

带有多个时变时滞的一阶多智能体系统的 H_∞ 包围控制

廖福成[†], 孔敏, 刘会央

(北京科技大学 数理学院, 北京 100083)

摘要: 研究带有多个时变时滞的一阶多智能体系统在有向网络拓扑下的 H_∞ 包围控制问题. 首先, 通过引入收敛性向量函数, 将所讨论问题转化为一般时滞系统的 H_∞ 控制问题. 然后, 通过构造适当的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 利用 Lyapunov 稳定性理论得到多智能体系统实现包围控制的充分条件, 同时求得时变通信时滞的最大容许值. 另外, 在有外部干扰的情况下, 得到了多智能体系统具有 H_∞ 包围控制性能常数的充分条件. 最后, 通过数值仿真实验验证了所得结果的有效性.

关键词: 多智能体系统; 时变时滞; 包围控制; H_∞ 控制; 有向网络拓扑

中图分类号: TP273

文献标志码: A

H_∞ containment control for first-order multi-agent systems with multiple time-varying delays

LIAO Fu-cheng[†], KONG Min, LIU Hui-yang

(School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: The H_∞ containment control problems for first-order multi-agent systems with multiple time-varying delays under directed network topology are investigated. Firstly, by introducing a convergence vector function, the H_∞ containment control problems of multi-agent systems are transformed into the H_∞ control problems of normal time-delay systems. Then, by using the Lyapunov stability theory, a suitable Lyapunov-Krasovskii functional is designed. Some sufficient conditions for H_∞ containment control are established and the upper bound of the time-varying delays are obtained. Furthermore, the existence criterion of H_∞ containment control performance constant is also gained when there is external disturbance in the multi-agent systems. Finally, simulations results show the effectiveness of the conclusions.

Keywords: multi-agent system; time-varying delays; containment control; H_∞ control; directed network topology

0 引言

近年来, 由于计算机科学和通信技术的快速发展, 学术界对复杂网络和多智能体系统的研究都取得了很大的进展. 作为目前学术界的前沿课题之一, 人们正在进一步研究对复杂网络和多智能体系统的科学理解和应用.

文献 [1-3] 研究了复杂网络系统的同步性分析、带有噪音扰动的复杂动态网络系统在性能约束下的稳定性问题和部分耦合动态网络在牵制脉冲控制器下的外同步问题. 多智能体系统的协调控制作为多智能体系统中的核心问题, 已逐渐成为复杂网络方向的研究热点. 多智能体系统协调控制研究包括很多方面, 例如一致性问题^[4-7]、编队控制问题^[8]、交汇问

题^[9]、蜂拥问题^[10]等. 包围控制也是一类协调控制问题. 在包围控制问题中, 通常假设一部分智能体具有较强的探测、处理和交互能力, 而另一部分智能体这方面的能力弱一些. 包围控制问题有很多潜在的应用, 已经引起了学术界的关注, 成为控制理论界研究的热点. Ji 等^[11] 运用偏微分方程和基于 stop-and-go 规则的混杂控制策略, 研究了具有固定无向拓扑的多智能体系统的包围控制问题, 得到了向目标运动过程中跟随者收敛并保持由领航者形成的凸包内的充分条件; Cao 等^[12-13] 研究了具有静态和动态领航者的多智能体系统在固定和切换拓扑下的包围控制问题, 分别给出了跟随者能够进入领航者张成的凸包内的条件; Liu 等^[14] 研究了在领航者之间无信息交互情

收稿日期: 2016-02-28; 修回日期: 2016-05-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174209); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(FRF-TP-15-041A1).

作者简介: 廖福成(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 从事预见控制理论和多智能体系统协调控制理论等研究; 孔敏(1989—), 女, 硕士生, 从事多智能体系统协调控制理论的研究.

[†]通讯作者. E-mail: fcliao@ustb.edu.cn

况下,具有静态和动态领航者的多智能体系统在连续时间和采样时间两种情况下的包围控制问题,并且给出了这4种情况下跟随者进入领航者张成的凸包内的充分必要条件;另外,Liu等^[15]研究了线性连续时间多智能体系统在一般拓扑下的包围控制问题,给出了所有智能体达到包围控制的充要条件,提出了设计增益参数的方法;Yan等^[16]研究了在固定拓扑下,带有时滞的多智能体系统的包围控制问题,采用连续和采样的控制协议,分别给出了静态和动态领航者情况下系统达到包围控制的充分必要条件;Lou等^[17]研究了在切换拓扑下,带有多个领航者的二阶多智能体系统的包围控制问题,运用凸分析和随机过程理论的方法,分别给出了领航者为静态时的充分必要条件以及领航者为动态时的充分条件;此外,Wang等^[18]还研究了在参数不确定情况下,具有多个领航者的多智能体系统在一般拓扑下的自适应包围控制问题;Li等^[19]研究了一般线性连续时间和离散时间多智能体系统的包围控制问题,给出了系统渐近实现包围控制的充分条件.近几年来,学者们对于带有时滞的多智能体系统的包围控制问题^[20],有限时间多智能体系统的包围控制问题^[21]也都进行了很多研究.同样,多智能体系统的 H_∞ 一致性和具有单一时滞的多智能体系统的包围控制问题也都得到了研究.但是,目前还未见到研究带有时滞的多智能体系统的 H_∞ 包围控制问题的论文,这正是本文研究的问题.

本文在文献[6]的基础上,研究一阶时变时滞多智能体系统在领航者之间没有信息交互情况下的 H_∞ 包围控制问题.引入收敛性向量函数,通过模型的转化,将时变时滞多智能体系统的 H_∞ 包围控制问题转化为一般时滞系统的 H_∞ 控制问题.由Lyapunov稳定性理论给出多智能体系统实现包围控制和具有 H_∞ 包围控制性能常数 γ 的充分条件.与文献[6]不同的是,本文研究的是多智能体系统的包围控制问题,同时文中模型转化的方法也与文献[6]中树形变换的方法不同.

1 预备知识

1.1 代数图理论

图论在多智能体系统的包围控制问题的研究中起着非常重要的作用,它可以用来模拟智能体之间的信息交换关系.通常用图的一个顶点代表一个智能体,用图的一条边表示两个智能体之间的信息交换关系.本文用有向图模拟多智能体系统的通信拓扑,下面给出有向图的一些基本概念.

有向图 $G = (V, E(G))$ 由节点集 $V = \{v_1, v_2,$

$\dots, v_n\}$ 和边集 $E(G) \subseteq V \times V$ 构成.图 G 的一条有向边记为 $e_{ij} = (v_i, v_j)$,其中 v_i 称为节点 v_j 的父节点,而 v_j 称为节点 v_i 的子节点.节点 v_i 在有向图 G 中的邻居集合定义为 $N_i = \{v_j : (v_j, v_i) \in E(G), j \neq i\}$.有向图 G 的一条有向路径是一个有限的节点序列 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$,满足 $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \in E(G), j = 1, 2, \dots, k - 1$.如果对于任意的两个不同的节点 v_i 和 v_j ,都存在路径,起始于 v_i 终于 v_j ,则称有向图 G 是强连通的.

有向树是一类特殊的有向图,满足性质:1)具有一个没有父节点的特殊节点;2)所有其他节点有且仅有一个父节点;3)父节点可以通过路径连接到其他任何节点.对于一个或多个有向树,如果这些有向树没有公共节点,则称其构成一个有向森林.有向图 G 的一个生成森林是一个有向森林,并且是有向图 G 的生成子图.如果有向图 G 的节点集和某个边子集构成一个生成森林,则称 G 包含生成森林.

加权有向图 G 的邻接矩阵记为 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$,其中 $(v_j, v_i) \in E(G)$ 时,权重 $a_{ij} > 0$,否则 $a_{ij} = 0, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.另外,拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = (l_{ij}) \in R^{n \times n}$ 定义为

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik}, & i = j; \\ -a_{ij}, & i \neq j. \end{cases}$$

1.2 定义和引理

本段给出领航者、跟随者和凸包定义.

定义1^[14] 对于一个有 n 个智能体的系统而言,如果一个智能体没有邻居,则称其为领航者;如果一个智能体至少有一个邻居,则称其为跟随者.

定义2^[14] 若对于任意的 $x, y \in K$ 和 $\gamma (0 < \gamma < 1)$,有 $(1 - \gamma)x + \gamma y \in K$,则称集合 $K \subseteq R^n$ 是凸集.有限个点 $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^n$ 的凸包是包含所有点 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的最小凸集,记为 $\text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,即

$$\text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in R, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

引理1^[22] 令 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ 表示一个对称矩阵,则下面3个条件等价:1) $S < 0$; 2) $S_{11} < 0$ 且 $S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} < 0$; 3) $S_{22} < 0$ 且 $S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} < 0$.

引理2^[23] 设 $0 \leq d(t) \leq h, h > 0$ 为分段连续函数,则对于任意的连续向量函数 $x : [-h, \infty) \rightarrow$

R^n , 正定矩阵 $W \in R^{n \times n}$, 下面的不等式成立:

$$\int_{t-h}^t x(s)Wx(s)ds \geq \frac{1}{h} \left(\int_{t-d(t)}^t x(s)ds \right) W \left(\int_{t-d(t)}^t x(s)ds \right), t \geq 0.$$

2 模型的建立

考虑由 n 个智能体组成的多智能体系统, 其中包括 l 个领航者和 $n-l$ 个跟随者, $l < n$. 分别用 \mathcal{R} 和 \mathcal{F} 表示领航者的集合和跟随者的集合.

假设领航者不受干扰, 考虑带有扰动的单积分器多智能体系统, 其第 i 个智能体动态特性可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t) + b_i w_i(t), i = 1, 2, \dots, n; \\ y_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)), \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_i(t) \in R, u_i(t) \in R, y_i(t) \in R$ 分别表示第 i 个智能体的状态、控制输入和控制输出; $w_i(t) \in L_2[0, \infty)$ 表示第 i 个智能体的输入干扰; b_i 为相对应的常数. 下面给出具有固定拓扑 G 和时变通信时滞的包围控制协议

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, i \in \mathcal{R}; \\ \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}} a_{ij}[x_j(t - d_{ij}(t)) - x_i(t - d_{ij}(t))], i \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (2)$$

若在协议 (2) 下, 系统 (1) 的领航者张成或者最终位置张成一个凸包, 跟随者进入该凸包内, 则称系统 (1) 实现包围控制.

设时变通信时滞 $d_{ij}(t)$ 满足下面的假设条件.

假设 1 设时变时滞

$$d_{ij}(t) \in \{d_k(t) : k = 1, 2, \dots, m\},$$

其中 $0 < m < n^2, d_k(t)$ 为分段连续函数, 满足 $0 \leq d_k(t) \leq h_k, h_k$ 为待定的常数.

在协议 (2) 下, 系统 (1) 可以写为如下矩阵形式:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_k x(t - d_k(t)) + Bw(t), \\ y(t) = \mathcal{L}x(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中: $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T, y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T, w(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t)]^T, B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}, \mathcal{L}$ 为有向图 G 的拉普拉斯矩阵. \mathcal{L}_k 的定义如下:

$$l_{ij}^k = \begin{cases} -a_{ij}, j \neq i, d_k(\cdot) = d_{ij}(\cdot); \\ 0, j \neq i, d_k(\cdot) \neq d_{ij}(\cdot); \\ - \sum_{s=1}^n l_{is}^k, j = i. \end{cases} \quad (4)$$

由此可知 $\mathcal{L}_k \mathbf{1} = 0, \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_k = \mathcal{L}$.

根据领航者和跟随者的定义 1, \mathcal{L} 可以划分为

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} & \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} \\ 0_{l \times (n-l)} & 0_{l \times l} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

其中: $\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \in R^{(n-l) \times (n-l)}, \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} \in R^{(n-l) \times l}$. 最后 l 行元素为 0 是因为 l 个智能体是领航者, 它们之间没有信息交互. 由 $\sum_{k=1}^m \mathcal{L}_k = \mathcal{L}$ 和式 (5) 可知

$$\sum_{k=1}^m \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{1k} & \mathcal{L}_{2k} \\ 0_{l \times (n-l)} & 0_{l \times l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} & \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} \\ 0_{l \times (n-l)} & 0_{l \times l} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

所以由式 (6) 可得

$$\sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}, \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{2k} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}}. \quad (7)$$

引理 3^[19] 如果固定拓扑 G 包含一个生成森林, 则 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$ 的所有特征值都有正实部, $-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}}$ 的所有元素都非负, 且 $-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}}$ 的所有行和都为 1.

3 H_∞ 包围控制分析

本节首先给出一些分析结果, 然后基于这些分析结果给出系统在 $w(t) = 0$ 和 $w(t) \neq 0$ 两种情况下主要的结论.

类比文献 [7] 的一致性问题上引入不一致向量 δ 的做法, 为了研究包围控制问题, 类似定义收敛性向量函数如下:

$$\delta(t) = x_{\mathcal{F}}(t) + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} x_{\mathcal{R}}(t). \quad (8)$$

假设领航者不受干扰, 根据式 (5)~(7) 的划分, 系统 (3) 的动态方程可以写为

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathcal{F}}(t) = - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} x_{\mathcal{F}}(t - d_k(t)) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{2k} x_{\mathcal{R}}(t - d_k(t)) + \bar{B} \bar{w}(t), \\ \dot{x}_{\mathcal{R}}(t) = 0; \\ y_{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} x_{\mathcal{F}}(t) + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} x_{\mathcal{R}}(t), \\ y_{\mathcal{R}}(t) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

其中: $\bar{B} = \text{diag}\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{n-l}\}, \bar{w}(t) \in L_2[0, \infty)$ 为跟随者受到的干扰. 由于 $\dot{x}_{\mathcal{R}}(t) = 0$, 即领航者的状态是不变的, 令 $x_{\mathcal{R}}(t) = x_{\mathcal{R}}(0)$, 这里 $x_{\mathcal{R}}(0)$ 是领航者的初始状态.

由式 (9) 可知, 收敛性向量函数 (8) 可转化为

$$\dot{\delta}(t) = \dot{x}_{\mathcal{F}}(t) + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} \dot{x}_{\mathcal{R}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{F}}(t) =$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} x_{\mathcal{F}}(t - d_k(t)) - \\
 & \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{2k} x_{\mathcal{R}}(t - d_k(t)) + \bar{B}\bar{w}(t) = \\
 & - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} [\delta(t - d_k(t)) - \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} x_{\mathcal{R}}(0)] - \\
 & \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{2k} x_{\mathcal{R}}(0) + \bar{B}\bar{w}(t) = \\
 & - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} \delta(t - d_k(t)) + \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} x_{\mathcal{R}}(0) - \\
 & \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{2k} x_{\mathcal{R}}(0) + \bar{B}\bar{w}(t) = \\
 & - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} \delta(t - d_k(t)) + \bar{B}\bar{w}(t).
 \end{aligned}$$

又由式(10)可知, $y_{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}\delta(t)$, 则系统(3)转化为如下受扰时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{\delta}(t) = - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} \delta(t - d_k(t)) + \bar{B}\bar{w}(t), \\ y_{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}\delta(t). \end{cases} \quad (11)$$

当 $w(t) = 0$, 即 $\bar{w}(t) = 0$ 时, 如果系统(11)渐近稳定, 由于领航者之间没有信息交互, 领航者的状态是不变的, 则多智能体系统跟随者的最终状态为 $-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} x_{\mathcal{R}}(0)$; 再若 $-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}}$ 的所有元素都是非负的, 且 $-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}}$ 的行和为1, 则多智能体系统(3)渐近实现包围控制.

当 $w(t) \neq 0$, 即 $\bar{w}(t) \neq 0$ 时, 若在零初始条件下, 对于任意的 $\bar{w}(t) \in L_2[0, \infty)$, 系统(11)满足

$$\int_0^\infty y_{\mathcal{F}}^T(t) y_{\mathcal{F}}(t) dt \geq \gamma^2 \int_0^\infty \bar{w}^T(t) \bar{w}(t) dt, \quad (12)$$

则系统(3)具有 H_∞ 包围控制性能 γ .

由上面分析可知, 多智能体系统(3)的 H_∞ 包围控制问题转化为时滞系统(11)的 H_∞ 控制问题和验证跟随者是否进入领航者张成的凸包内的问题.

下面研究 $w(t) = 0$ 时, 系统(3)的包围控制问题.

定理1 设固定拓扑 G 具有非负权重, 且 G 包含一个生成森林, 时变通信时滞 $d_{ij}(t)$ 满足假设1, 则当 $w(t) = 0$ 时, 对于任意的 $0 < h_k < \bar{h}, k = 1, 2, \dots, m$, 任意的初始状态, 系统(3)渐近实现包围控制, 且多智能体系统跟随者的最终状态为 $-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}} x_{\mathcal{R}}(0)$, 其中 \bar{h} 是如下最优问题的解:

$$\begin{aligned}
 & \bar{h} = \max h; \\
 & \text{s.t. } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} -P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} - \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P & P\Phi_1 \\ \Phi_1^T P & -\Psi \end{bmatrix} + \\
 & h\Phi_2^T \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \Phi_2 < 0,
 \end{aligned}$$

$$P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, \dots, Q_m > 0, h > 0. \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= [-\mathcal{L}_{11}, -\mathcal{L}_{12}, \dots, -\mathcal{L}_{1m}], \\
 \Phi_2 &= [-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}, -\mathcal{L}_{11}, \dots, -\mathcal{L}_{1m}], \\
 \Psi &= h^{-1} \text{diag}\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}.
 \end{aligned}$$

证明 首先说明线性矩阵不等式(13)的可解性. 由于固定拓扑 G 具有非负权重且包含一个生成森林, 由引理3可知, $-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$ 是 Hurwitz 稳定的, 所以存在矩阵 $P > 0$, 使得 $-P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} - \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P < 0$. 再由引理1可知, 对于 $P > 0$, 一定存在 $Q_1 > 0, Q_2 > 0, \dots, Q_m > 0$, 使得对于充分小的 $h > 0$, 满足式(13)成立.

下面证明对于任意的 $0 < h_k < \bar{h}$, 系统(3)渐近实现包围控制. 取 $h : 0 < h < \bar{h}$ 且 $0 < h_k \leq h$. 由于 $w(t) = 0$, 即 $\bar{w}(t) = 0$, 将系统(11)的第1个式子改写为如下的等价形式:

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}(t) &= \\
 & - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} [\delta(t - d_k(t)) - \delta(t)] - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} \delta(t) = \\
 & - \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \delta(t) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} \xi_k(t), \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中 $\xi_k(t) = \delta(t - d_k(t)) - \delta(t)$. 取 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \\
 & \delta^T(t) P \delta(t) + \sum_{k=1}^m \int_{t-h}^t (s - t + h) \delta^T(s) Q_k \delta(s) ds. \quad (15)
 \end{aligned}$$

沿式(14)对 $V(t)$ 求导数, 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \\
 & \delta^T(t) P \dot{\delta}(t) + \delta^T(t) P \dot{\delta}(t) + \\
 & \sum_{k=1}^m \left[- \int_{t-h}^t \delta^T(s) Q_k \dot{\delta}(s) ds + h \delta^T(t) Q_k \dot{\delta}(t) \right] = \\
 & \left[- \delta^T(t) \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T - \sum_{k=1}^m \xi_k^T(t) \mathcal{L}_{1k}^T \right] P \delta(t) + \\
 & \delta^T(t) P \left[- \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \delta(t) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} \xi_k(t) \right] - \\
 & \sum_{k=1}^m \int_{t-h}^t \delta^T(s) Q_k \delta(s) ds + h \sum_{k=1}^m \delta^T(t) Q_k \dot{\delta}(t) = \\
 & \delta^T(t) (-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}) \delta(t) - \\
 & 2 \sum_{k=1}^m \delta^T(t) P \mathcal{L}_{1k} \xi_k(t) + h \sum_{k=1}^m \delta^T(t) Q_k \dot{\delta}(t) - \\
 & \sum_{k=1}^m \int_{t-h}^t \delta^T(s) Q_k \dot{\delta}(s) ds.
 \end{aligned}$$

由引理2可知

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \delta^T(t)(-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{FF}})\delta(t) - \\ & 2 \sum_{k=1}^m \delta^T(t)P\mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + h \sum_{k=1}^m \delta^T(t)Q_k\dot{\delta}(t) - \\ & \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m \left(\int_{t-d_k(t)}^t \delta^T(s)ds \right) Q_k \left(\int_{t-d_k(t)}^t \dot{\delta}(s)ds \right) = \\ & \delta^T(t)(-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{FF}})\delta(t) - \\ & 2 \sum_{k=1}^m \delta^T(t)P\mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + h \sum_{k=1}^m \delta^T(t)Q_k\dot{\delta}(t) - \\ & \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m \xi_k^T(t)Q_k\xi_k(t). \end{aligned}$$

由式(14)和上式可知

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & [\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t)] \times \\ & \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{FF}} & -P\mathcal{L}_{11} & \cdots & -P\mathcal{L}_{1m} \\ -\mathcal{L}_{11}^T P & -\frac{1}{h}Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathcal{L}_{1m}^T P & 0 & \cdots & -\frac{1}{h}Q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \end{bmatrix} + \\ & h \left\{ \left[-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}\delta(t) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) \right]^T \times \right. \\ & \left. \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \left[-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}\delta(t) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) \right] \right\} = \\ & [\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t)] \times \\ & \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{FF}} & -P\mathcal{L}_{11} & \cdots & -P\mathcal{L}_{1m} \\ -\mathcal{L}_{11}^T P & -\frac{1}{h}Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathcal{L}_{1m}^T P & 0 & \cdots & -\frac{1}{h}Q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \end{bmatrix} + \\ & h \left\{ \left(\left[-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}, -\mathcal{L}_{11}, \dots, -\mathcal{L}_{1m} \right] \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \end{bmatrix} \right)^T \times \right. \\ & \left. \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \left(\left[-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}, -\mathcal{L}_{11}, \dots, -\mathcal{L}_{1m} \right] \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \end{bmatrix} \right) \right\} = \\ & [\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{FF}} & -P\mathcal{L}_{11} & \cdots & -P\mathcal{L}_{1m} \\ -\mathcal{L}_{11}^T P & -\frac{1}{h}Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathcal{L}_{1m}^T P & 0 & \cdots & -\frac{1}{h}Q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \end{bmatrix} + \\ & h[\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t)] \times \\ & \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^T \\ -\mathcal{L}_{11}^T \\ \vdots \\ -\mathcal{L}_{1m}^T \end{bmatrix} \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \left[-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}, -\mathcal{L}_{11}, \dots, -\mathcal{L}_{1m} \right] \times \\ & \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \end{bmatrix} = \\ & [\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t)] \times \\ & \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{FF}} & -P\mathcal{L}_{11} & \cdots & -P\mathcal{L}_{1m} \\ -\mathcal{L}_{11}^T P & -\frac{1}{h}Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathcal{L}_{1m}^T P & 0 & \cdots & -\frac{1}{h}Q_m \end{bmatrix} + \\ & h \left(\begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^T \\ -\mathcal{L}_{11}^T \\ \vdots \\ -\mathcal{L}_{1m}^T \end{bmatrix} \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \times \right. \\ & \left. \left[-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}, -\mathcal{L}_{11}, \dots, -\mathcal{L}_{1m} \right] \right) \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

令 $\zeta(t) = [\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t)]^T$, 则 $\dot{V}(t) \leq \zeta^T \Sigma_1 \zeta$, 其中 Σ_1 如式(13)定义. 当 $\Sigma_1 < 0$ 时, 有 $\lambda_{\max}(\Sigma_1) < 0$, 所以有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & \leq \lambda_{\max}(\Sigma_1)\zeta^T(t)\zeta(t) \leq \\ & \lambda_{\max}(\Sigma_1)\delta^T(t)\delta(t) = \lambda_{\max}(\Sigma_1)\|\delta(t)\|^2, \end{aligned}$$

故存在一个常数 $\alpha = \lambda_{\max}(\Sigma_1) < 0$, 使得 $\dot{V}(t) \leq \alpha\|\delta(t)\|$, 因此对于任意的 $0 < h_k < \bar{h}$, 由Lyapunov稳定性理论可知, 系统(11)渐近稳定. 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\delta(t) \rightarrow 0$, 而 $\delta(t) = x_{\mathcal{F}}(t) + \mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{FR}}x_{\mathcal{R}}(t)$, 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\delta(t) = x_{\mathcal{F}}(t) + \mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{FR}}x_{\mathcal{R}}(t)$ 趋于 0, 即 $x_{\mathcal{F}}(t) \rightarrow (-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{FR}}x_{\mathcal{R}}(t))$. 又因为领航者为静态, 则 $x_{\mathcal{R}}(t) = x_{\mathcal{R}}(0)$, 所以跟随者的最终状态为 $-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{FR}}x_{\mathcal{R}}(0)$. 由引理3可知, 矩阵 $-\mathcal{L}_{\mathcal{FF}}^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{FR}}$ 所

有元素非负,且行和为1. 因此,由凸包的定义可知,所有的跟随者进入了静态领航者张成的凸包内,且跟随者的最终状态为 $-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{R}}x_{\mathcal{R}}(0)$. \square

对于 $w(t) \neq 0$, 由于假设领航者不受干扰,即 $\bar{w}(t) \neq 0$, 针对这种情况,下面将研究系统(3)的 H_∞ 包围控制性能问题.

定理2 假设领航者不受干扰,固定拓扑 G 具有非负权重,且 G 包含一个生成森林,时变通信时滞 $d_{ij}(t)$ 满足假设1,若存在 $P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, \dots, Q_m > 0$, 常数 $h > 0, \gamma > 0$, 使得

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} & P\Phi & P\bar{B} \\ \Phi^T P & -\Xi & 0 \\ \bar{B}^T P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + h\Omega^T \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \Omega < 0. \quad (16)$$

其中: Φ 和 Ξ 与定理1中 Φ_1 和 Ψ 相同, $\Omega = [-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}, -\mathcal{L}_{11}, \dots, -\mathcal{L}_{1m}, \bar{B}]$. 则当 $w(t) \neq 0$ 时,在零初始状态下,对于任意的 $0 < h_k < \bar{h}, k = 1, 2, \dots, m$, 系统(3)具有 H_∞ 包围控制性能 γ , 其中 \bar{h} 是上面矩阵不等式(16)的最优解.

证明 首先需要说明线性矩阵不等式(16)的可解性. 由引理3可知, $-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$ 是 Hurwitz 稳定的,所以存在矩阵 $P > 0$, 使得 $-P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} - \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P = -Q$. 由于 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$ 具有正实部,取 $Q = 2\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P$, 则有 $-P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} - \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P = -\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P < 0$. 如果 h 充分小,则一定存在 $Q_1 > 0, Q_2 > 0, \dots, Q_m > 0$, 使得式(16)成立,故线性矩阵不等式(16)可解.

由于 $w(t) \neq 0$, 领航者不受干扰,即 $\bar{w}(t) \neq 0$, 将系统(10)化为其等价形式

$$\begin{cases} \dot{\delta}(t) = -\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}\delta(t) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + \bar{B}\bar{w}(t), \\ y_{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}\delta(t). \end{cases} \quad (17)$$

选取 Lyapunov 函数(15),沿系统(17)对其求导,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \delta^T(t)P\delta(t) + \delta^T(t)P\dot{\delta}(t) + \\ & \sum_{k=1}^m \left[-\int_{t-h}^t \delta^T(s)Q_k\dot{\delta}(s)ds + h\delta^T(t)Q_k\dot{\delta}(t) \right] = \\ & \left[-\delta^T(t)\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - \sum_{k=1}^m \xi_k^T(t)\mathcal{L}_{1k}^T P + \bar{w}^T(t)\bar{B}^T P \right] P\delta(t) + \\ & \delta^T(t)P \left[-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}\delta(t) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + \bar{B}\bar{w}(t) \right] - \\ & \sum_{k=1}^m \int_{t-h}^t \delta^T(s)Q_k\dot{\delta}(s)ds + h \sum_{k=1}^m \delta^T(t)Q_k\dot{\delta}(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta^T(t)(-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}})\delta(t) + \\ & 2\delta^T(t) \left[-\sum_{k=1}^m P\mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + P\bar{B}\bar{w}(t) \right] + \\ & h \sum_{k=1}^m \delta^T(t)Q_k\dot{\delta}(t) - \sum_{k=1}^m \int_{t-h}^t \delta^T(s)Q_k\dot{\delta}(s)ds. \end{aligned}$$

由引理2可知

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \delta^T(t)(-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}})\delta(t) + \\ & 2\delta^T(t) \left[-\sum_{k=1}^m P\mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + P\bar{B}\bar{w}(t) \right] + \\ & h \sum_{k=1}^m \delta^T(t)Q_k\dot{\delta}(t) - \\ & \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m \left(\int_{t-d_k(t)}^t \delta^T(s)ds \right) Q_k \left(\int_{t-d_k(t)}^t \dot{\delta}(s)ds \right) = \\ & \delta^T(t)(-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}})\delta(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\delta^T(t) \left[-\sum_{k=1}^m P\mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + P\bar{B}\bar{w}(t) \right] + \\ & h \sum_{k=1}^m \delta^T(t)Q_k\dot{\delta}(t) - \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m \xi_k^T(t)Q_k\xi_k(t). \end{aligned}$$

令 $\theta(t) = y_{\mathcal{F}}^T(t)y_{\mathcal{F}}(t) - \gamma^2\bar{w}^T(t)\bar{w}(t)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) + \theta(t) \leq & \delta^T(t)(-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}})\delta(t) + \\ & 2\delta^T(t) \left[-\sum_{k=1}^m P\mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + P\bar{B}\bar{w}(t) \right] - \\ & \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m \xi_k^T(t)Q_k\xi_k(t) + h \sum_{k=1}^m \delta^T(t)Q_k\dot{\delta}(t) - \\ & \gamma^2\bar{w}^T(t)\bar{w}(t) = \\ & \delta^T(t)(-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}})\delta(t) + \\ & 2\delta^T(t) \left[-\sum_{k=1}^m P\mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + P\bar{B}\bar{w}(t) \right] - \\ & \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m \xi_k^T(t)Q_k\xi_k(t) + \\ & h \left\{ \left[-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}\delta(t) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + \bar{B}\bar{w}(t) \right]^T \times \right. \\ & \left. \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \left[-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}\delta(t) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + \bar{B}\bar{w}(t) \right] \right\} - \\ & \gamma^2\bar{w}^T(t)\bar{w}(t) = \\ & \delta^T(t)(-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}})\delta(t) + \\ & 2\delta^T(t) \left[-\sum_{k=1}^m P\mathcal{L}_{1k}\xi_k(t) + P\bar{B}\bar{w}(t) \right] - \\ & \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m \xi_k^T(t)Q_k\xi_k(t) - \gamma^2\bar{w}^T(t)\bar{w}(t) + \end{aligned}$$

$$h \left\{ \left[-\delta^T(t) \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T - \sum_{k=1}^m \xi_k^T(t) \mathcal{L}_{1k}^T + \bar{w}^T(t) \bar{B}^T \right] \times \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \left[-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \delta(t) - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{1k} \xi_k(t) + \bar{B} \bar{w}(t) \right] \right\} =$$

$$[\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t), \bar{w}^T(t)] \times$$

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} & -P \mathcal{L}_{11} & \\ & -\mathcal{L}_{11}^T P & -\frac{1}{h} Q_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & -\mathcal{L}_{1m}^T P & 0 \\ & \bar{B}^T P & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dots & -P \mathcal{L}_{1m} & P \bar{B} \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots \\ \dots & -\frac{1}{h} Q_m & 0 \\ \dots & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix} +$$

$$h \left\{ \left([\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t), \bar{w}^T(t)] \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T \\ -\mathcal{L}_{11}^T \\ \vdots \\ -\mathcal{L}_{1m}^T \\ \bar{B}^T \end{bmatrix} \right) \times \right.$$

$$\left. \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \times \right.$$

$$\left. \left(\begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} & \\ & -\mathcal{L}_{11} \\ & \vdots \\ & -\mathcal{L}_{1m} \\ & \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix} \right) \right\} =$$

$$[\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t), \bar{w}^T(t)] \times$$

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T P - P \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T \mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} & -P \mathcal{L}_{11} & \\ & -\mathcal{L}_{11}^T P & -\frac{1}{h} Q_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & -\mathcal{L}_{1m}^T P & 0 \\ & \bar{B}^T P & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dots & -P \mathcal{L}_{1m} & P \bar{B} \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots \\ \dots & -\frac{1}{h} Q_m & 0 \\ \dots & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + h \left(\begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^T \\ -\mathcal{L}_{11}^T \\ \vdots \\ -\mathcal{L}_{1m}^T \\ \bar{B}^T \end{bmatrix} \times \right.$$

$$\left. \left(\sum_{k=1}^m Q_k \right) \left[-\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}, -\mathcal{L}_{11}, \dots, -\mathcal{L}_{1m}, \bar{B} \right] \right\} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix}.$$

令 $\eta(t) = [\delta^T(t), \xi_1^T(t), \dots, \xi_m^T(t), \bar{w}^T(t)]^T$, 则由式(16)可知

$$\dot{V}(t) + \theta(t) \leq \eta^T(t) \Sigma_2 \eta(t) < 0. \quad (18)$$

在零初始条件下, 对上式从0到 ∞ 两边积分可得式(12). 所以系统(3)具有 H_∞ 包围控制性能 γ . \square

4 数值仿真

考虑由10个多智能体组成的系统, 其中有4个领航者(分别编号为 L_1, L_2, L_3, L_4)和6个跟随者(分别编号为 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$). 假设智能体之间的拓扑由有向图 $G(A)$ 描述(见图1), 很明显 $G(A)$ 包含一个有向生成森林. 为了简单起见, 如果顶点 v_j 与 v_i 有信息交流, 即 $(v_j, v_i) \in E(G)$, 则 $a_{ij} = 1$, 否则, $a_{ij} = 0$.

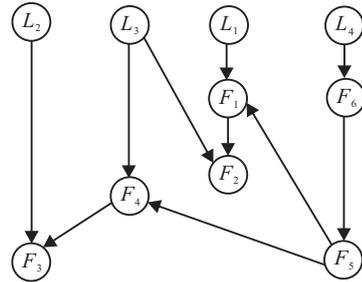


图1 智能体之间的信息交换

1) $w(t) = 0$ 的情况. 根据定理1, 使用Matlab线性矩阵不等式工具箱求解式(13), 可求得图1所示拓扑下的多智能体系统渐近达到包围控制所允许的时滞为 $h \leq 0.3253$, 取通信时滞 $d_{ij}(t)$ 为

$$\begin{cases} d_{L_1 F_1} = d_{L_2 F_3} = d_{L_3 F_4} = d_{L_4 F_6} = \\ d_{L_1 F_6} = d_{L_3 F_2} = 0.1, \\ d_{F_4 F_3} = d_{F_2 F_4} = d_{F_4 F_5} = d_{F_1 F_2} = \\ d_{F_6 F_5} = d_{F_5 F_1} = 0.2. \end{cases}$$

由式(4)可求得 $d_1(t) = 0.1$ 时的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L}_1 和 $d_2(t) = 0.2$ 时的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L}_2 .

图2是在 $w(t) = 0$ 时, 多智能体系统(1)在协议(2)下实现包围控制的仿真结果.

由图2可以看出, 所有的跟随者最终收敛到静态领航者张成的凸包, 并保持在凸包内.

图3表示 $w(t) = 0$ 时, 系统(3)的输出 $y(t)$.

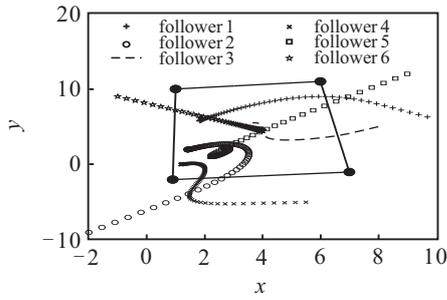


图2 $w(t) = 0$ 时智能体的状态轨迹

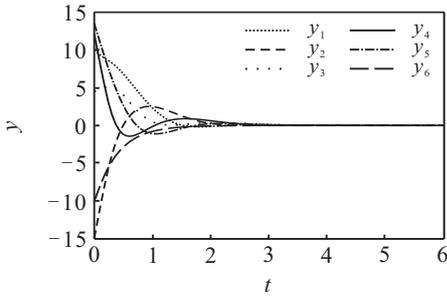


图3 $w(t) = 0$ 时系统 (3) 的输出 $y(t)$

由图3可以看出, y_1, y_2, \dots, y_6 大约在 $t = 3.3$ 时趋于0, 由式(8)和(10)可知, $y_F(t) = \mathcal{L}_{FF}\delta(t)$, 从而 $\delta(t)$ 大约在 $t = 3.3$ 时趋于0, 即系统(11)渐近稳定, 多智能体系统(1)实现了包围控制.

2) $w(t) \neq 0$ 的情况. 为了保证领航者的静态, 假设领航者不受干扰, 跟随者干扰信号取为

$$w(t) = \begin{cases} \sin(3t) \times \mathbf{1}, & 0 \leq t \leq 10; \\ 0 \times \mathbf{1}, & t > 10. \end{cases}$$

取 $B = \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$, 用 Matlab 线性矩阵不等式工具箱求解式(16), 可求得图1所示拓扑下的多智能体系统所具有包围控制性能 $\gamma \leq 2.2361$, 所允许的时滞为 $h \leq 0.1282$, 故取通信时滞 $d_{ij}(t)$ 为

$$\begin{cases} d_{L_1 F_1} = d_{L_2 F_3} = d_{L_3 F_4} = \\ d_{L_4 F_6} = d_{L_1 F_6} = d_{L_3 F_2} = 0.1, \\ d_{F_4 F_3} = d_{F_2 F_4} = d_{F_4 F_5} = \\ d_{F_1 F_2} = d_{F_6 F_5} = d_{F_5 F_1} = 0.11. \end{cases}$$

由式(4)可以求得 $d_1(t) = 0.1$ 时的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L}_1 和 $d_2(t) = 0.11$ 时的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L}_2 .

图4是在 $w(t) \neq 0$ 时, 系统(1)在协议(2)下实现包围控制的仿真结果.

由图4可以看出, 在干扰存在的情况下, 跟随者最终收敛到静态领航者张成的凸包, 并且保持在凸包内.

图5表示 $w(t) \neq 0$ 时, 系统(3)的输出 $y(t)$.

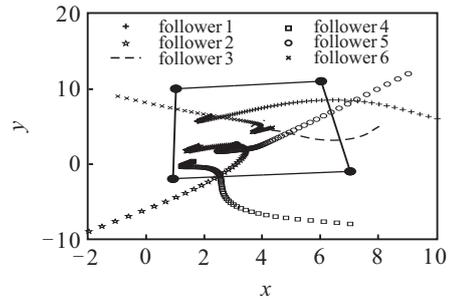


图4 $w(t) \neq 0$ 时, 每个智能体的状态轨迹

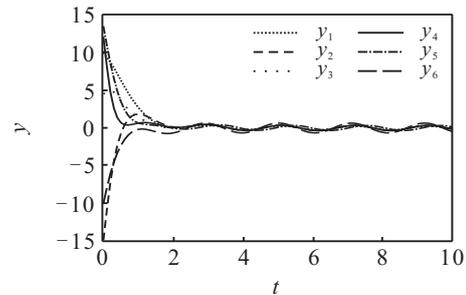


图5 $w(t) \neq 0$ 时系统 (3) 的输出 $y(t)$

由图5可以看出, y_1, y_2, \dots, y_6 在有限时间内, 波动逐渐减小, 最终趋于0, 由 $y_F(t) = \mathcal{L}_{FF}\delta(t)$ 可知, $\delta(t)$ 趋于0, 即系统(11)渐近稳定, 多智能体系统实现了包围控制. 仿真结果与理论结果完全一致.

5 结 论

本文研究了一阶时变时滞多智能体系统的 H_∞ 包围控制问题. 结果表明, 系统实现包围控制的条件和确定 H_∞ 包围控制性能 γ 的条件都取决于有向拓扑 G 的结构和时滞的上界. 值得一提的是, 由于在控制输入(2)中, 通信时滞 $d_{ij}(t)$ 不一定相同, 使得多智能体不在同一时刻获取其邻居的信息, 从而造成多智能体更新其状态的异步性. 因此, 本文的时变通信时滞控制协议情况下的包围控制研究方法可以推广到异步情况下的包围控制问题. 当然, 二阶多智能体系统, 甚至高阶多智能体系统, 在时变通信时滞控制协议下的 H_∞ 包围控制问题将是下一步研究的方向.

参考文献 (References)

[1] Huang C, Ho D W C, Lu J Q. Synchronization analysis of a complex network family[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(3): 1933-1945.
 [2] Lu J Q, Ho D W C. Stabilization of complex dynamical networks with noise disturbance under performance constraint[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(4): 1974-1984.
 [3] Lu J Q, Ding C D, Lou J G, et al. Outer synchronization of partially coupled dynamical networks via pinning impulsive controllers[J]. J of the Franklin Institute, 2015,

- 352(11): 5024-5041.
- [4] Xiao F, Wang L. Consensus protocols for discrete-time multi-agent systems with time-varying delays[J]. *Automatic*, 2008, 44(10): 2577-2582.
- [5] Xiao F, Wang L, Chen T W. Finite-time consensus in networks of integrator-like dynamic agents with directional link failure[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2014, 59(3): 756-762.
- [6] Sun Y G, Wang L. Consensus of multi-Agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1607-1613.
- [7] Olfati-Saber R, Murray Richard M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1521-1533.
- [8] 罗小元, 李旭, 李绍宝, 等. 分布式离散多智能体系统在固定和切换拓扑下的编队控制[J]. *控制与决策*, 2013, 28(12): 1869-1873.
(Luo X Y, Li X, Li S B, et al. Distributed discrete-time formation control of multi-agent systems under fixed and switching topologies[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(12): 1869-1873.)
- [9] Dong Y, Huang J. A leader-following rendezvous problem of double integrator multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1386-1391.
- [10] 李春光, 刘国栋, 娄柯. 二阶多智能体系统量化蜂拥控制[J]. *控制与决策*, 2015, 30(3): 541-545.
(Li C G, Liu G D, Lou K. Quantized flocking control of multiple agents with second-order dynamics[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(3): 541-545.)
- [11] Ji M, Ferrari-Trecate G, Egerstedt M, et al. Containment control in mobile networks[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(8): 1972-1975.
- [12] Cao Y C, Stuart D, Ren W, et al. Distributed containment control for double integrator dynamics: Algorithms and experiments[C]. *Proc of the American Control Conf. Baltimore: IEEE*, 2010: 3830-3835.
- [13] Cao Y C, Ren W, Egerstedt M. Distributed containment control with multiple stationary or dynamic leaders in fixed and switching directed networks[J]. *Automatica*, 2012, 48(8): 1586-1597.
- [14] Liu H Y, Xie G M, Wang L. Necessary and sufficient conditions for containment control of networked multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1415-1422.
- [15] Liu H Y, Xie G M, Wang L. Containment of linear multi-agent systems under general interaction topologies[J]. *System and Control Letters*, 2012, 61(4): 528-534.
- [16] Yan F, Xie D M. Containment control of multi-agent systems with time-delay[J]. *Trans of the Institute of Measurement and Control*, 2014, 36(2): 196-205.
- [17] Lou Y C, Hong Y G. Target containment control of multi-agent systems with random switching interconnection topologies[J]. *Automatica*, 2012, 48(5): 879-885.
- [18] Wang X H, Hong Y G, Ji H B. Adaptive multi-agent containment control with multiple parametric uncertain leaders[J]. *Automatica*, 2014, 50(9): 2366-2372.
- [19] Li Z K, Ren W, Liu X D, et al. Distributed containment control of multi-agent systems with general linear dynamics in the presence of multiple leaders[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(5): 534-547.
- [20] Dong X, Xi J, Lu G, et al. Containment analysis and design for high-order linear time-invariant singular swarm systems with time delays[J]. *Int J of Robust Nonlinear Control*, 2014, 24(7): 1189-1204.
- [21] Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies[J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2092-2099.
- [22] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*[M]. Philadelphia: SIAM, 1994: 7-28.
- [23] Gu K Q. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]. *Proc of the 39th Conf on Decision and Control. Sydney: IEEE*, 2000: 2805-2810.

(责任编辑: 闫妍)