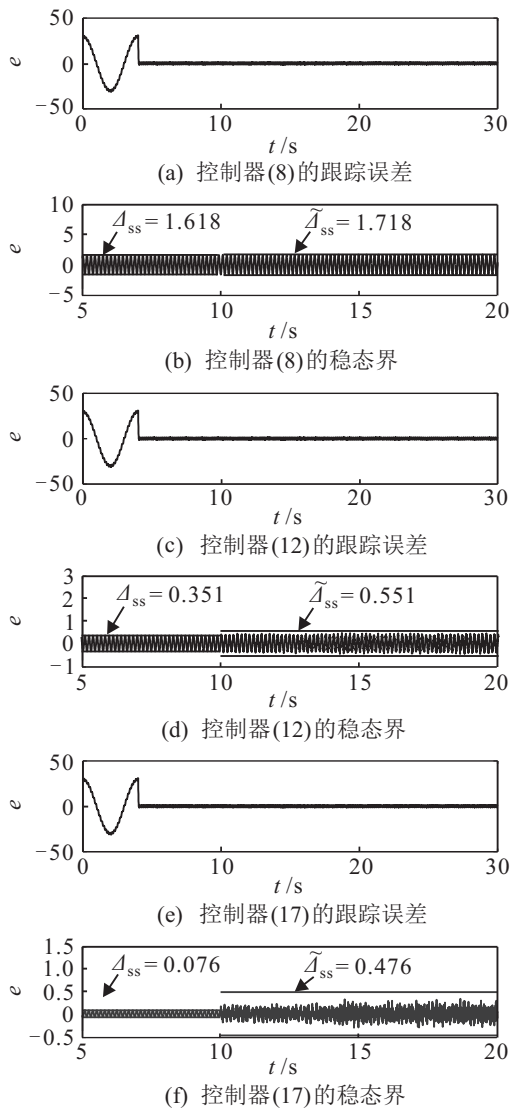


图2 跟踪误差和稳态界

重复控制器存在一周期的时延, 需要前一周期的历史数据. 当  $k < N$  时, 令  $u_k = 0$ , 因此跟踪误差从第2周期开始收敛. 由图2可知, 采用3种控制器得到的稳态误差均在定理1和定理2给出的边界值内, 控制器(17)对应的一阶补偿使得稳态误差明显下降.

### 5.2 实验结果

为检验所提控制方法的有效性, 给出转角位置跟踪控制实验结果. 设参考信号  $r_k = 135 \sin(2\pi f T k + \frac{\pi}{2})$  deg, 参数  $m, \alpha, f$  和  $T$  与仿真时相同. 实验中人为引入位置测量误差  $0.15 \sin(3.3\pi f T k + \frac{\pi}{7})$  deg 来模拟系统慢变扰动  $w_k^r$ . 采用无扰动补偿的控制器(8)得到扰动信息  $d$  和跟踪误差  $e$  如图3(a)和图3(b)所示. 分别采用带扰动补偿的控制器(12)和(17)得到扰动信息和跟踪误差如图3(c)、图3(d)和图3(e)、图3(f)所示. 其中扰动信息根据下式得到:

$$\begin{cases} w_{k-1} = y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} - \\ b_1 u_{k-1} - b_2 u_{k-2}, \\ d_{k-1} = w_{k-1} - w_{k-1-N}. \end{cases} \quad (29)$$

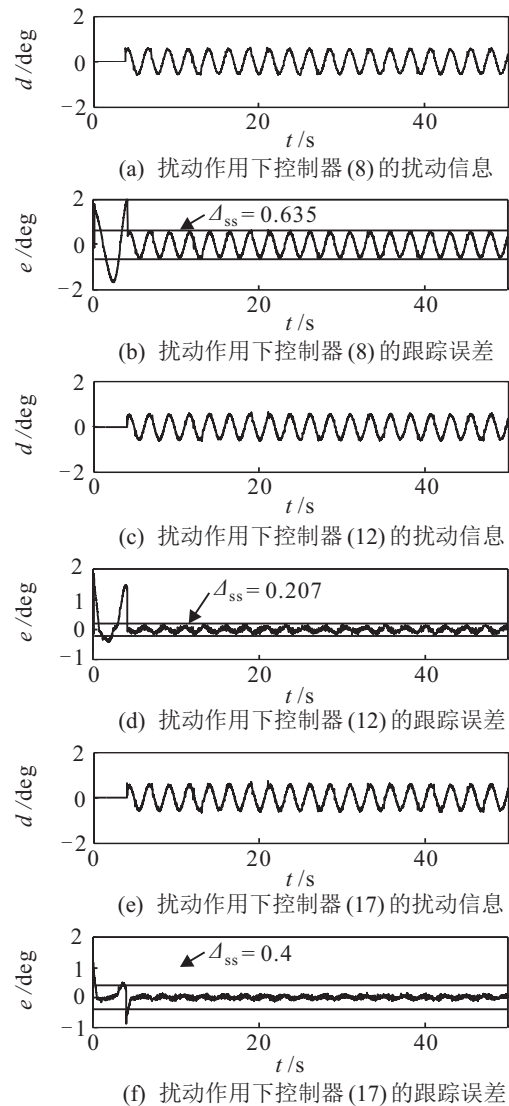


图3 跟踪性能

由于存在一周期的时延, 令  $d_k = 0 (k < N)$ , 第一周期未能消除规则扰动. 图3中水平虚线为根据式(21)~(23)得到的稳态误差界, 其中  $M_g$  约为0.1. 根

据三角函数公式可得  $M = 0.535$ ,  $M_d = 0.007$ ,  $M_s = 8.9 \times 10^{-5}$ . 因为  $2M_g > M_d - M_s$ , 所以理论上零阶补偿控制器(12)较一阶补偿控制器(17)有更小的稳态误差. 然而, 在  $\Delta^2 d_k$  的峰值处相邻三采样点的取值同时满足式(22)的机率很低, 实验中并未出现这种情况, 所以实际上控制器(17)在稳态阶段(10s之后)取得更小的稳态误差.

## 6 结 论

本文针对一类周期参考信号下不确定离散系统的跟踪控制问题, 提出无抖振误差吸引律, 并讨论了误差动态补偿方法用于构造理想误差动态方程以设计重复控制器. 文中分析了吸引律单调收敛性和收敛时间, 在扰动有界的假设下详细推导了不确定系统稳态误差带边界, 并通过数值仿真进行了验证. 伺服电机转角位置跟踪控制实验表明, 所提出的方法能够明显降低慢变扰动的影响, 有效提高跟踪精度.

### 参考文献(References)

- [1] Gao W B, Wang Y F, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.
- [2] 孙明轩, 范伟云, 王辉. 用于离散滑模重复控制的新型趋近律[J]. 自动化学报, 2011, 37(10): 1213-1221. (Sun M X, Fan W Y, Wang H. Discrete sliding mode repetitive control with novel reaching law[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(10): 1213-1221.)
- [3] 孙彪, 孙秀霞, 陈琳, 等. 基于幂函数的离散滑模控制算法[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 285-288. (Sun B, Sun X X, Chen L, et al. Algorithm of discrete-time sliding mode control based on power-function[J]. Control and Decision, 2011, 26(2): 285-288.)
- [4] Wang A M, Jia X W, Dong S H. A new exponential reaching law of sliding mode control to improve performance of permanent magnet synchronous motor[J]. IEEE Trans on Magnetics, 2013, 49(5): 2409-2412.
- [5] Golo G, Milosavjevic C. Robust discrete-time chattering free sliding mode control[J]. Systems & Control Letters, 2000, 41(1): 19-28.
- [6] 刘希, 孙秀霞, 董文瀚, 等. 无抖振离散滑模趋近律[J]. 控制与决策, 2013, 28(8): 1277-1280. (Liu X, Sun X X, Dong W H, et al. Chattering-free trending law for discrete-time sliding mode control[J]. Control and Decision, 2013, 28(8): 1277-1280.)
- [7] 刘希, 孙秀霞, 董文瀚, 等. 一种新的约束变速趋近律离散滑模[J]. 自动化学报, 2013, 39(9): 1552-1557. (Liu X, Sun X X, Dong W H, et al. A new discrete-time sliding mode control method based on restricted variable trending law[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(9): 1552-1557.)
- [8] 张合新, 范金锁, 孟飞, 等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 289-293. (Zhang H X, Fan J S, Meng F, et al. A new double power reaching law for sliding mode control[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 289-293.)
- [9] 张瑶, 马广富, 郭延宁, 等. 一种多幂次滑模趋近律设计与分析[J]. 自动化学报, 2016, 42(3): 466-472. (Zhang Y, Ma G F, Guo Y N, et al. A multi power reaching law of sliding mode control design and analysis[J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(3): 466-472.)
- [10] Andrzej Bartoszewic. Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1998, 45(4): 633-637.
- [11] 翟长连, 吴智铭. 不确定离散时间系统的变结构控制设计[J]. 自动化学报, 2000, 26(2): 184-191. (Zhai C L, Wu Z M. Variable structure control design for uncertain discrete time systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(2): 184-191.)
- [12] Qu S C, Xia X H, Zhang J F. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2014, 61(7): 3502-3510.
- [13] Eun Y, Kim J, Kim K, et al. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 1999, 7(4): 414-423.
- [14] Zhang X G, Sun L Z, Zhao K, et al. Nonlinear speed control for PMSM system using sliding-mode control and disturbance compensation techniques[J]. IEEE Trans on Power Electronics, 2013, 28(3): 1358-1365.
- [15] Andrzej Bartoszewicz, Piotr Lesniewski. Reaching law approach to the sliding mode control of periodic review inventory systems[J]. IEEE Trans on Automation Science and Engineering, 2014, 11(3): 810-817.
- [16] Andrzej Bartoszewicz, Piotr Lesniewski. New switching and nonswitching type reaching laws for SMC of discrete time systems[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2016, 24(2): 670-677.
- [17] Inoue T, Iwai S, Nakano M. High accuracy control of a proton synchrotron magnet power supply[C]. Proc of the 8th IFAC World Congress. Oxford: Pergamon Press, 1981: 3137-3142.
- [18] Hara S, Yamamoto Y, Omata T, et al. Repetitive control system: A new type servo system for periodical exogenous signals[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(7): 659-668.
- [19] Sun M X, Xie H Y, Wang H. Switching-function dynamics designs for uncertain variable structure system with repetitive control[J]. Int J of Control, 2011, 84(7): 1196-1208.