

一种求解线性控制系统可达集的数值方法

邵立珍^{1†}, 赵方园¹, 胡广大²

(1. 北京科技大学 自动化学院, 北京 100083; 2. 上海大学 数学系, 上海 200444)

摘要: 针对线性控制系统, 研究应用常微分方程数值方法和优化技术相结合的近似可达集的方法. 首先, 用常微分方程数值方法对系统进行离散化. 然后, 提出基于优化技术的外部投影法来近似离散系统的可达集. 外部投影法构造有限多个投影问题, 每个都对应一个凸优化问题, 通过求解这些凸优化问题最终可以得到可达集的近似描述. 最后, 通过数值仿真结果验证了所提出方法的有效性. 与文献中已有的方法相比, 在求解相同数量凸优化问题的情况下, 外部投影法的近似精度更高.

关键词: 可达集; 线性系统; 凸优化

中图分类号: TP13

文献标志码: A

A numerical method for reachable sets of linear control systems

SHAO Li-zhen^{1†}, ZHAO Fang-yuan¹, HU Guang-da²

(1. School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China; 2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: The approximation of the reachable set of a linear control system is studied. Firstly, the continuous system is discretized into a discrete system by using numerical methods for ordinary differential equations. Then an outer projection method based on optimization techniques is proposed to approximate the reachable set of the discrete system. The outer projection method constructs a finite number of projection problems and each one corresponds to a convex optimization problem. The approximation of the reachable set is achieved by solving finite convex optimization problems. Finally, numerical results show the effectiveness of the proposed method. Compared to the methods in the literatures, when solving the same number of convex optimization problems, the approximation set obtained by using the proposed method is better.

Keywords: reachable set; linear system; convex optimization

0 引言

可达集的定界问题最初是在 20 世纪 60 年代提出的, 随后引起了众多学者的关注. 系统在某一时刻 t 的可达集是指从初始状态出发, 在 t 时刻能够达到的状态的集合. 确定可达集的边界对于分析系统的动态性能、设计系统控制器具有重要的实际意义. 可达集的研究可广泛地应用在众多学科领域. 例如, 在对飞行器的变轨操作过程中, 通过对飞行器轨道的可达集进行分析, 可以帮助洞察在给定时间以及几何形态约束下如何重新调整控制使飞行器达到另外一种几何状态^[1-2]; 在选择飞行器着陆点时, 确定飞行器的可达着陆区域是一个必要的前提^[3]; 研究截击导弹运动轨迹的可达集, 可以帮助确定导弹的拦截范围^[4]; 对

制导炸弹运动轨迹的可达集进行分析, 可以用于计算制导炸弹的目标命中区域^[5]. 此外, 可达集的研究还能应用于基因表达控制^[6]、目标追击躲避^[7]等领域.

目前, 针对可达集的研究已取得了一定的成果, 各种求解可达集的方法相继提出. 文献 [8-12] 通过构造一个 Lyapunov 函数得到系统可达集的近似椭球描述; 文献 [7] 将可达集描述为一个 Hamilton-Jacobi 偏微分方程粘性解的零水平集, 然后利用水平集方法得到该偏微分方程的数值解, 进而得到系统的可达集近似; 文献 [13-14] 利用外部和内部椭球估计的方法研究了线性系统的可达集; 文献 [15] 采用几何近似的方法不断逼近可达集的边界. 上述研究均是直接近似连续系统可达集的方法. 此外, 文献中也有利用离

收稿日期: 2016-02-29; 修回日期: 2016-06-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11371053); 北京市自然科学基金项目 (4152034).

作者简介: 邵立珍 (1976—), 女, 副教授, 博士, 从事最优化方法、智能优化控制理论及应用等研究; 胡广大 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事微分方程数值方法、精密机电系统的非线性控制等研究.

[†]通讯作者. E-mail: lshao@ustb.edu.cn

散系统的可达集来近似连续系统可达集的理论和方法. 例如, 文献[16]给出了采用离散系统可达集近似连续系统可达集的理论依据, 指出了连续系统的可达集与其相应的离散系统可达集之间的Hausdorff距离有上界, 且上界值取决于离散化方法; 文献[17]针对线性系统提出了用一系列支撑超平面构造离散系统可达集的方法, 然而该方法没有对最终近似结果给予整体定量评价.

本文运用文献[16]的理论知识, 研究采用常微分方程数值方法和优化技术相结合的方法来近似地描述线性系统的可达集. 首先, 对线性系统及其可达集进行描述; 然后, 介绍离散化后的系统及其相应的离散可达集, 进一步提出近似离散系统可达集的外部投影法; 最后, 将该方法与文献[17]中的方法进行数值仿真对比, 给出仿真和定量分析结果, 验证所提出方法的有效性和优越性.

本文的主要贡献在于提出基于凸优化技术的外部投影法直接近似离散系统的可达集. 该方法简单, 易于实施. 与文献[17]中同样基于凸优化技术的方法相比, 外部投影法得到的可达集边界点分布更加均匀, 在用同样数量可达集边界点近似描述的情况下, 本文方法得到的近似误差更小.

1 线性系统及其可达集

考虑线性动态系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ u(t) \in \mathcal{U}. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态向量; $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为系统矩阵; $B(t) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为控制矩阵; $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 为系统的初始状态; $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^m$ 为一个非空凸紧集; $t \in [t_0, t_f]$, 其中 t_0 和 t_f 分别为动态系统的初始时刻和终点时刻, 且 $t_0 < t_f$.

定义1 系统(1)从初始条件 (t_0, x_0) 出发, 在 t_f 时刻的可达集可定义如下:

$$R(t_f, t_0, x_0) := \{y \in \mathbf{R}^n : \exists u(\cdot) \text{ s.t. } x(t_f) = y\}. \quad (2)$$

引理1^[18] 系统(1)的可达集 $R(t_f, t_0, x_0)$ 是一个非空凸紧集.

2 连续系统的离散化

在 $[t_0, t_f]$ 时间内, 取等间隔时间点 $t_i = t_0 + ih$, $h = (t_f - t_0)/N$, $i = 0, 1, \dots, N$, 假定控制函数 $u(t)$ 在 $[t_i, t_{i+1}]$ 间隔内恒定为 $\tilde{u}(t_i)$, 采用欧拉法对系统(1)

离散化, 可得

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t_{i+1}) &= \tilde{x}(t_i) + h(A(t_i)\tilde{x}(t_i) + B(t_i)\tilde{u}(t_i)), \\ i &= 0, 1, \dots, N-1; \\ \tilde{u}(t_i) &\in \mathcal{U}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \\ \tilde{x}(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3)$$

定义2 对于离散系统(3), 从初始条件 (t_0, x_0) 出发, 在 t_N 时刻的可达集可定义如下:

$$\tilde{R}(t_N, t_0, x_0) := \{y \in \mathbf{R}^n : \exists \tilde{u}(\cdot) \text{ s.t. } \tilde{x}(t_N) = y\}. \quad (4)$$

引理2^[17] 对于系统(1), 如果 $B(t)$ 是一个有界函数, 则其相应的离散系统(3)的可达集 $\tilde{R}(t_N, t_0, x_0)$ 是一个非空凸紧集.

定义3 设 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 是 \mathbf{R}^n 空间的子集, 并且 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 均是非空凸集, 则 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 之间的Hausdorff距离可以定义如下:

$$d_H(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max\{d(\mathbf{A}, \mathbf{B}), d(\mathbf{B}, \mathbf{A})\}, \quad (5)$$

其中

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup_{a \in \mathbf{A}} \inf_{b \in \mathbf{B}} \|a - b\|_2.$$

引理3^[16] 设 $R(t_f, t_0, x_0)$ 为系统(1)的可达集, $\tilde{R}(t_N, t_0, x_0)$ 为其相应的离散系统(3)的可达集, 则存在一个常数 C , 使得

$$d_H(R(t_f, t_0, x_0), \tilde{R}(t_N, t_0, x_0)) \leq Ch, \quad (6)$$

其中离散系统的步长为

$$h = (t_f - t_0)/N.$$

引理3说明了离散系统可达集 $\tilde{R}(t_N, t_0, x_0)$ 与连续系统可达集 $R(t_f, t_0, x_0)$ 之间的Hausdorff距离有上界, 且上界值与离散系统的步长 h 成正比, h 越小, 相应的Hausdorff距离的上界也越小. 该引理为用 $\tilde{R}(t_N, t_0, x_0)$ 近似 $R(t_f, t_0, x_0)$ 提供了理论依据, 本文沿用这种思想, 主要研究求离散系统可达集 $\tilde{R}(t_N, t_0, x_0)$ 的方法.

注1 本节只介绍欧拉法, 对于其他的数值离散化方法如龙格-库塔法、线性多步法等, 读者请参考文献[19]. 需要指出的是, 本文提出的外部投影法是一种求解离散系统可达集的方法, 该方法不依赖于具体的数值离散化方法.

3 外部投影法

外部投影法主要运用投影优化技术来得到离散系统可达集的边界点, 并根据线性系统可达集的凸性将边界点的凸包作为可达集的近似描述. 外部投影法主要包括: 放置外部参考点和投影计算边界点两

个主要部分.

3.1 放置外部参考点

1) 构造多面体 S 使得 $\tilde{R}(t_N, t_0, x_0) \subseteq S$.

假定系统的初始条件 (t_0, x_0) 已知, 在 t_N 时刻状态变量 $\tilde{x}(t_N)$ 的第 j 个分量 $\tilde{x}_j(t_N)$ 的最小和最大值可以通过求解如下两个优化问题得到:

$$\min \tilde{x}_j(t_N), \text{ s.t. 式(3)成立}; \quad (7)$$

$$\max \tilde{x}_j(t_N), \text{ s.t. 式(3)成立}. \quad (8)$$

其中 $j \in 1, 2, \dots, n$.

将问题(7)和(8)求解得到的最优目标函数值分别记作 $\tilde{x}_j^{\min}(t_N)$ 和 $\tilde{x}_j^{\max}(t_N)$, 令

$$P_{\min} = (\tilde{x}_1^{\min}(t_N), \tilde{x}_2^{\min}(t_N), \dots, \tilde{x}_n^{\min}(t_N))^T, \quad (9)$$

$$P_{\max} = (\tilde{x}_1^{\max}(t_N), \tilde{x}_2^{\max}(t_N), \dots, \tilde{x}_n^{\max}(t_N))^T, \quad (10)$$

则对于离散系统可达集 $\tilde{R}(t_N, t_0, x_0)$ 中的任何一点 $\tilde{x}(t_N)$, 均有 $P_{\min} \leq \tilde{x}(t_N) \leq P_{\max}$ 成立. 由此可构造多面体

$$S = \{P_{\min} + \mathbf{R}_+^n\} \cap \{P_{\max} - \mathbf{R}_+^n\}. \quad (11)$$

其中: $\mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$, 显然 $\tilde{R}(t_N, t_0, x_0) \subseteq S$.

2) 在多面体表面放置参考点.

设多面体 S 的表面由 k 个面 F_1, F_2, \dots, F_k 组成, 对于二维系统有 $k = 4$, 三维系统有 $k = 6$. 对于每个面 F_i , 都可通过其顶点的不同线性组合得到在面上分布的一组参考点. 具体地, 设面 F_i 有 p 个顶点 V^1, V^2, \dots, V^p , 则 F_i 上的一个参考点 P_i^j 可以表示为

$$P_i^j = \sum_{m=1}^p \alpha_m^j V^m. \quad (12)$$

其中: $0 \leq \alpha_m^j \leq 1, \sum_{m=1}^p \alpha_m^j = 1$.

对于每个面 F_i 均设置一组 α^j , 其个数可由决策者根据想要的相邻参考点的距离或可达集边界点的个数决定, 最终可以得到分布在 S 表面上的 o 个参考点 $P_{\text{ref}}^1, P_{\text{ref}}^2, \dots, P_{\text{ref}}^o$.

二维系统的外部投影法如图1所示.

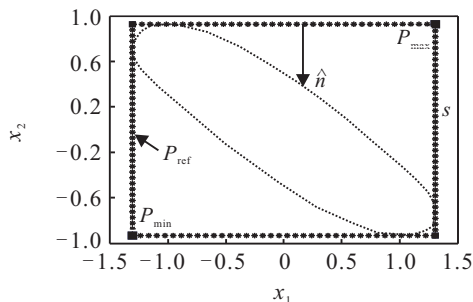


图1 一个二维系统的外部投影法

图1展示了一个二维线性系统可达集对应的外部多面体 S 和多面体上均匀分布的152个参考点以及得到的可达集边界点.

3.2 投影计算可达集边界点

对于每一个参考点 $P_{\text{ref}}^k, k = 1, 2, \dots, o$, 将其沿着边界面的法向量方向投影到可达集上, 找出对应的可达集边界点. 投影问题是通过求解如下的优化问题来实现的:

$$\begin{cases} \min r^k; \\ \text{s.t. } P_{\text{ref}}^k + r^k \hat{n}^k = \tilde{x}(t_N), \\ \text{式(3)成立}. \end{cases} \quad (13)$$

其中 \hat{n}^k 表示在参考点 P_{ref}^k 处边界面的法向量方向(指向可达集的一方, 如图1所示).

将问题(13)的最优目标函数值记为 r^{k*} , 则与参考点 P_{ref}^k 对应的 $\tilde{R}(t_N, t_0, x_0)$ 上的边界点为

$$Q^k = P_{\text{ref}}^k + r^{k*} \hat{n}^k. \quad (14)$$

相应地, 最优解中的 $\tilde{x}(t_i) (i = 0, 1, \dots, N-1)$ 描述了达到可达集边界点的最优状态轨迹, $\tilde{u}(t_i)$ 反映了对应的最优控制.

最后, 用得到的所有边界点的凸包 \tilde{R}' 来近似系统的可达集 \tilde{R} , 即有

$$\tilde{R}'(t_N, t_0, x_0) = \text{co} \left(\bigcup_{i=1}^o Q^i \right), \quad (15)$$

其中 $\text{co}(\cdot)$ 表示集合的凸包. 显然 $\tilde{R}' \subseteq \tilde{R}$, 即 \tilde{R}' 是 \tilde{R} 的内部近似.

注2 1) 外部投影法的参考点分布以及投影方向决定了边界点的分布, 不同分布的参考点和投影方向得到的可达集边界点不同, 进而得到可达集的近似描述不同. 2) 当均匀分布的参考点的个数逐渐增加时, 相邻参考点之间的距离逐渐减小, 相应的可达集边界点的个数逐渐增加, 进而相邻可达集边界点之间的距离逐渐减小; 当均匀分布的参考点的个数趋于无穷时, 相邻参考点之间的距离趋于0, 对应的可达集边界点的个数趋于无穷, 相邻可达集边界点之间的距离趋于0, 得到的可达集近似描述与真实离散系统可达集之间的 Hausdorff 距离趋近于0.

4 数值仿真

本节将外部投影法与文献[17]中的方法进行对比. 文献[17]中的方法与外部投影法相似, 也是通过求解优化问题来得到离散系统可达集的边界点, 然后将边界点的凸包作为系统可达集的内部近似. 与外部投影法不同, 文献[17]中的方法是采用支撑超平面

来计算离散系统可达集的边界点. 该方法构造了一系列的参考方向, 每一个参考方向对应着一个凸优化问题的计算, 而其优化结果则对应一个边界点, 最终通过求解多个凸优化问题得到离散系统可达集的多个边界点.

为了比较, 实验中用 Matlab 7.10 对两种方法进行仿真, 并为两种方法分别选取同样个数的参考点和参考方向 (即两种方法求解的凸优化问题个数相同, 进而两种方法得到的可达集边界点个数相同), 对比在求解相同数量凸优化问题的情况下两种方法得到的内部近似结果. 将以上的程序用于求解 3 个线性控制系统问题. 对于所有的例子, 均采用带有分段恒定控制量的欧拉法来离散化, 步长 h 取为 0.01. 进一步地, 为了定量地评价两种方法内部近似结果, 构造足够逼近离散系统可达集的参考集 \tilde{R}_{ref} . 参考集是按照文献 [17] 中的方法用 5 000 个支撑超平面的半空间交集构造的, 进而有 $\tilde{R} \subseteq \tilde{R}_{\text{ref}}$. 分别计算两种方法得到的内部近似可达集与参考集之间的 Hausdorff 距离, 并将其作为内部近似质量评判依据, 显然 Hausdorff 距离越小, 近似精度越高.

首先考虑两个二维系统的例子.

例 1 考虑一个二维线性系统, 系统矩阵和控制矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

控制约束为 $U = \{u \in \mathbf{R}^2 : \|u\|_2 \leq 1\}$, 初始状态 $x_0 = (0, 0)^T$, $t_0 = 0$, 终点时刻 $t_f = 2$.

例 2 考虑非自治线性系统, 系统矩阵和控制矩阵分别为

$$A(t) = \begin{bmatrix} (e^{-t} \sin t - 2) & te^{-2t} \\ -e^{-t} & (2e^{-2t} \cos t - 1) \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

控制约束为 $U = \{u \in \mathbf{R} : |u| \leq 1\}$, 初始状态 $x_0 = (0, 0)^T$, $t_0 = 0$, 终点时刻 t_f 分别取 2 和 4.

对于以上两个二维系统例 1 和例 2, 分别运用外部投影法和文献 [17] 中的方法计算采用 16、80 和 200 个参考点 (方向) 时得到的近似可达集.

图 2~图 4 进一步展示了外部投影法和文献 [17] 中的方法在分别采用 16 和 80 个参考点 (方向) 时得到的近似可达集. 图 2~图 4 中实线表示参考集, 虚线和点线 (几乎与实线重合) 分别表示 16 个和 80 个参考点 (方向) 得到的近似可达集. 可以看出, 在求解 16 个优

化问题时, 外部投影法得到的近似可达集更接近参考集; 而当求解 80 个优化问题时, 两种方法得到的近似可达集均与参考集非常接近.

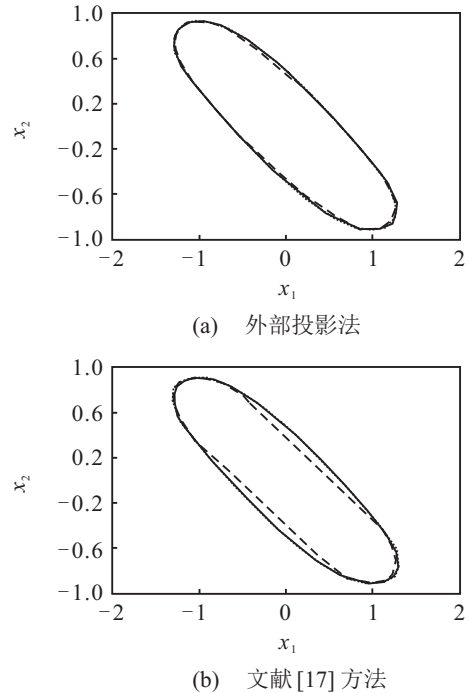


图 2 例 1 的近似可达集和参考集

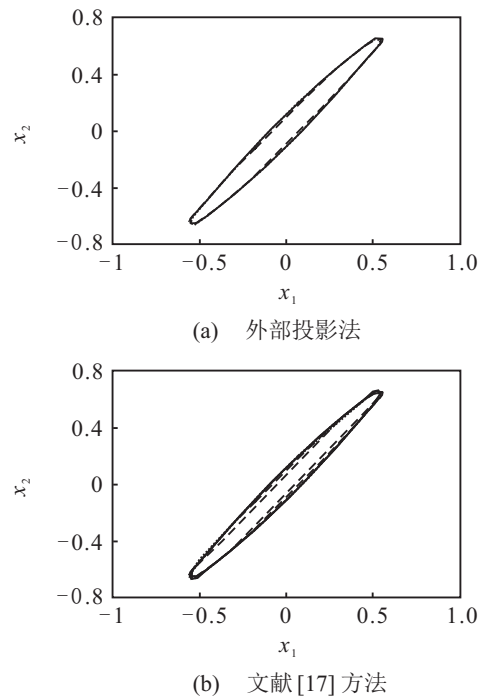


图 3 例 2 中 $t_f = 2$ 时的近似可达集和参考集

下面考虑一个三维系统的例子.

例 3 考虑一个三维线性时不变系统, 系统矩阵和控制矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

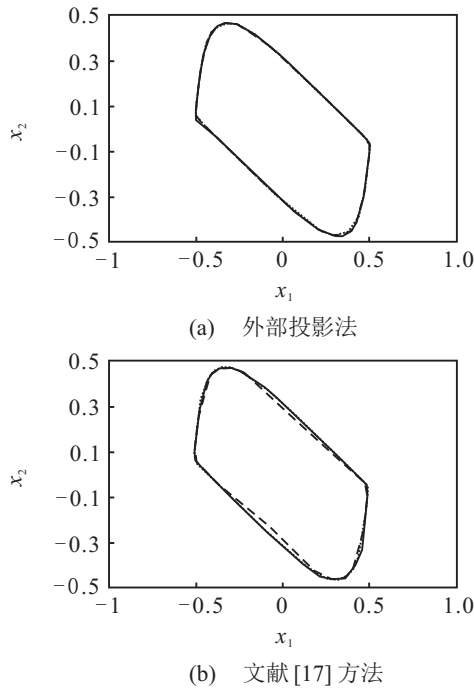


图4 例2中 $t_f = 4$ 时的近似可达集和参考集

控制约束为 $U = \{u \in \mathbf{R}^3 : \|u\|_2 \leq 1\}$, 初始状态 $x_0 = (0, 0, 0)^T, t_0 = 0$, 终点时刻 $t_f = 1$.

分别运用外部投影法和文献[17]中的方法计算采用64、128和324个参考点(方向)时的近似离散可达集. 图5展示了外部投影法和文献[17]中的方法在计算324个凸优化问题时得到的近似可达集, 图5中外部阴影表示参考集 \tilde{R}_{ref} , 内部的凸包展示了近似集, 网格交点为所求得的可集边界点.

可以看出, 在都采用324个边界点描述的情况下,

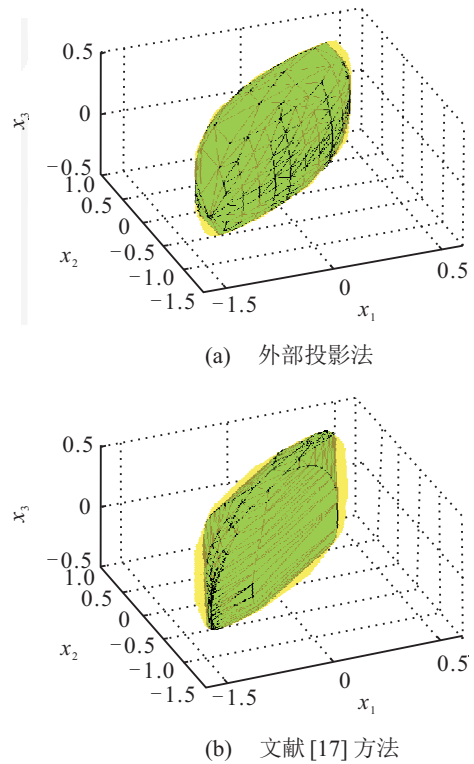


图5 例3的近似可达集和参考集

外部投影法得到的边界点较文献[17]中的方法, 分布更为均匀, 近似集更接近参考集.

表1总结了分别采用外部投影法和文献[17]中的方法计算例1~例3所得到的结果, 表1中列出两种方法计算优化问题的个数(CPs)以及近似集与参考集合之间的Hausdorff距离 $d_H(\tilde{R}', \tilde{R}_{ref})$, CPs也为可达集边界点个数.

表1 数值仿真结果

例子	CPs	$d_H(\tilde{R}', \tilde{R}_{ref})$ (文献[17]方法)	$d_H(\tilde{R}', \tilde{R}_{ref})$ (本文方法)
例1	16	0.0869	0.0284
	80	0.0067	0.0025
	200	0.0014	5.6240×10^{-4}
例2($t_f = 2$)	16	0.0344	0.0156
	80	0.0052	0.0019
	200	1.4661×10^{-3}	6.2945×10^{-4}
例2($t_f = 4$)	16	0.0192	0.0112
	80	0.0022	0.0016
	200	9.6683×10^{-4}	4.9450×10^{-4}
例3	64	0.2134	0.1593
	128	0.0997	0.0778
	324	0.0675	0.0571

从表1可知, 在计算同样数量优化问题的情况下, 外部投影法得到的 d_H 更小; 随着优化问题个数的增加, 近似集合与参考集之间的Hausdorff距离越来越小. 进一步地, 数值仿真结果表明, 外部投影法得到的可达集边界点分布更加均匀. 由于参考集是非常接近真实离散系统可达集的外部近似, 说明了外部投影法得到的近似集更接近真实集.

5 结论

本文结合常微分方程数值方法和最优化方法, 提出了近似线性控制系统可达集的外部投影法. 该方法不仅可给出系统可达集的边界点, 还可以给出边界点所对应的最优控制轨迹. 与文献中已有的方法相比, 该方法得到的可达集边界点分布更加均匀, 近似可达集更接近真实的离散系统可达集. 外部投影法

同样适用于具有凸可达集的非线性控制系统. 在后续的研究工作中, 可进一步研究非线性系统的可达集描述. 此外, 由于外部投影法的结果与参考点和投影方向有关, 后续可进一步研究参考点和投影方向的设置以提高近似精度.

参考文献 (References)

- [1] 雪丹, 李俊峰, 宝音贺西. 平面脉冲作用下卫星轨道的可达范围研究[J]. 宇航学报, 2009, 30(1): 88-92.
(Xue D, Li J F, Bao Yin H X. Study on reachable domain for satellite trajectory with coplanar impulse applied[J]. J of Astronautics, 2009, 30(1): 88-92.)
- [2] Li X H, He X S, Zhong Q F, et al. Reachable domain for satellite with two kinds of thrust[J]. Acta Astronautica, 2011, 68(11): 1860-1864.
- [3] 解永锋, 唐硕. 亚轨道飞行器再入可达域快速计算方法[J]. 飞行力学, 2011, 29(4): 72-76.
(Xie Y F, Tang S. Rapid calculation of entry footprint of suborbital launch vehicles[J]. Flight Dynamics, 2011, 29(4): 72-76.)
- [4] Vinh N X, Gilbert E G, Howe R M, et al. Reachable domain for interception at hyperbolic speeds[J]. Acta Astronautica, 1995, 35(1): 1-8.
- [5] 寇英信, 陈磊, 李战武, 等. 基于命中概率的制导炸弹可达域定量缩减方法[J]. 电光与控制, 2013, 20(7): 11-14.
(Kou Y X, Chen L, Li Z W, et al. Guided bomb accessible region quantitative reduction method based on hit probability[J]. Electronics Optics and Control, 2013, 20(7): 11-14.)
- [6] Parise F, Valcher M E, Lygeros J. On the reachable set of the controlled gene expression system[C]. The 53rd Annual Conf on Decision and Control. Los Angeles: IEEE, 2014: 4597-4604.
- [7] Mitchell I M, Tomlin C J. Overapproximating reachable sets by Hamilton-Jacobi projections[J]. J of Scientific Computing, 2003, 19(1/2/3): 323-346.
- [8] Kim J H. Improved ellipsoidal bound of reachable sets for time-delayed linear systems with disturbances[J]. Automatica, 2008, 44(11): 2940-2943.
- [9] Zuo Z Q, Ho D W C, Wang Y J. Reachable set bounding for delayed systems with polytopic uncertainties: The maximal Lyapunov - Krasovskii functional approach[J]. Automatica, 2010, 46(5): 949-952.
- [10] Kwon O M, Lee S M, Park J H. On the reachable set bounding of uncertain dynamic systems with time-varying delays and disturbances[J]. Information Sciences, 2011, 181(17): 3735-3748.
- [11] Feng Z, Lam J. On reachable set estimation of singular systems[J]. Automatica, 2015, 52: 146-153.
- [12] Chen Y, Lam J, Zhang B. Estimation and synthesis of reachable set for switched linear systems[J]. Automatica, 2016, 63: 122-132.
- [13] Kurzanski A B, Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis: Internal approximation[J]. Systems and Control Letters, 2000, 41(3): 201-211.
- [14] Kurzanski A B, Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations[J]. Optimization Methods and Software, 2002, 17(2): 177-206.
- [15] Kostousova E K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes optimization and parallel computations[J]. Optimization Methods and Software, 1998, 9(4): 269-306.
- [16] Dontchev A L, Farkhi E M. Error estimates for discretized differential inclusions[J]. Computing, 1989, 41(4): 349-358.
- [17] Baier R, Büskens C, Chahma I A, et al. Approximation of reachable sets by direct solution methods for optimal control problems[J]. Optimization Methods and Software, 2007, 22(3): 433-452.
- [18] Aumann R J. Integrals of set-valued functions[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 1965, 12(1): 1-12.
- [19] Chapra S C, Canale R P. Numerical methods for engineers[M]. New York: McGraw-Hill, 2010: 707-776.

(责任编辑: 闫妍)