

# 航天器姿态机动的非线性鲁棒 $H_\infty$ 控制方法

周燕茹, 曾建平<sup>†</sup>

(厦门大学 自动化系, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 针对存在动力学参数摄动及外部干扰的航天器姿态机动问题, 给出一种新的非线性鲁棒  $H_\infty$  控制方法. 通过适当处理和假设, 将航天器姿态模型表示为具有凸多面体不确定性的多项式型状态空间方程, 并基于 Lyapunov 稳定性和平方和 (SOS) 理论, 建立非线性状态反馈  $H_\infty$  控制设计的可解性条件. 最后, 通过数值仿真实例验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 非线性  $H_\infty$  控制; 鲁棒控制; 航天器; 姿态机动; 平方和; 不确定性

**中图分类号:** V474      **文献标志码:** A

## Nonlinear robust $H_\infty$ control for spacecraft attitude maneuver

ZHOU Yan-ru, ZENG Jian-ping<sup>†</sup>

(Department of Automation, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** A new nonlinear robust  $H_\infty$  control approach is proposed for the problem of the spacecraft attitude maneuver with dynamic parameter perturbation and external disturbance. By the appropriate treatment and assumption, the spacecraft attitude model is expressed as a polynomial state space equation with polytopic uncertainty, and the solvable conditions of the nonlinear state feedback  $H_\infty$  control is established based on the Lyapunov stability and the sum of squares (SOS) theories. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the obtained results.

**Keywords:** nonlinear  $H_\infty$  control; robust control; spacecraft; attitude maneuver; sum of squares; uncertainty

## 0 引言

航天器在轨运行时, 其姿态会受到地磁、重力梯度和太阳光压等干扰力矩的持续影响. 另外, 温差、燃料消耗、结构变形等也会引起航天器动力学参数发生变化. 为实现航天器姿态的高精度高稳定度控制, 设计具有强鲁棒性和高抗扰能力的姿态控制器, 已成为现代航天器控制研究的重要内容<sup>[1-10]</sup>. 近 10 年来, 鲁棒控制方法广泛应用于航天器姿态控制, 如  $\mu$ -综合<sup>[1]</sup>、混合灵敏度<sup>[2]</sup>、分散协同  $H_\infty$ <sup>[3]</sup>、多目标优化<sup>[4]</sup> 等. 这些方法有效提高了航天器姿态系统的鲁棒性和抗干扰能力, 但由于采用近似线性化姿态模型, 从原理上看, 它们仅适用于小姿态偏差情形, 而不适用于大角度姿态机动控制. 目前, 解决航天器大角度姿态机动问题多采用智能控制类方法, 如模糊<sup>[5,8]</sup>、自抗扰<sup>[6]</sup>、变结构<sup>[7]</sup> 和自适应<sup>[5,8-9]</sup> 等. 然而, 很多智能控制方法仍是基于线性姿态模型进行设计<sup>[5,7-8]</sup>, 因而限制了其应用范围. 直接基于航天器非线性姿态模型的

鲁棒姿态机动控制方法仍有待于进一步发展.

近年来, 多项式平方和 (SOS) 优化方法被广泛应用于多项式非线性系统研究. SOS 理论为多项式非负性判断提供了有效的凸松弛算法. 在其框架下, 许多基于多项式约束的非线性控制问题都可转化为相应的 SOS 凸规划问题, 从而克服了传统非线性控制设计方法计算困难的不足.

航天器姿态模型本质上是一类特定的多项式非线性系统, 因此可采用 SOS 方法来研究其高精度高稳定度控制问题. 迄今, 基于 SOS 的航天器姿态控制已取得初步研究成果. 文献 [10] 给出了航天器大角度姿态机动镇定控制方法; 通过引入稠密函数, 文献 [11] 研究非线性状态反馈综合问题, 并对刚体航天器进行了数值仿真验证; Zheng 等<sup>[12]</sup> 提出了针对一类轴对称航天器姿态系统的非线性  $H_\infty$  策略; Narendra 等<sup>[13]</sup> 研究了刚体卫星姿态机动切换控制问题; 采用 SOS 结合 Lyapunov 方法, 文献 [14] 提出了一种飞行器

收稿日期: 2016-01-11; 修回日期: 2016-06-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61374037); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (20720150177).

作者简介: 周燕茹 (1986—), 女, 博士生, 从事姿态控制、非线性控制的研究; 曾建平 (1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、非线性控制等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn

大角度姿态机动的保代价控制方案;文献[15]给出了卫星大姿态镇定的迭代非线性 $H_\infty$ 控制方法.此外,SOS理论还被用于研究刚体航天器姿态系统的输出反馈控制<sup>[16]</sup>、自适应反步LPV控制<sup>[17]</sup>、混合 $H_2/H_\infty$ 控制<sup>[18]</sup>等问题.

目前,SOS方法多限于解决标称的刚体航天器姿态控制问题.针对挠性航天器姿态系统,人们已研究了基于SOS的非线性局部输出反馈镇定控制问题<sup>[19]</sup>.考虑到SOS在不确定航天器姿态控制上的应用并不多见,本文针对存在质量特性参数摄动和外部干扰情形,给出一种基于SOS的航天器姿态非线性鲁棒 $H_\infty$ 控制设计方法.文中采用非线性姿态模型,避免了传统线性化方法引起的模型误差,并将质量特性参数摄动表示为凸多面体不确定性.通过选取多项式或有理式型Lyapunov函数,以改善该姿态鲁棒控制问题的可解性条件.此外,该方法所得控制器仅是关于系统状态的多项式或有理式函数,便于工程实现.

## 1 预备知识

文中符号规定说明如下: $R^n$ 、 $R^{m \times n}$ 和 $I$ 分别表示 $n$ 维实向量集、 $m \times n$ 维实矩阵集和单位矩阵;对于 $x \in R^n$ , $\|x\|$ 表示 $x$ 的2范数, $\text{diag}(x)$ 表示由 $x$ 构成的 $n \times n$ 维对角矩阵;对于方阵 $A$ , $\text{He}(A) := A + A^T$ .

为便于后续讨论,给出下列定义和引理.

**定义1**<sup>[20]</sup> 考虑系统

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = A(x)x + B(x)w, \\ z = C(x)x + D(x)w, \end{cases}$$

其初始条件 $x(0) = 0$ .给定标量 $\gamma > 0$ ,如果对于所有的 $T \geq 0$ 和 $w(t) \in L_2[0, T]$ ,都有

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt,$$

则系统 $\Sigma$ 的 $L_2$ -增益 $\leq \gamma$ .

**定义2(SOS)**<sup>[21]</sup> 设 $f(x)$ 是 $x \in R^n$ 的一个多项式,称 $f(x)$ 为SOS,如果存在一组多项式 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ,使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x).$$

显然,SOS多项式是非负的,反之则不一定成立.虽然SOS条件只是多项式非负的一个充分条件,但已有数值仿真实验表明,它们二者间的差距(Gap)不是很大,甚至在某些情况下是等价的<sup>[21-22]</sup>.检验多项式的SOS特性是一个凸优化问题,因而将多项式非负性检验放宽为SOS检验问题,可为多项式非线性控制问题的研究提供一条潜在有效的途径.

**定义3**<sup>[23]</sup> 设 $P(x)$ 是对称多项式矩阵,若其对

于所有 $x \in R^n$ 都非奇异,则

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} = -P(x) \frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial x_i} P(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**定义4**<sup>[24]</sup> 给定适当维数的矩阵 $E$ 、 $H$ 和 $G$ ,其中 $G$ 是对称的,则

$$G + HFE + E^T F^T H^T < 0,$$

对于所有满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 $F$ 成立,当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$ ,使得

$$G + \varepsilon HH^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0.$$

## 2 航天器的非线性不确定姿态模型

航天器姿态系统由运动学和动力学两组方程构成.采用Rodrigues参数<sup>[25]</sup>描述的姿态运动学方程为

$$\dot{\sigma} = \rho(\sigma)\omega, \quad (1)$$

$$\sigma = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^T = \ell \tan \frac{\Phi}{2},$$

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3 & \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 \\ \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 & 1 + \sigma_2^2 & \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \\ \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 & \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 & 1 + \sigma_3^2 \end{bmatrix}.$$

其中: $\sigma$ 为Rodrigues参数向量, $\Phi$ 为绕欧拉轴转动的主角, $\ell = [\ell_1 \ \ell_2 \ \ell_3]^T$ 为满足 $\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 = 1$ 的欧拉轴坐标向量, $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ 为姿态角速度向量.

受外部干扰影响且存在质量特性参数不确定性的航天器姿态动力学方程可表示为<sup>[26]</sup>

$$(J + \Delta J)\dot{\omega} + S(\omega)(J + \Delta J)\omega = T_c + T_d. \quad (2)$$

其中: $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ 为转动惯量矩阵, $\Delta J$ 为转动惯量不确定矩阵, $T_c$ 和 $T_d$ 分别是控制和扰动力矩,

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \text{为}\omega\text{对应的叉乘矩阵.}$$

借鉴文献[3]的方法并考虑 $T_d$ 的不确定性,结合式(1)和(2),可得出该航天器姿态系统的状态空间方程为

$$\dot{x} = (A(x) + \Delta A(x_2))x + B_1 w + (B_2 + \Delta B_2)u. \quad (3)$$

其中: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \sigma \\ \omega \end{bmatrix}$ , $w = (I - \Delta J J^{-1})T_d$ 和 $u = T_c$ 分别为系统状态、外部干扰和控制输入;而

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & \rho(x_1) \\ 0 & -J^{-1}S(x_2)J \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta A(x_2) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -J^{-1}S(x_2)\Delta J + J^{-1}\Delta J J^{-1}S(x_2)J \end{bmatrix},$$

$$\Delta B_2 = [0 \ (-J^{-1}\Delta J J^{-1})^T]^T.$$

$\Delta J$ 可采用其占标称值的百分比来表示,即

$$\Delta J = \text{diag}(\bar{h}_1(t)J_1, \bar{h}_2(t)J_2, \bar{h}_3(t)J_3),$$

$$h(t) = [\bar{h}_1(t) \ \bar{h}_2(t) \ \bar{h}_3(t)]^T,$$

则系统(3)中的不确定项可相应改写为

$$\Delta A(x_2) = \sum_{i=1}^3 \bar{h}_i(t)A_i(x_2), \Delta B_2 = \sum_{i=1}^3 \bar{h}_i(t)B_{2i}. \tag{4}$$

其中

$$A_i(x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -J^{-1}(S(x_2)\bar{J}_i - \bar{J}_i J^{-1}S(x_2)J) \end{bmatrix},$$

$$B_{2i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J^{-1}\bar{J}_i J^{-1} \end{bmatrix}, \bar{J}_1 = \text{diag}(J_1, 0, 0),$$

$$\bar{J}_2 = \text{diag}(0, J_2, 0), \bar{J}_3 = \text{diag}(0, 0, J_3).$$

另外,为限定  $\Delta J$  的变化范围,对于给定的常数向量  $h_1, h_2, \dots, h_m \in R^3$ , 定义

$$\alpha = \text{co}\{h_1, h_2, \dots, h_m\} = \left\{ h : h = \sum_{i=1}^m g_i h_i, \sum_{i=1}^m g_i = 1, g_i \geq 0 \right\},$$

并假设  $h(t)$  满足如下约束:

$$h(t) \in \alpha, \forall t \geq 0. \tag{5}$$

式(5)将  $h(t)$  限制为由  $h_1, h_2, \dots, h_m$  这些顶点构成的凸多面体,即上述处理和假设将  $\Delta J$  表示为凸多面体的不确定性. 为方便陈述,后续的  $h(t)$  都简写为  $h$ .

### 3 非线性鲁棒 $H_\infty$ 状态反馈控制

本文控制目标是实现航天器大角度姿态快速机动的同时有效抑制外部扰动,并确保姿态系统的高稳定性和强鲁棒性,因此,可定义系统(3)的被控输出为

$$z = x. \tag{6}$$

针对该航天器姿态系统,设计状态反馈控制器

$$u = K(x)x. \tag{7}$$

结合式(3)、(4)、(6)和(7),可得相应闭环系统为

$$\dot{x} = \left( \bar{A}(x) + \sum_{i=1}^3 \bar{h}_i \bar{A}_i(x) \right) x + B_1 w, \tag{8}$$

$$z = x.$$

其中:  $\bar{A}(x) = A(x) + B_2 K(x), \bar{A}_i(x) := A_i(x_2) + B_{2i} K(x)$ .

根据 Lyapunov 稳定性理论,可得出系统(8)的一个  $H_\infty$  性能准则.

**定义5** 给定常数  $\gamma > 0$ ,如果存在一个对  $x$  具有连续一阶偏导数的标量函数  $V(x), V(0) = 0$ ,使得对

于  $\forall h \in \alpha$  满足

$$V(x) > 0, \tag{9}$$

$$v_j(x) + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0, j = 1, 2, \dots, m, \tag{10}$$

则闭环系统(8)的零平衡点渐近稳定,且有  $L_2$ -增益  $\leq \gamma$ . 其中  $v_j(x) = \dot{V}(x)|_{h=h_j}$ .

**证明** 给定  $\gamma > 0$ ,假设式(9)和(10)成立. 对于闭环系统(8),有

$$v_j(x) = \dot{V}(x)|_{h=h_j} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x}|_{h=h_j} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left( \bar{A}(x)x + B_1 w + \sum_{i=1}^3 h_{ji} \bar{A}_i(x)x \right), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} (\bar{A}(x)x + B_1 w) + \\ &\frac{\partial V(x)}{\partial x} \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^m g_j h_{ji} \right) \bar{A}_i(x)x = \\ &\frac{\partial V(x)}{\partial x} (\bar{A}(x)x + B_1 w) + \\ &\sum_{j=1}^m g_j \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^3 h_{ji} \bar{A}_i(x)x \right) \right), \end{aligned} \tag{12}$$

其中  $h_{ji}$  表示  $h_j$  的第  $i$  行元素. 由于  $\sum_{j=1}^m g_j = 1$  且  $g_j \geq 0$ , 结合式(10)~(12), 易知

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) + z^T z - \gamma^2 w^T w &= \\ \sum_{j=1}^m g_j (v_j(x) + z^T z - \gamma^2 w^T w) &< 0. \end{aligned} \tag{13}$$

这意味着当  $w = 0$  时,对于  $x \neq 0$  和  $\forall h \in \alpha$ , 有  $\dot{V}(x) < 0$ , 因此闭环系统(8)的零平衡点是渐近稳定的. 再对式(13)从  $t = 0$  到  $t = T$  进行积分,在  $V(0) = 0$  条件下有  $V(x(T)) - V(x(0)) \geq 0$ , 从而可得

$$\int_0^T (\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2) dt \leq 0.$$

根据定义1,又知该系统有  $L_2$ -增益  $\leq \gamma$ .  $\square$

基于定理1,进一步采用 SOS 理论,可得出该非线性鲁棒  $H_\infty$  状态反馈控制器的可解性条件.

**定义6** 给定常数  $\varepsilon_i > 0 (i = 0, 1, \dots, m)$  和  $\gamma > 0$ ,如果存在多项式矩阵  $Y(x)$  及对称多项式矩阵  $P(x_1)$  使得下列表达式:

$$\tau_0^T (P(x_1) - \varepsilon_0 I) \tau_0, \tag{14}$$

$$- \tau_j^T \begin{bmatrix} \Xi(x) + \varepsilon_j I & P(x_1) \\ P(x_1) & -I \end{bmatrix} \tau_j, j = 1, 2, \dots, m \tag{15}$$

都是 SOS,则存在一个非线性状态反馈控制器(7)能保证闭环系统(8)的零平衡点渐近稳定且有  $L_2$ -增益  $\leq \gamma$ ,相应控制器增益矩阵  $K(x) = Y(x)P^{-1}(x_1)$ . 其

中:  $\tau_0 \in R^6, \tau_j \in R^{12} (j = 1, 2, \dots, m)$ ,

$$\begin{aligned} \Xi(x) &= \text{He}(\hat{A}_j(x)P(x_1) + \hat{B}_{2j}Y(x)) - \\ &\quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial P(x_1)}{\partial \sigma_i} (\rho_i(x_1)x_2) + \gamma^{-2}B_1B_1^T, \\ \hat{A}_j(x) &:= A(x) + \sum_{i=1}^3 h_{ji}A_i(x_2), \\ \hat{B}_{2j} &:= B_2 + \sum_{i=1}^3 h_{ji}B_{2i}, \end{aligned}$$

$\rho_i(x_1)$  表示  $\rho(\sigma)$  的第  $i$  行.

**证明** 定义 Lyapunov 函数  $V(x) = x^T P^{-1}(x_1)x$ , 根据定义 2, 式(14)是 SOS 意味着  $P^{-1}(x_1) > 0$ , 故有式(9)成立.

基于引理 2, 对于闭环系统(8), 又有

$$\begin{aligned} v_j(x) + z^T z - \gamma^2 w^T w &= \\ (\text{He}(\dot{x}^T P^{-1}(x_1)x) + x^T \dot{P}^{-1}(x_1)x)_{h=h_j} + \\ x^T x - \gamma^2 w^T w &= \\ x^T \left( \text{He} \left( P^{-1}(x_1) \left( \bar{A}(x) + \sum_{i=1}^3 h_{ji} \bar{A}_i(x) \right) \right) \right) + I + \\ \dot{P}^{-1}(x_1) &x - \gamma^2 w^T w + \text{He}(x^T P^{-1}(x_1)B_1 w) \leq \\ x^T \left( \text{He} \left( P^{-1}(x_1) \left( \bar{A}(x) + \sum_{i=1}^3 h_{ji} \bar{A}_i(x) \right) \right) \right) + \\ \gamma^{-2} P^{-1}(x_1) B_1 B_1^T P^{-1}(x_1) + \dot{P}^{-1}(x_1) + I &x = \\ x^T \left( \text{He} \left( P^{-1}(x_1) \left( \hat{A}_j(x) + \hat{B}_{2j} K(x) \right) \right) \right) + \\ \gamma^{-2} P^{-1}(x_1) B_1 B_1^T P^{-1}(x_1) + I + \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial P^{-1}(x_1)}{\partial \sigma_i} (\rho_i(x_1)x_2) &x. \end{aligned} \tag{16}$$

由于式(15)是 SOS, 根据 Schur 补引理, 可得

$$\Xi(x) + P(x_1)P(x_1) < 0. \tag{17}$$

再对式(17)左边矩阵分别左乘和右乘  $P^{-1}(x_1)$ , 基于引理 1 和式(16), 易知式(10)成立. 最后, 根据定理 1, 闭环系统(8)的零平衡点是渐近稳定的, 且有  $L_2$ -增益  $\leq \gamma$ .  $\square$

**注1** 在上述证明过程中, 选用了一种特定的多项式或有理式型 Lyapunov 函数, 这是借鉴文献[23]的思想, 利用了  $B_2$  的结构特征, 避免求  $\dot{V}(x)$  时出现  $\frac{\partial P(x)}{\partial x_2}$  与控制输入  $u$  构成的非凸项, 从而便于得出 SOS 可行性条件.

**注2**  $P(x_1)$  所有元素的最高阶数应为偶数(0, 2, 4,  $\dots$ ), 这是确保式(14)是 SOS 的前提条件.

**注3** 一个多项式是 SOS 只能保证其非负性, 因

此在式(14)和(15)里引入了常数  $\varepsilon_i > 0 (i = 0, 1, \dots, m)$  以导出式(9)和(10)成立.

在定理 2 的基础上令  $\beta = \gamma^{-2}$ , 则其相应的最优  $H_\infty$  控制问题可转化为如下 SOS 凸优化问题:

$$\begin{aligned} \min & \quad -\beta; \\ \text{s.t.} & \quad \text{式(14), (15)和} \beta - \tau \text{ 都是 SOS.} \end{aligned}$$

其中  $\tau > 0$  是给定的常数.

**注4**  $\tau$  的引入与  $\varepsilon_i > 0 (i = 0, 1, \dots, m)$  的作用一样, 确保了  $\beta > 0$ , 即  $\gamma > 0$ . 另外, 若求得  $-\beta$  的最小值为  $-\beta_m$ , 则对应  $\gamma$  的最小值  $\gamma_{\text{opt}} = \sqrt{\beta_m^{-1}}$ .

定理 2 涉及的 SOS 可行性和优化问题的求解均可通过 Matlab 工具箱 SOSTOOLS<sup>[21]</sup> 来实现.

### 4 数值仿真

以文献[8]中的航天器姿态系统参数为仿真实例, 即  $J = \text{diag}(6.1, 5.07, 8.4) \times 10^3$ .

考虑该航天器要实现从  $\Phi = 30^\circ$  到  $\Phi = 80^\circ$  的大角度姿态机动且  $\ell = [0.2673 \quad -0.8018 \quad 0.5345]^T$ , 即需从初始姿态  $\sigma_0 = [0.07162 \quad -0.2148 \quad 0.1432]^T$ ,  $\omega_0 = [0.035 \quad -0.125 \quad 0.075]^T$  机动到期望姿态  $\sigma_d = [0.2243 \quad -0.6728 \quad 0.4485]^T, \omega_d = 0$ .

由该姿态机动目标, 可得出航天器姿态系统(3)对应的偏差方程(其平衡点为 0)如下:

$$\dot{e} = (A_e(e) + \Delta A(e_2))e + B_1 w + (B_2 + \Delta B_2)u. \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} e &= [e_1^T \quad e_2^T]^T := [(x_1 - \sigma_d)^T \quad x_2^T]^T, \\ A_e(e) &= \begin{bmatrix} 0 & \rho(e_1 + \sigma_d) \\ 0 & -J^{-1}S(e_2)J \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

给定  $h_1 = [0.5 \ 0 \ 0]^T, h_2 = [-0.5 \ 0 \ 0]^T, h_3 = [0 \ 0.5 \ 0]^T, h_4 = [0 \ -0.5 \ 0]^T, h_5 = [0 \ 0 \ 0.5]^T$  和  $h_6 = [0 \ 0 \ -0.5]^T$ , 则  $h$  被限制为由这 6 个顶点构成的凸八面体, 如图 1 所示.

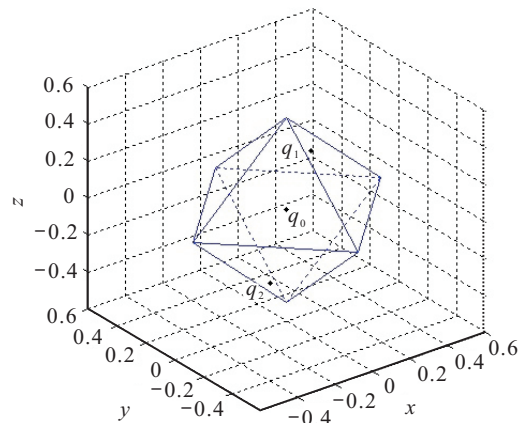


图 1 不确定向量  $h$  的变化范围

设定  $P(x_1)$  为常数矩阵,  $Y(x)$  的阶数为2阶, 再令  $\gamma = 0.9$  和  $\varepsilon_i = 10^{-3} (i = 0, 1, 2, \dots, 6)$ , 根据定理2, 可以得出系统(18)的一个非线性鲁棒  $H_\infty$  控制器. 限于篇幅, 这里定义  $e^{[2]}$  并只给出其增益矩阵  $K(e) = (k_{ij}(e))_{3 \times 6}$  的第1列, 具体如下:

$$e^{[2]} = [1, (\sigma_1 - 0.2243), (\sigma_2 + 0.6728), (\sigma_3 - 0.4485), \omega_1, \omega_2, \omega_3, (\sigma_1 - 0.2243)^2, (\sigma_1 - 0.2243) \times (\sigma_2 + 0.6728), (\sigma_1 - 0.2243)(\sigma_3 - 0.4485), (\sigma_1 - 0.2243)\omega_1, (\sigma_1 - 0.2243)\omega_2, \omega_3 \times (\sigma_1 - 0.2243), (\sigma_2 + 0.6728)^2, (\sigma_2 + 0.6728) \times (\sigma_3 - 0.4485), (\sigma_2 + 0.6728)\omega_1, \omega_2 \times (\sigma_2 + 0.6728), (\sigma_2 + 0.6728)\omega_3, (\sigma_3 - 0.4485)^2, (\sigma_3 - 0.4485)\omega_1, (\sigma_3 - 0.4485)\omega_2, \omega_3 \times (\sigma_3 - 0.4485), \omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_1\omega_3, \omega_2^2, \omega_2\omega_3, \omega_3^2]^T;$$

$$k_{11}(e) = [-4.7 \times 10^3, -27.4, 15.19, -9.49, 1.41, 3.02, -41.11, -4.3 \times 10^3, -34.30, -36.93, 16.9, 149.4, 111.57, -4.2 \times 10^3, 1.73, 2.56, 100.12, -3.43, -4.21 \times 10^3, -0.809, 1.16, 54.56, -4.32 \times 10^3, -1.91, -7.15, -4.8 \times 10^3, 15.6, -4.29 \times 10^3]e^{[2]};$$

$$k_{21}(e) = [183.7, 35.17, -16.38, 285.3, -50.96, 2.269, -1.22 \times 10^3, 61.25, -104, -17.94, -163.2, -49.55, 43.4, 35.82, 2.69, -51.613, -9.577, -12.58, 32.9, -0.1957, 3.35, -0.142, 35.56, 360.24, -5.52, 32.27, 12.52, 39.57]e^{[2]};$$

$$k_{31}(e) = [184.2, -2.23, -273.54, -2.24, 30.56, 973.36, -18.02, 14.18, 11.18, -69.1, -97.4, -34.8, -24.84, -28.97, 1.85, 1.33, 1.07, 2.086, -25.72, -29.106, -5.771, -5.096, -25.22, -3.92, 123.77, -25.82, -5.098, -30.44]e^{[2]}.$$

为了验证该控制器的鲁棒性和干扰抑制能力, 针对下列3种情形进行仿真(相应闭环系统响应曲线如图2和3所示, 控制输入和外部干扰如图4和5所示):

1) 标称系统(NS)

$$h = q_0 = 0, w = 0;$$

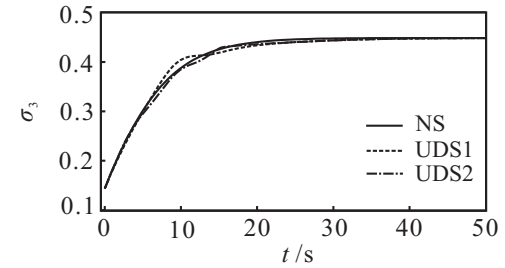
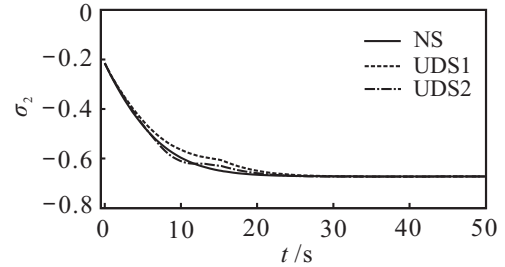
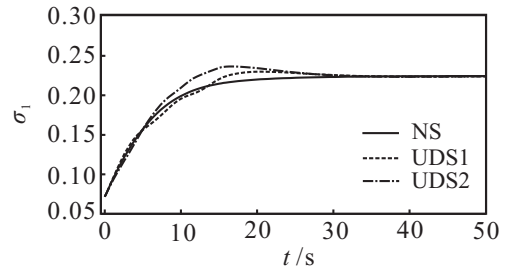


图2  $\sigma$  的时间响应

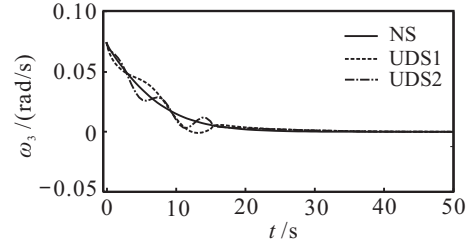
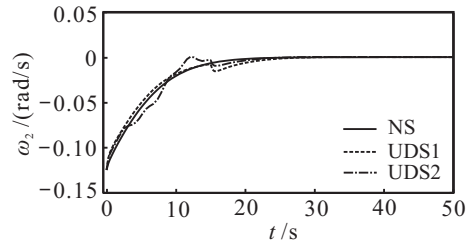
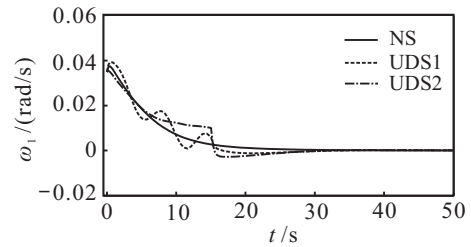


图3  $\omega$  的时间响应

2) 不确定且受扰系统1(UDS1)

$$h = q_1 = [0.05 \quad -0.1 \quad 0.35]^T,$$

$$w =$$

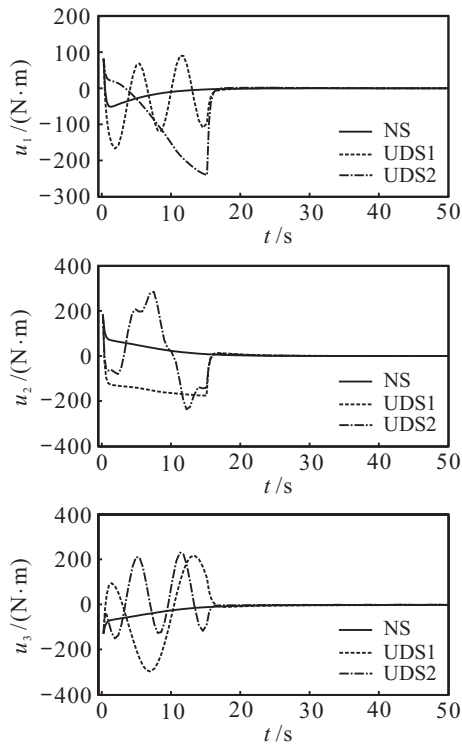
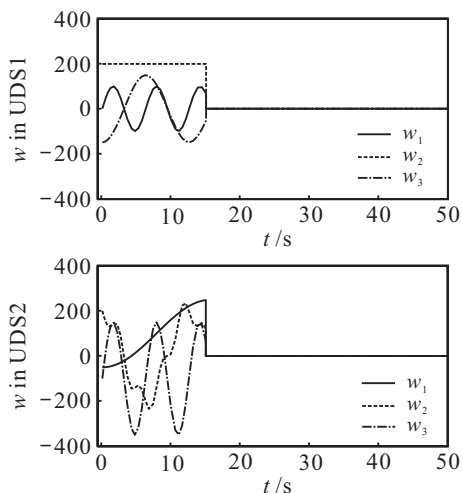
$$\begin{cases} [100 \sin t \quad 200 \quad -150 \cos(0.5t)]^T, & 0 < t \leq 15, \\ 0, & t > 15; \end{cases}$$

## 3) 不确定且受扰系统2(UDS2)

$$h = q_2 = [-0.05 \ 0.05 \ -0.4]^T,$$

$$w =$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -150 \cos(0.2t) + 100 \\ -50 \sin(2t) + 200 \cos(0.5t) \\ 250 \sin t - 100 \end{bmatrix}, & 0 < t \leq 15, \\ 0, & t > 15. \end{cases}$$

图4 控制输入  $u$ 图5 外部干扰  $w$ 

从这些仿真曲线可以看出,随着时间的增长,不确定性及干扰对该航天器姿态系统的影响逐渐消失.在40s后,3种不同情形的仿真曲线重合,航天器达到了预期的姿态目标.仿真结果表明,所设计的控

制器不仅具有较强的鲁棒性,而且在完成大角度姿态快速机动的同时有效抑制了外部扰动.

## 5 结 论

本文针对航天器受到外部干扰影响且存在动力学参数摄动的情况,给出了一种基于SOS的非线性鲁棒  $H_\infty$  控制设计方法.该方法可借助有效的凸优化算法进行检验,在一定程度上解决了非线性系统的计算困难,且相应控制器仅是系统状态的多项式函数,便于工程实现.仿真结果表明,本文方法所得控制器在有效抑制外部干扰并适应预设范围参数不确定性的同时,很好地实现了航天器大角度姿态快速机动和高稳定度的控制目标.当然,考虑到SOS理论在处理多项式系统控制问题上的优越性,可在本文工作基础上进一步将该理论推广应用于挠性航天器姿态的非线性鲁棒控制,这将作为下一步的研究内容.

## 参考文献(References)

- [1] Takashi O, Yoshiro H, Tomoyuki N, et al. Robust attitude control using  $\mu$ -synthesis for the large flexible satellite ETS-VIII[J]. J of Space Technology and Science, 2009, 25(1): 27-40.
- [2] 宋斌, 马广富, 李传江, 等. 基于  $H_\infty$  鲁棒控制的挠性卫星姿态控制[J]. 系统仿真学报, 2005, 17(4): 968-970. (Song B, Ma G F, Li C J, et al. Attitude control of flexible satellite Using  $H_\infty$ -based robust control law[J]. J of System Simulation, 2005, 17(4): 968-970.)
- [3] 全西岳. 挠性多体航天器动力学建模与姿态控制技术[D]. 长沙: 国防科学技术大学航天与材料工程学院, 2007. (Tong X Y. Flexible multibody spacecraft dynamic modeling and attitude control[D]. Changsha: College of Aerospace & Material Engineering, National University of Defense Technology, 2007.)
- [4] 张龙, 段广仁. 挠性航天器的鲁棒多目标姿态控制器设计[J]. 宇航学报, 2011, 32(11): 2326-2332. (Zhang L, Duan G R. Flexible spacecraft robust multi-objective attitude controller design[J]. J of Astronautic, 2011, 32(11): 2326-2332.)
- [5] Dong C Y, Xu L J, Chen Y, et al. Networked flexible spacecraft attitude maneuver based on adaptive fuzzy sliding mode control[J]. Acta Astronautica, 2009, 65(11/12): 1561-1570.
- [6] 赖爱芳, 郭毓, 郑立君. 航天器姿态机动及稳定的自抗扰控制[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(3): 401-407. (Lai A F, Guo Y, Zheng L J. Active disturbance rejection control for spacecraft attitude maneuver and stability[J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(3): 401-407.)
- [7] 胡庆雷, 刘亚秋, 马广富. 挠性航天器姿态机动的变结构主动振动抑制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 329-336. (Hu Q L, Liu Y Q, Ma G F. Active vibration suppression

- in flexible spacecraft with mismatched uncertainty via variable structure control[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 329-336.)
- [8] Guan P, Liu X J, Liu J Z. Adaptive fuzzy sliding mode control for flexible satellite[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2005, 18(4): 451-459.
- [9] Tiwari P M, Janardhanan S, Nabi M. Rigid spacecraft attitude control using adaptive integral second order sliding mode[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2015, 42: 50-57.
- [10] 陈琦, 蔡宗平, 马清亮, 等. 一种基于平方和优化的飞行器大角度机动镇定控制器设计方法[J]. *弹箭与制导学报*, 2011, 31(6): 47-50.  
(Chen Q, Cai Z P, Ma Q L, et al. A new approach for stabilizing controller design of spacecraft large angle attitude maneuver based on sum-of-squares optimization[J]. *J of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2011, 31(6): 47-50.)
- [11] Prajna S, Parrilo P A, Rantzer A. Nonlinear control synthesis by convex optimization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(2): 310-314.
- [12] Zheng Q, Wu F. Generalized nonlinear  $H_\infty$  synthesis condition with its numerically efficient solution[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(18): 2079-2100.
- [13] Narendra G. Switched control of satellites for global stabilization and local performance: A sum of squares approach[C]. *Proc of the 2008 American Control Conf.* Washington: IEEE Press, 2008: 2987-2992.
- [14] 马清亮, 杨海燕, 岳瑞华, 等. 空间飞行器大角度姿态机动优化控制[J]. *空间控制技术与应用*, 2013, 39(3): 8-13.  
(Ma Q L, Yang H Y, Yue R H, et al. Optimization control of spacecraft large angle attitude maneuvers[J]. *Aerospace Control and Application*, 2013, 39(3): 8-13.)
- [15] 何朕, 王广雄, 孟范伟. 非线性 $H_\infty$ 控制的设计[J]. *电机与控制学报*, 2015, 19(1): 82-89.  
(He Z, Wang G X, Meng F W. SOS design for nonlinear  $H_\infty$  control[J]. *Electric Machines and Control*, 2015, 19(1): 82-89.)
- [16] Capua A, Shapiro A, Choukroun D. Robust nonlinear  $H_\infty$  output-feedback for spacecraft[C]. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf.* Maryland: IEEE Press, 2014: 0455.
- [17] Wang J, Zeng M, Hu Q L, et al. Early-warning satellite attitude maneuvers with hybrid control[C]. *Proc of the 29th Chinese Control Conf.* Beijing: IEEE Press, 2010: 508-513.
- [18] Ma Q L, Zheng J F, Cai Z P, et al. Mixed  $H_2/H_\infty$  control of spacecraft large angle attitude maneuvers[J]. *J of Harbin Institute of Technology*, 2012, 44(11): 105-111.
- [19] 周燕茹, 黄文超, 曾建平. 挠性卫星姿态非线性局部镇定控制[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(3): 279-284.  
(Zhou Y R, Huang W C, Zeng J P. Nonlinear local stabilization control of flexible satellite attitude system[J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 279-284.)
- [20] Lu W M, Doyle J C.  $H_\infty$  control of nonlinear systems via output feedback: controller parameterization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2517-2521.
- [21] Prajna S, Papachristodoulou A, Seiler P, et al. Sostools: Sum of squares optimization toolbox for matlab: User's guide version 2.0[EB/OL]. (2012-3-31). <http://www.cds.caltech.edu/sostool/>.
- [22] Chesi G, Garulli A, Tesi A, et al. Homogeneous polynomial forms for robustness analysis of uncertain systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 39-41.
- [23] Prajna S, Papachristodoulou A, Wu F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach[C]. *Proc of the 5th Asian Control Conf.* Melbourne: IEEE Press, 2004: 157-165.
- [24] Xie L H. Output feedback  $H_\infty$  control of systems with parameter uncertainty[J]. *Int J of Control*, 1996, 63(4): 741-750.
- [25] Shuster M D. A survey of attitude representations[J]. *J of the Astronautical Sciences*, 1993, 41(4): 439-517.
- [26] Sidi M J. *Spacecraft dynamics and control*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997: 106-110.

(责任编辑: 李君玲)