

灰参数电路的控制问题及系统状态仿真分析

杨 洋^{1,2}, 薛定宇^{1†}

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004; 2. 渤海大学 工学院, 辽宁 锦州 121013)

摘要: 实际系统模型难以使用确定参数进行描述, 含有灰参数的电路普遍存在. 基于灰数、灰色控制和电路分析等方法, 对灰色电路系统进行分析, 具有一定的理论和实践意义. 以某一灰色 RLC 电路模型为例, 研究其能控、能观、稳定性、电路仿真等问题. 灰色电路的研究有助于灰色系统模型的仿真验证和硬件实现, 丰富灰色电路和灰色控制等领域, 也可应用于不确定性电路分析、系统建模和控制等问题.

关键词: 灰色电路; 灰模型; 不确定系统; 灰色控制

中图分类号: TP391.9 **文献标志码:** A

Control problem and system state simulation analysis of circuit with grey parameters

YANG Yang^{1,2}, XUE Ding-yu^{1†}

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. College of Engineering, Bohai University, Jinzhou 121013, China)

Abstract: It is difficult to describe, the actual system model by the determined parameters, and the circuit with grey parameters is universal. Therefore, based on the grey number, grey control and circuit analysis, the grey circuit system is analyzed, which has a certain theoretical and practical significance. By taking a grey RLC circuit model as the example, the controllability, observability, stability and circuit simulation are studied. The research of the grey circuit is beneficial to the simulation verification and hardware implementation in the grey system control, which will also promote the fields of grey circuit and grey control, and can be applied to the problems of uncertain circuit analysis, systems modeling and control.

Keywords: grey circuit; grey model; uncertain systems; grey control

0 引言

因为技术条件、认知与信息不足等限制, 对实际系统模型难以使用确定参数描述, 因此不确定系统的研究具有较高的实际意义和应用价值. 研究这类系统的理论和方法主要有模糊数学、灰色系统、粗糙集、区间系统和随机系统等^[1-2]. 实际物理电路中参数的变化在所难免, 如输入电压、温度、器件老化、外界干扰、建模过程中的简化及其他难以排除的环境因素等, 使得实际电路系统具有某种确定性和不确定性^[3], 值得进一步分析和研究.

现有文献中基于不确定性电路系统及含有灰参数电路的分析和研究较少, 类似的工作主要有混沌电路参数设计和控制的研究^[4-5]. 文献[6]讨论了区间分析在含有不确定数据的电路理论研究中的应用. 文

献[7]针对不确定性系统建模, 通过两种线性分式变换(LFT)方法进行分析, 并应用于一个RLC串联电路. 由于神经元的活动可以利用神经模型映射理论到实际电路进行验证, 文献[8]通过对实际电路的数值研究, 证实了神经元电路的噪声与电路行为的关系. 文献[9]介绍了R(t)LC介观电路的量子化工作, 并对一个有源R(t)LC串联电路进行分析. 文献[10-11]建立了以概率矩阵为基础的逻辑单元, 运用矩阵运算和符号方法评估一般逻辑电路的错误概率.

灰色系统理论为“小样本”、“贫信息”不确定性系统的研究提供了重要的研究方法, 并着重研究“外延明确, 内涵不明确”的对象. 灰数是灰色系统的基本“单元”, 也是灰色系统行为特征的一种表现形式. 灰色控制是经典白化控制的一般情况, 其不同于

收稿日期: 2016-02-02; 修回日期: 2016-07-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174145, 61673094, 61603080).

作者简介: 杨洋(1984—), 女, 博士生, 从事复杂系统建模与优化的研究; 薛定宇(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事分数阶控制、不确定性系统建模等研究.

†通讯作者. E-mail: xuedingyu@ise.neu.edu.cn

白化控制主要为灰数的存在.因此,灰色控制思想能深刻揭示问题的本质,并有利于控制目标实现^[12-15].目前常用的灰色控制包括灰色预测控制、灰色非线性控制、灰色PID控制、灰色滑模变结构控制、灰色相平面控制、灰色模糊控制、灰色滞后控制和自适应灰色控制等.可变参数电路的不确定性具有灰色系统“灰”的特点,在确定时刻,可变电路系统内部参数确定,系统模型可视为白化电路.

由上述分析可知,可变电路系统与不确定性系统本质是一致的,可以通过灰色控制对灰色电路的控制问题加以分析,利用灰色电路对灰色系统进行物理模型仿真和实验结果辅助验证,如频域响应、方程求解、稳定性和等价性等.本文在借鉴灰数的代数运算与灰色控制的相关理论上,对含有灰参数电路模型控制问题和系统状态进行分析研究,以某一类灰色区间电路——RLC串并联混合电路为例,验证方法的可行性.

1 灰色线性控制系统

1.1 灰数

在科学领域中有一类系统,如生物系统、病理诊断系统等,其构成元素具有内涵不清楚、数据不确切、信息(包括元素、结构信息、边界信息和运行行为)不完全等特点.灰色系统理论为这类系统的研究提供了重要的研究方法.

在实际应用中,灰数常指在某个区间或数集内取值含有不确定数,主要包含以下几类:1)仅有下界或上界的灰数;2)本征或非本征灰数;3)区间灰数;4)连续或离散灰数.其中区间灰数作为灰数的一种重要组成形式在实践中较为常用^[2].区间灰数的运算也得到研究,包括加法、减法、乘法和除法等,将区间灰数之间的运算转化为实数运算有利于向灰色代数方程、灰色微分方程、灰色矩阵运算推广.

设区间灰数 $f_1(\otimes) \in [\underline{a}, \bar{a}] (\underline{a} < \bar{a})$, $f_2(\otimes) \in [\underline{b}, \bar{b}] (\underline{b} < \bar{b})$,其中 \underline{a} 、 \underline{b} 和 \bar{a} 、 \bar{b} 分别为区间灰数的下界和上界.对于 $f_1(\otimes)$,其白化值为 $\tilde{f}_1(\otimes) = \alpha \underline{a} + (1 - \alpha) \bar{a}$, $\alpha \in [0, 1]$,其中 α 为灰数的定位系数,形如 $\tilde{f}_1(\otimes)$ 的白化称为定位系数 α 的白化.

灰数的基本运算法则为

$$\begin{aligned} f_1(\otimes) + f_2(\otimes) &\in [\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \\ f_1(\otimes) - f_2(\otimes) &\in [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}], \\ f_1(\otimes) \cdot f_2(\otimes) &\in \\ &[\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}], \\ f_1(\otimes)/f_2(\otimes) &\in \end{aligned}$$

$$[\min\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}\}, \max\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}\}].$$

含有灰参数的矩阵称为灰色矩阵,简称灰矩阵,记为

$$A(\otimes) = \begin{bmatrix} \otimes_{11} & \otimes_{12} & \cdots & \otimes_{1n} \\ \otimes_{21} & \otimes_{22} & \cdots & \otimes_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \otimes_{m1} & \otimes_{m2} & \cdots & \otimes_{mn} \end{bmatrix}.$$

其中: $\otimes_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, ($\underline{a}_{ij} < \bar{a}_{ij}$), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.设两个灰矩阵 $A(\otimes) = [\otimes_{ij}]_{mn}$ 和 $B(\otimes) = [\otimes'_{ij}]_{mn}$.灰矩阵的运算法则为

$$A(\otimes) + B(\otimes) = [\otimes_{ij} + \otimes'_{ij}]_{mn},$$

$$A(\otimes) - B(\otimes) = [\otimes_{ij} - \otimes'_{ij}]_{mn}.$$

若 $B(\otimes) = [\otimes'_{ij}]_{sn}$,则

$$A(\otimes) \cdot B(\otimes) = [\otimes''_{ij}]_{mn}.$$

其中

$$\otimes''_{ij} = \otimes_{i1} \otimes'_{1j} + \otimes_{i2} \otimes'_{2j} + \cdots + \otimes_{is} \otimes'_{sj},$$

$$\otimes'_{sj} = \sum_{k=1}^s \otimes_{ik} \otimes'_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

针对区间灰数的灰色电路模型,利用灰数的性质和运算法则对其进行分析和研究,更多灰矩阵的运算可以参见文献[2].

1.2 灰色线性系统模型

状态空间描述可以展示系统的内部结构,对于灰色线性控制系统,其状态空间模型为

$$\dot{x} = A(\otimes)x + B(\otimes)u,$$

$$y = C(\otimes)x + D(\otimes)u. \quad (1)$$

其中: $x \in R^{n \times 1}$ 为状态向量; $u \in R^{p \times 1}$ 为输入向量,也称控制向量; $y \in R^{q \times 1}$ 为输出向量; $A(\otimes) \in R^{n \times n}$ 为灰色状态矩阵; $B(\otimes) \in R^{n \times p}$ 为灰色控制矩阵; $C(\otimes) \in R^{q \times n}$ 为灰色输出矩阵; $D(\otimes) \in R^{q \times p}$ 为灰色前馈矩阵.

在某一确定时刻,灰色状态空间可用白化状态空间模型(线性定常系统)表示.因此,灰色线性控制系统的数学模型也可以表示为

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du. \quad (2)$$

其中: $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$, $B \in [\underline{B}, \bar{B}]$, $C \in [\underline{C}, \bar{C}]$, $D \in [\underline{D}, \bar{D}]$,均具有连续矩阵覆盖. $A(\otimes)$ 的中心矩阵 $A^C = (\underline{A} + \bar{A})/2$.对于任意白化矩阵 $\tilde{A} \in \{\tilde{A}\}$, $\Delta A = \tilde{A} - A^C$ 称为心偏差或心摄动.对于任意 $\tilde{A} \in \{\tilde{A}\}$,均有 $\tilde{A} = \Delta A + A^C$.

灰色微分方程可以表示为

$$\begin{aligned}
 & a_n(\otimes)D_t^{\alpha_n}y(t) + a_{n-1}(\otimes)D_t^{\alpha_{n-1}}y(t) + \\
 & \dots + a_0(\otimes)D_t^{\alpha_0}y(t) = \\
 & b_m(\otimes)D_t^{\beta_m}u(t) + b_{m-1}(\otimes)D_t^{\beta_{m-1}}u(t) + \\
 & \dots + b_0(\otimes)D_t^{\beta_0}u(t).
 \end{aligned} \tag{3}$$

其中: $D_t^{\alpha_i}$ 为微分, $a_i(\otimes) (i = 0, 1, \dots, n)$ 和 $b_j(\otimes) (j = 0, 1, \dots, m)$ 为灰色微分方程的灰系数. 事实上, 灰色微分方程由很多白化方程构成, 不失一般性, 假设 $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0, \beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$.

灰色传递函数矩阵可以表示为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(\otimes)(sI - A(\otimes))^{-1}B(\otimes) + D(\otimes). \tag{4}$$

其中: $U(s)$ 和 $Y(s)$ 分别为输入和输出信号的拉式变换, $G(s)^{-1}$ 为灰色结构阵. 若 $s = j\omega$, 则式(4)可以表示为

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) = & \frac{b_m(\otimes)(j\omega)^{\beta_m} + b_{m-1}(\otimes)(j\omega)^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0(\otimes)(j\omega)^{\beta_0}}{a_n(\otimes)(j\omega)^{\alpha_n} + a_{n-1}(\otimes)(j\omega)^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0(\otimes)(j\omega)^{\alpha_0}}
 \end{aligned} \tag{5}$$

其特征多项式为

$$a_n(\otimes)s^{\alpha_n} + a_{n-1}(\otimes)s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0(\otimes)s^{\alpha_0} = 0. \tag{6}$$

灰色 Kharitonov 多项式可以表示为

$$P(s, \alpha_i, a_i(\otimes)) = \sum_{i=0}^n a_i(\otimes)s^{\alpha_i}.$$

根据灰参数的个数 n 构造 2^n 多项式

$$P(s, \alpha_i, a_i(\otimes)) = \sum_{i=0}^n [a_i^-, a_i^+]s^{\alpha_i}.$$

由此可以进一步检验极点对系统稳定性的影响.

1.3 灰色线性控制问题

能控性、能观性和稳定性等对研究系统控制和估计问题具有重要意义. 由灰色控制系统理论可知, 当 $\text{rank}(U(\otimes)) = n$ 时, 灰色系统可控, 当 $\text{rank}(V(\otimes)) = n$ 时, 灰色系统可观. 其中

$$\begin{aligned}
 U(\otimes) &= [B(\otimes), A(\otimes)B(\otimes), \dots, A^{n-1}(\otimes)B(\otimes)], \\
 V(\otimes) &= [C(\otimes), C(\otimes)A(\otimes), \dots, C(\otimes)A^{n-1}(\otimes)]^T.
 \end{aligned}$$

稳定性是系统正常工作的前提, 灰色系统稳定性研究的是当信息改变或灰参数在其数域范围内变化时, 系统是否能够最终保持或恢复稳定性^[2]. 灰色系统稳定性的研究是控制理论和工程领域的热点和难点^[16]. 目前主要采用李亚普诺夫函数方法, 获得系统大范围一致渐近稳定的充分性判据. 此外, 文献[17]

通过矩阵的正定判断系统的稳定性, 如果存在一个正定矩阵 P , 使得 $P\bar{A} + \bar{A}^T P + 2\lambda_{\max}(P) \|\bar{A} - \underline{A}\| I_n < 0$ 或 $P\bar{A} + \bar{A}^T P + 2\lambda_{\max}(P) \|\bar{A} - \underline{A}\| I_n < 0$, 则系统稳定. 若矩阵 $\bar{A} + \bar{A}^T + \lambda_{\max}[(\bar{A} - \underline{A}) + (\bar{A} - \underline{A})^T] I_n$ 为负定, 则灰色系统为渐近稳定; 若该矩阵为正定, 则灰色系统不稳定. $\bar{A} - \underline{A}$ 实际上是系统灰矩阵的扰动误差矩阵. 文献[9]给出了一种稳定性判断的充分判据. 对于 $n \times n$ 阶矩阵 A , 有

$$\lambda_{\min}\left(\frac{A + A^T}{2}\right) \leq \text{Re}\lambda_i(A) \leq \lambda_{\max}\left(\frac{A + A^T}{2}\right), \forall i.$$

其中: λ_{\min} 和 λ_{\max} 分别为矩阵的最小与最大特征值, $\text{Re}\lambda_i$ 为矩阵第 i 个特征值的实部^[18]. 若灰系统的任意白化系统都是稳定的, 则该系统是鲁棒稳定的. 灰色线性定常系统状态方程渐近稳定, 其实质是矩阵 $A = \{A = [a_{ij}]_{n \times n}\}$ 中任一元素的所有特征值具有负实部^[18], 即

$$\text{Re}(\lambda_i(A(\otimes))) < 0, i = 1, 2, \dots, n; \tag{7a}$$

或

$$\min_i |\arg \lambda_i(A(\otimes))| > \frac{\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n. \tag{7b}$$

因此, 可由灰系数矩阵 $A(\otimes)$ 判断灰色线性系统的稳定性. 根据文献[19-21]、式(7a)和(7b)给出的系统稳定性结论, 本文采用灰系数矩阵所有特征值是否为负的灰色区间电路稳定性判断方法, 物理意义清晰, 求解方便. 若灰色区间矩阵 $A(\otimes) = [A^C - \Delta A, A^C + \Delta A] = [A, \bar{A}]$, 则灰色特征值 $\lambda(\otimes)$ 满足

$$A(\otimes)x = \lambda(\otimes)x, \tag{8}$$

其中 $\lambda_i(\otimes) = [\underline{\lambda}_i^{\text{re}}, \bar{\lambda}_i^{\text{re}}] + j[\underline{\lambda}_i^{\text{im}}, \bar{\lambda}_i^{\text{im}}]$.

$$v_i u_j = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$v_i^{\text{re}} = \text{Re}(v_i), v_i^{\text{im}} = \text{Im}(v_i);$$

$$u_i^{\text{re}} = \text{Re}(u_i), u_i^{\text{im}} = \text{Im}(u_i);$$

$$P^i = \text{sgn}[(u_i^{\text{re}} v_i^{\text{re}} - u_i^{\text{im}} v_i^{\text{im}})].$$

A^C 左特征值向量和右特征值向量分别为 u_i 和 v_i , 如果 P^i 对于所有 A^I 都是常数, 则区间特征值实部的下界和上界分别为

$$\lambda_i^{\text{re}} = \theta_i^{\text{re}}(A^C - \Delta A \circ P^i),$$

$$\bar{\lambda}_i^{\text{re}} = \theta_i^{\text{re}}(A^C + \Delta A \circ P^i).$$

其中: $\theta_i^{\text{re}}(\cdot)$ 为选择第 i 个实特征值 (\cdot) 的算子, $C = A \circ B$ 表示 $C_{kj} = a_{kj} b_{kj}$.

2 灰色电路模型分析

所谓灰色电路模型, 是指电路模型中元件参数具有灰数特点, 参数在某个区间或数集内取值含有不确定数, 简称灰电路. 本文以某 RLC 串并联混合的可变

参数灰色电路为例进行分析,电路模型如图1所示.

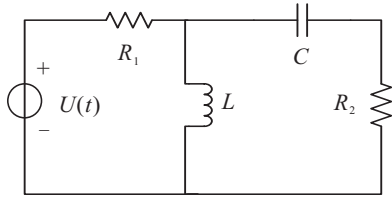


图1 可变参数灰色电路的电路模型

由KVL和KCL定律,可以导出

$$\begin{aligned} u(t) - L \frac{di_L}{dt} &= R_1(\otimes) i_L + R_1(\otimes) C \frac{du_C}{dt}, \\ L \frac{di_L}{dt} &= u_C + R_2(\otimes) C \frac{du_C}{dt}. \end{aligned} \quad (9)$$

其中: u_C 为电容两端电压, i_L 为流经电感的电流. 设初始状态均为0, 对方程(9)作拉氏变换, 得

$$\frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{Ls}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))LCs^2 + (R_1(\otimes)R_2(\otimes)C + L)s + R_1(\otimes)}.$$

灰色电路的状态空间为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} &= A(\otimes) \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + B(\otimes)u, \\ u_{R_2} &= C(\otimes) \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + D(\otimes)u. \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} A(\otimes) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))C} & -\frac{R_1(\otimes)}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))C} \\ \frac{R_1(\otimes)}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))L} & -\frac{R_1(\otimes)R_2(\otimes)}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))L} \end{bmatrix}, \\ B(\otimes) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))C} & \frac{R_2(\otimes)}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))L} \end{bmatrix}^T, \\ C(\otimes) &= \begin{bmatrix} -\frac{R_2(\otimes)}{R_1(\otimes) + R_2(\otimes)} & -\frac{R_1(\otimes)R_2(\otimes)}{R_1(\otimes) + R_2(\otimes)} \end{bmatrix}, \\ D(\otimes) &= \begin{bmatrix} \frac{R_2(\otimes)}{R_1(\otimes) + R_2(\otimes)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad Y(s) = R_2(\otimes)CSU_C(s),$$

有

$$G(s) = \frac{R_2(\otimes)LCs^2}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))LCs^2 + (R_1(\otimes)R_2(\otimes)C + L)s + R_1(\otimes)}.$$

若 $s = j\omega$, 则有

$$G(j\omega) = \frac{R_2(\otimes)LC\omega^2}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))LC\omega^2 - j(R_1(\otimes)R_2(\otimes)C + L)\omega - R_1(\otimes)}.$$

该灰色电路的输入输出关系可用一组灰色微分方程

表示, 其形式为

$$\begin{aligned} (R_1(\otimes) + R_2(\otimes))LC\ddot{y}(t) + \\ (R_1(\otimes)R_2(\otimes)C + L)\dot{y}(t) + R_1(\otimes)y(t) = \\ R_2(\otimes)LC\ddot{u}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

设 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$, 方程(10)可改写为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-(R_1(\otimes)R_2(\otimes)C + L)x_2 - R_1(\otimes)x_1 + R_2(\otimes)LC\ddot{u}(t)}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))LC} \end{bmatrix}.$$

灰色电路控制模型的能控性、能观性分别为

$$\begin{aligned} \text{rank}(U(\otimes)) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))C} & \frac{-L - R_1(\otimes)R_2(\otimes)C}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))^2LC^2} \\ \frac{R_2(\otimes)}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))L} & \frac{R_1(\otimes)L - R_1(\otimes)R_2^2(\otimes)C}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))^2L^2C} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rank}(V(\otimes)) &= \begin{bmatrix} -\frac{R_2(\otimes)}{R_1(\otimes) + R_2(\otimes)} \\ \frac{R_2(\otimes)L - R_1^2(\otimes)R_2(\otimes)C}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))^2LC} \\ -\frac{R_1(\otimes)R_2(\otimes)}{R_1(\otimes) + R_2(\otimes)} \\ \leftarrow \frac{R_1(\otimes)R_2(\otimes)L + R_1^2(\otimes)R_2^2(\otimes)C}{(R_1(\otimes) + R_2(\otimes))^2LC} \right]. \end{aligned}$$

3 仿真实验

为了简化问题, 对含有可变区间参数的灰色电路进行分析和仿真, 具体以图1所示的灰色RLC电路为研究对象, 进行控制性能分析和数值、电路仿真, 以验证所提出方法的有效性. 图1所示电路元件参数如下:

$$C = 1 \text{ mF}, \quad L = 1 \text{ mH};$$

$$R_1(\otimes) + R_2(\otimes) = 10 \text{ k}\Omega,$$

$$R_1(\otimes) = [1 \text{ k}\Omega, 5 \text{ k}\Omega];$$

$$A(\otimes) = \begin{bmatrix} -0.1 & \otimes_1 \\ \otimes_2 & \otimes_3 \end{bmatrix}, \quad B(\otimes) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ \otimes_4 \end{bmatrix};$$

$$C(\otimes) = [\otimes_5 \quad \otimes_6], \quad D(\otimes) = [\otimes_7];$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.5 \\ 0.1 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ 0.5 & -0.9 \end{bmatrix};$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{bmatrix};$$

$$\underline{C} = [-0.9 \quad -2.5], \quad \bar{C} = [-0.5 \quad -0.9].$$

中心矩阵为

$$A^C = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.3 \\ 0.3 & -1.7 \end{bmatrix},$$

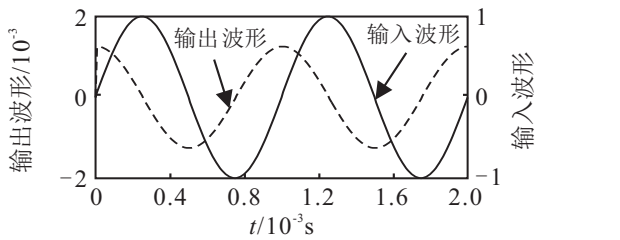
区间半径矩阵为

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

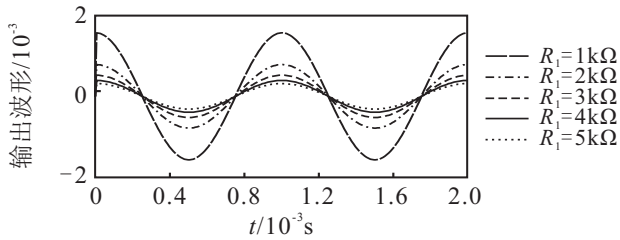
由灰色系统能控性判据可知,若灰色系统不完全能控,则需满足 $R_1(\otimes) + R_2(\otimes) = 0$,这与给定的电阻条件相矛盾,可以判断系统完全能控.同理,当 $R_1 = R_2 = 5\text{ k}\Omega$ 时,灰色电路系统不完全能观,其余条件下系统完全能观.由前述方法可求得,灰色区间矩阵 $A(\otimes)$ 的特征值分别为

$$\lambda_1(\otimes) \in [-0.5, -0.1042],$$

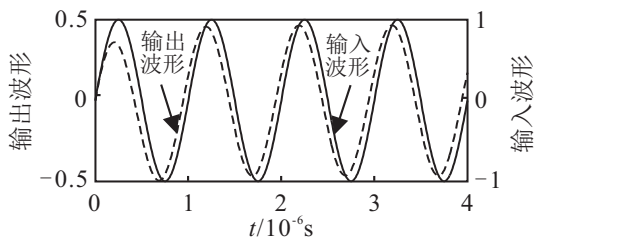
$$\lambda_2(\otimes) \in [-2.4958, -0.5],$$



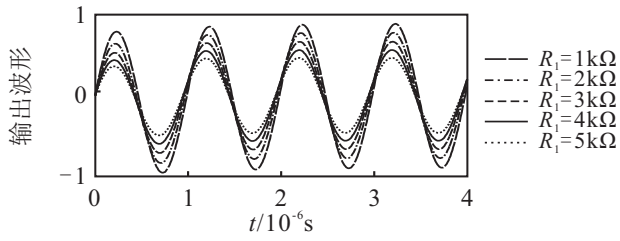
(a) 输入信号频率为1kHz



(b) 输入信号频率为1kHz, R_1, R_2 变化



(c) 输入信号频率为1MHz



(d) 输入信号频率为1mHz, R_1, R_2 变化

图2 系统的输出响应

均具有负实部.因此,该灰色电路系统是稳定的.灰色多项式表示为

$$P(s, \alpha_i, a_i(\otimes)) = (R_1(\otimes) + R_2(\otimes))LCS^2 + (R_2(\otimes)C + L)S + R_1(\otimes) = a_2s^2 + a_1(\otimes)s + a_0(\otimes).$$

其中

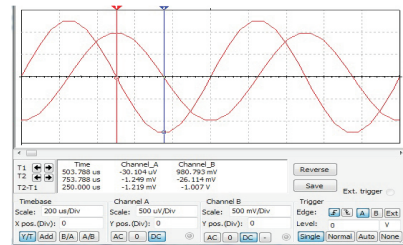
$$a_2 = 0.01, a_1(\otimes) \in [900\ 000.1, 2\ 500\ 000.1],$$

$$a_0(\otimes) \in [1\ 000, 5\ 000].$$

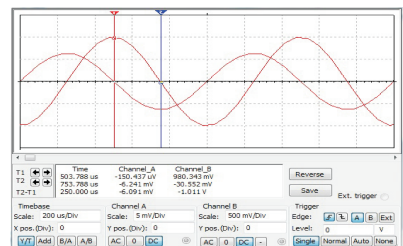
构造4个灰色 Khairitonov 多项式分别为

$$a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0, a_2s^2 + a_1s + \bar{a}_0 = 0,$$

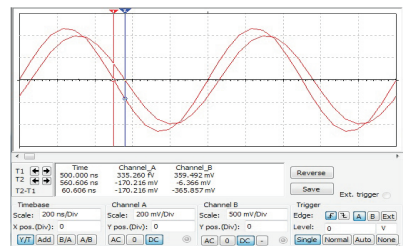
$$a_2s^2 + \bar{a}_1s + a_0 = 0, a_2s^2 + \bar{a}_1s + \bar{a}_0 = 0.$$



(a) 信号频率为1kHz, $R_1=R_2=5\text{ k}\Omega$



(b) 信号频率为1kHz, $R_1=1\text{ k}\Omega, R_2=9\text{ k}\Omega$



(c) 信号频率为1MHz, $R_1=R_2=5\text{ k}\Omega$



(d) 信号频率为1MHz, $R_1=1\text{ k}\Omega, R_2=9\text{ k}\Omega$

图3 输入输出仿真波形

通过灰色特征值的判断结果与灰色 Kharitonov 多项式的求解对系统稳定性的影响本质是一致的. 分别选择 1 kHz 和 1 mHz 正弦信号作为系统的输入, 在 Matlab 环境下根据系统的传递函数求出输出响应, 结果如图 2 所示.

在 Multisim 13 环境下, 灰色电路输出和交流分析的仿真实验结果分别如图 3 和图 4 所示.

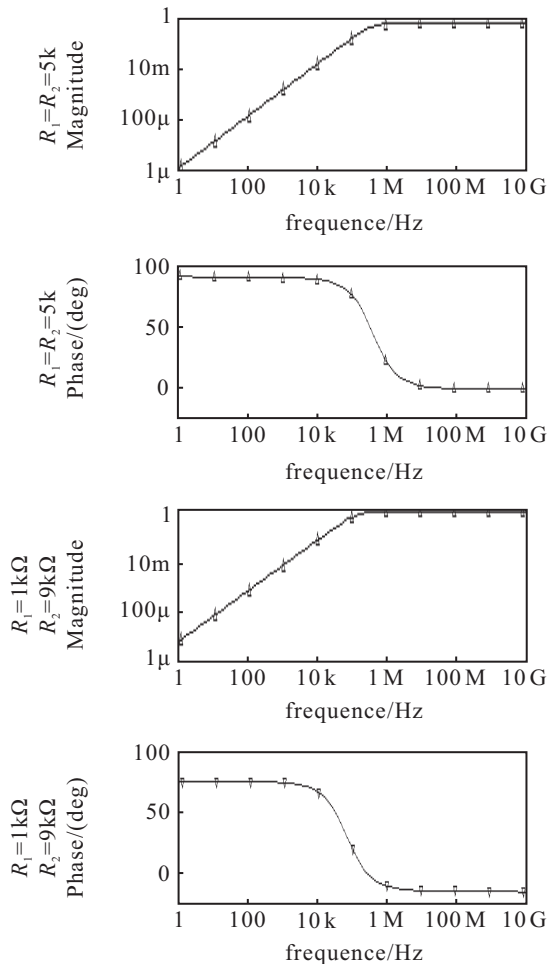


图 4 交流分析图

由图 2 和图 3 可见, Matlab 数值分析与电路仿真得到的实验结果相一致. 利用电路的测量工具可以准确且有效获得灰色电路的输出实验结果.

利用灰色控制理论对灰色电路进行分析, 可以有效获得灰色电路的基本控制性能. 由于灰参数的存在, 灰色电路研究更为复杂. 通过电路仿真软件可以在一定程度上简化模型问题, 实现辅助验证, 且电路仿真结果直观, 物理意义清晰. 由图 3 和图 4 可见, R_1 阻值和输入信号源频率的变化都将影响输出幅度的变化. 当 R_1 阻值增加时, 输出幅度减小; 当输入信号源在低频和中频范围且频率增加时, 输出幅度增加, 在高频范围输出幅度最终稳定. 当输入信号源在低频时, 输出相位基本保持不变; 当信号源在 10 kHz 与 10 mHz 之间时, 输出相位变化较快. $R_1 = R_2 =$

5 k Ω , 信号频率分别为 1 kHz 和 1 mHz 时, 输入输出信号分别约有 90° 和 20° 的相位差; 当 $R_1 = 1$ k Ω , $R_2 = 9$ k Ω , 信号频率分别为 1 kHz 和 1 mHz 时, 输入输出分别约有 90° 和 10° 度的相位差.

4 结 论

本文提出了灰色电路的概念, 借助灰数的代数运算, 研究了灰色线性定常电路系统在控制问题中能控、能观、稳定性、输出和频域分析等基本问题, 具有一定的理论和实践意义. 灰色电路模型的研究不仅包含一般电路系统含有灰参数的情形, 还包含运用灰色系统分析、控制等问题. 灰色电路的提出和发展不仅有助于对灰色物理模型的电路仿真、验证和硬件实现, 还会对未来可能出现的控制问题及时排查、预警和保护. 相关研究成果可以为灰色电路、灰色控制等相关问题的发展提供借鉴作用, 对于如何设计灰色电路、复杂模型灰数和灰色电路模型的简化、灰非线性电路、灰延时电路、灰切换电路和灰时滞等电路模型的分析有待进一步研究.

参考文献(References)

- [1] 苏春华, 刘思峰, 葛世龙, 等. 具有分布时滞的随机区间系统的鲁棒镇定[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2464-2468.
(Su C H, Liu S F, Ge S L, et al. Robust stabilization of stochastic interval systems with distributed-delay[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2464-2468.)
- [2] 刘思峰, 杨英杰, 吴利丰, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第7版. 北京: 科学出版社, 2005: 1-10
(Liu S F, Yang Y J, Wu L F, et al. Grey system theory and its application[M]. 7th ed. Beijing: Science Press, 2015: 1-10.)
- [3] Liu B, Gielen G, Fernández F V. Process variation-aware analog circuit sizing: Uncertain optimization[M]. Automated Design of Analog and High-frequency Circuits. Berlin: Springer-Heidelberg, 2014: 85-105.
- [4] Shahzad M, Pham V T, Ahmad M A, et al. Synchronization and circuit design of a chaotic system with coexisting hidden attractors[J]. The European Physical J Special Topics, 2015, 224(8): 1637-1652.
- [5] 黄丽莲, 辛方, 王霖郁, 等. 新分数阶超混沌系统的研究与控制及其电路实现[J]. 物理学报, 2011, 60(1): 67-75.
(Huang L L, Xin F, Wang L Y, et al. Circuit implementation and control of a new fractional-order hyperchaotic system[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(1): 67-75.)

- [6] Fennigkoh L. Wiley encyclopedia of electrical and electronics engineering[J]. Biomedical Instrumentation & Technology, 2002, 36(5): 355.
- [7] Sumsurooah S, Odavic M, Boroyevich D. Modelling and robust stability analysis of uncertain systems[C]. Proc of the 2013 Grand Challenges on Modeling and Simulation Conf. California: Society for Modeling & Simulation International, 2013: 117-124.
- [8] Ren G, Tang J, Ma J, et al. Detection of noise effect on coupled neuronal circuits[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 29(1): 170-178.
- [9] 凌瑞良. R(t)LC 介观电路的量子力学处理[J]. 物理学报, 1999, (12): 2343-2348.
(Ling R L. Quantum mechanics treatment of R(t)LC mesoscopic circuit[J]. Acta Physica Sinica, 1999(12): 2343-2348.)
- [10] Krishnaswamy S, Markov I L, Hayes J P. Design, analysis and test of logic circuits under uncertainty[M]. New York: Springer Science & Business Media, 2012: 1-17.
- [11] Krishnaswamy S, Viamontes G F, Markov I L, et al. Probabilistic transfer matrices in symbolic reliability analysis of logic circuits[J]. ACM Trans on Design Automation of Electronic Systems(TODAES), 2008, 13(1): 1-8.
- [12] Ju-Long D. Control problems of grey systems[J]. Systems & Control Letters, 1982, 1(5): 288-294.
- [13] Lin W M, Hong C M, Huang C H, et al. Hybrid control of a wind induction generator based on Grey-Elman neural network[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2013, 21(6): 2367-2373.
- [14] Truong D Q, Ahn K K, Trung N T. Design of an advanced time delay measurement and a smart adaptive unequal interval grey predictor for real-time nonlinear control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2013, 60(10): 4574-4589.
- [15] Wang Z X. Application of grey linear control theory for price regulation in China's real estate market[J]. Kybernetes, 2013, 42(3): 413-422.
- [16] 黄廷祝, 成孝予, 蒲和平, 等. 灰色离散系统的稳定性[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(2): 244-247.
(Huang T Z, Cheng X Y, Pu H P, et al. The stability of grey discrete systems[J]. Control Theory & Applications, 1999, 16(2): 244-247.)
- [17] 苏春华, 刘思峰. 一类区间随机分布时滞系统的 p -阶矩指数稳定性[J]. 应用数学, 2009, 22(2): 413-420.
(Su C H, Liu S F. p -moment exponential stability for a class of interval stochastic distributed delay systems[J]. Mathematica Applicata, 2009, 22(2): 413-420.)
- [18] 邓聚龙, 周朝顺. 灰色系统稳定性充分条件及其在线性时变系统稳定性分析中的应用[J]. 信息与控制, 1987, 16(4): 24-27.
(Deng J L, Zhou C S. Sufficient condition for stability of grey systems and its application in the analysis of stability of linear time-varying systems[J]. Information and Control, 1987, 16(4): 24-27.)
- [19] Chen Y Q, Ahn H S, Podlubny I. Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties[J]. Signal Processing, 2006, 86(10): 2611-2618.
- [20] Deif A. The interval eigenvalue problem[J]. ZAMM-J of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1991, 71(1): 61-64.
- [21] Qiu Z, Müller P C, Frommer A. An approximate method for the standard interval eigenvalue problem of real non-symmetric interval matrices[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2001, 17(4): 239-251.

(责任编辑: 郑晓蕾)