

# 不完备质量和融资能力约束下的多产品风险厌恶库存模型

陈杰<sup>1,2†</sup>, 陈志祥<sup>1</sup>, 高腾<sup>1</sup>, 邢灵博<sup>2</sup>

(1. 中山大学管理学院, 广州 510275; 2. 海南热带海洋学院 数学系, 海南 三亚 572022)

**摘要:** 根据产品的缺陷率程度, 将质量水平划分为不同的状态, 并利用马尔可夫链刻画其随机运动的统计规律性, 进而在融资能力的约束条件下, 结合 CVaR(Conditional value-at-risk) 准则构建多产品联合采购系统的库存优化与控制模型. 在给定模型成本参数情况下, 数值分析表明了质量水平的随机波动性、风险厌恶因子和融资能力等核心因素对模型的最优解具有重要的影响, 三者的取值确定了多产品库存模型的最优解的运动趋势.

**关键词:** 融资能力; 库存优化; 质量波动; 马尔可夫链; 风险厌恶

**中图分类号:** A211.62; F253.4      **文献标志码:** A

## Multi-product risk-averse inventory system with imperfect quality and financing capacity constraint

CHEN Jie<sup>1,2†</sup>, CHEN Zhi-xiang<sup>1</sup>, GAO Teng<sup>1</sup>, XING Ling-bo<sup>2</sup>

(1. School of Business, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China; 2. Department of Mathematics, Hainan Tropical Ocean University, Sanya 572022, China)

**Abstract:** The statistical law of random quality fluctuation is characterized by the Markov chain in which the quality level is divided into different states according to the degree of defective rate of the product, and the optimization and control model for the multi-product inventory system with the financing capacity and CVaR criteria is proposed. Numerical examples show that the random quality fluctuation, risk-averse factor and financing capacity have a key impact on the optimal solution for the model. The values of the three factors are given, which determine the movement trend of the optimal solution of inventory system under the situation with the cost parameters in the model.

**Keywords:** financing capacity; inventory optimization; imperfect quality; Markov chain; risk-averse.

## 0 引言

当前, 我国许多制造企业面临着原料价格上升、人民币升值以及用工成本增加的压力, 这些因素直接导致企业使用资金的成本增加. 在原料采购中资金的约束将影响采购人员的决策, 因此, 采购中考虑供应链融资能力约束成为一个值得关注的问题.

供应链融资在库存优化与控制的决策过程中, 主要以资金约束的形式纳入模型的理论框架. Jain 等<sup>[1]</sup>在资金约束的条件下, 综合考虑通货膨胀、随机交货期、截止日期等因素, 构建了由“供应商-零售商-终端客户”构成的多级库存优化模型. Aryanezhad 等<sup>[2]</sup>考虑在库存容量和资金约束下构建了多产品 EOQ 模型, 并利用基因遗传算法给出模型的最优解. Ma 等<sup>[3]</sup>在融资能力的约束条件下, 考虑了带有损失规避的

库存优化模型. Yan 等<sup>[4]</sup>在需求信息不断更新条件下, 建立了基于资金约束的报童模型, 并分别在风险中立和风险厌恶的情形下给出了库存的最优订购策略. 除了融资能力的约束对采购库存决策产生影响外, 采购物品的质量也直接影响库存系统的最优订购策略. 目前, 国内外学者已针对这方面的库存优化问题进行了不少的研究. Lee 等<sup>[5]</sup>率先展开了对带有质量缺陷的库存系统优化问题的研究, 并给出模型的最优订购策略. Hsu 等<sup>[6]</sup>考虑在质检过程中不完备的情形下, 建立了允许缺货延期供给的经济订购批量模型. 为了克服质检过程存在失误的情况, 降低产品的缺陷率, Tai<sup>[7]</sup>考虑在多重质检过程下构建带有缺陷率的 EOQ 模型. 由于在实际问题中存在缺陷的商品具有可维修性或降价处理, Sher 等<sup>[8]</sup>综合考虑这

收稿日期: 2016-05-06; 修回日期: 2016-07-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71372154, 71301171, 71571196); 教育部人文社会科学研究青年基金项目 (15YJC630013).

作者简介: 陈杰 (1979—), 男, 副教授, 从事应用随机过程、供应链管理等研究; 陈志祥 (1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事现代生产与运作管理、管理系统仿真与优化等研究.

†通讯作者. E-mail: sysuchenjie@126.com

两种因素拓展了EOQ模型的理论 and 实际应用的适应性. 针对不同的供应商所供应的商品的缺陷率具有相异性, Tsai<sup>[9]</sup>以混合非线性规划为方法导向, 解决了多源采购的供应商选择性问题. 张群等<sup>[10]</sup>考虑将缺货量、缺陷率等变量作为模糊数, 建立了缺陷率和缺货的模糊库存模型. 李群霞等<sup>[11]</sup>考虑的缺陷率服从均匀分布, 并以销售利润为目标函数, 建立了带有瑕疵产品完全可退货的库存优化模型. 带有风险厌恶因子的订购策略是库存风险控制的重要研究领域之一, Choi等<sup>[12]</sup>建立了带有指数效函数和一致风险测度的多产品报童模型; Sun等<sup>[13]</sup>利用金融避险的理论工具解决了多产品风险厌恶库存系统的优化问题. Chen等<sup>[14]</sup>在随机需求的条件下, 利用模糊数学理论刻画决策者的风险偏好性, 构建了多周期的联合定价和库存模型, 并提出了最优 $(s, S, p)$ 订购策略. Dai等<sup>[15]</sup>在风险厌恶不对称的条件下考虑了库存优化决策中的合同设计问题, 其研究表明销售人员没有底薪保障是促进风险厌恶程度升高的主要因素.

综上所述, 现有关于多产品库存系统的文献中极少考虑融资能力约束, 同时各国学者针对质量缺陷问题的研究, 局限于假设质量缺陷率为固定常数或既定的概率分布, 并未考虑质量水平的波动性对库存系统的供应能力的影响. 在不完备质量和融资能力的约束条件下, 基于风险厌恶准则的多产品库存系统优化决策的研究尚未有人涉及. 为此, 本文利用马氏理论和条件风险价值(CVaR)准则分别刻画产品质量水平的波动性和决策者的风险厌恶程度, 进而在融资能力的约束条件下提出了相应的优化与控制模型, 并构建了多产品库存系统的最优Portfolio策略(最优采购组合)决策机制.

## 1 模型的构建

### 1.1 模型描述和符号说明

融资能力在物流与供应链管理中发挥着至关重要的作用, 本文在产品的供应能力受质量随机波动的影响下, 考虑构建带有融资能力约束的多产品风险厌恶库存的最优Portfolio策略. 由员工的身心状况、工作态度、运作失误或生产设备的故障等生产系统中的随机因素所演变成的随机过程, 影响着产品质量的水平, 故可视质量水平的波动性为一个随机过程, 或称之为不完备质量的随机过程. 这里假设产品的质量水平的随机过程满足马尔可夫性. 因为产品的质量水平直接影响供应系统的能力, 故可假设多产品库存系统的供应能力为质量依赖的. 本文主要在以上模型假设成立的基础上, 在融资能力和不完备质量条

件下利用条件风险测度理论(CVaR), 给出由多产品构成的库存系统的最优采购组合.

为了方便问题的阐述, 首先作以下符号的说明: 给定多产品库存系统的周期 $k = 1, 2, \dots, K$ ; 产品 $n = 1, 2, \dots, N$ ; 各产品质量的状态集 $\mathbf{S} = \{1, 2, \dots, S\}$ , 即根据产品的质量缺陷率的大小, 将其划分为 $S$ 个状态以描述产品质量水平的高低; 各产品于第 $k$ 周期的销售价格、进货价格和单位残值分别为 $\mathbf{P}_k = (P_{1k}, P_{2k}, \dots, P_{Nk})$ ,  $\mathbf{C}_k = (C_{1k}, C_{2k}, \dots, C_{Nk})$ 和 $\mathbf{V}_k = (V_{1k}, V_{2k}, \dots, V_{Nk})$ ;  $\{Z_{nk} = i, i \in \mathbf{S}\}$ 为第 $n$ 种产品的马氏质量波动过程;  $C_k$ 为多产品库存系统于第 $k$ 周期融资能力的上限. 同时, 这里假设当第 $n$ 种产品于第 $k$ 周期的质量水平处于状态 $Z_{nk} = i$ 时, 其供应能力为 $W_n(i)$ , 而 $X_n$ 表示该产品的需求变量, 并且其概率密度分别为 $\varphi_{W_n(i)}(w)$ 和 $f_{X_n}(x)$ , 而相应的分布函数分别为 $\Phi_{W_n(i)}(w)$ 和 $F_{X_n}(x)$ , 并假设 $\Phi_{W_n(i)}(0) = F_{X_n}(0) = 0$ .

### 1.2 不完备质量和融资能力约束下多产品风险厌恶决策模型

记 $Q_{nk}$ 为第 $n$ 种产品于第 $k$ 销售周期的订购量, 由于第 $n$ 种产品于第 $k$ 销售周期内的利润为

$$\Omega_n(Q_{nk}) = (P_{nk} - C_{nk})Q_{nk} - (P_{nk} - V_{nk})(Q_{nk} - X_n)^+, \quad (1)$$

当第 $n$ 种产品于第 $k$ 周期的质量水平处于状态 $Z_{nk} = j_n$ 时, 其供应能力为 $W_n(j_n)$ , 可知当第 $n$ 种产品的质量水平由初始状态 $i_n$ 转移到 $j_n$ 时, 其相应的利润为

$$\begin{aligned} \Omega_n(Q_{nk}(j_n|i_n)) = & (P_{nk} - C_{nk}) \min\{Q_{nk}(j_n|i_n), W_n(j_n)\} - \\ & (P_{nk} - V_{nk})(\min\{Q_{nk}(j_n|i_n), W_n(j_n)\} - X_n)^+, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $Q_{nk}(j_n|i_n)$ 为当第 $n$ 种产品的质量水平由状态 $i_n$ 转移到 $j_n$ 时的订购量.

记 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N)$ 为各产品质量水平的初始状态;  $\mathbf{j}|\mathbf{i} = (j_1|i_1, j_2|i_2, \dots, j_N|i_N)$ ,  $j_n|i_n$ 为第 $n$ 种产品的质量水平由初始状态 $i_n$ 转移到 $j_n$ ;  $\mathbf{Q}_k(\mathbf{j}|\mathbf{i}) = (Q_{1k}(j_1|i_1), Q_{2k}(j_2|i_2), \dots, Q_{Nk}(j_N|i_N))$ 为当各产品的质量水平由初始状态 $\mathbf{i}$ 转移到 $\mathbf{j}$ 时的联合采购组合. 于是, 由式(2)可得, 多产品库存系统在融资能力 $C_k$ 的约束条件下, 当各产品的质量水平由初始状态 $\mathbf{i}$ 转移到 $\mathbf{j}$ 时的总利润为

$$\Omega_k(\mathbf{Q}_k(\mathbf{j}|\mathbf{i})) = \sum_1^N \Omega_n(Q_{nk}(j_n|i_n)). \quad (3)$$

假设当质量水平由初始状态 $\mathbf{i}$ 转移到 $\mathbf{j}$ 时, 库存

管理者对不同产品具有不同的风险厌恶水平. 于是, 在不完备质量的环境下, 结合CVaR准则<sup>[16]</sup>下带有融资能力约束的多产品库存决策优化模型

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{Q}_k(\mathbf{j}|i_0)} \{ \text{CVaR}_{\eta_n}(\Omega_k(\mathbf{Q}_k(\mathbf{j}|i))) \}; \\ \text{s.t.} \sum_{n=1}^N Q_{nk}(j_n|i_n)C_{nk} \leq C_k. \end{cases} = \begin{cases} \max_{\mathbf{Q}_k(\mathbf{j}|i)} \{ \max_{\varphi_k(\mathbf{j}) \in \mathbf{R}^N} \{ G(\Omega_k(\mathbf{Q}_k(\mathbf{j}|i), \varphi_k(\mathbf{j}))) \} \}; \\ \text{s.t.} \sum_{n=1}^N Q_{nk}(j_n|i_n)C_{nk} \leq C_k. \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$G(\Omega_k(\mathbf{Q}_k(\mathbf{j}|i), \varphi_k(\mathbf{j}))) = \sum_{n=1}^N \left\{ \varphi_{nk}(j_n) - \frac{1}{\eta_n} \text{E}[\varphi_{nk}(j_n) - \Omega_n(Q_{nk}(j_n|i_n))]^+ \right\},$$

$$\varphi_k(\mathbf{j}) = (\varphi_{1k}(j_1), \varphi_{2k}(j_2), \dots, \varphi_{Nk}(j_N)).$$

模型中的风险厌恶因子  $\eta_n \in (0, 1]$  反映了决策者的风险偏好的程度, 即当  $\eta_n$  的取值越小时, 厌恶的程度越高. 若  $\eta_n = 1$ , 则模型(4)等价于风险中性模型. 同时, 该模型还充分体现了融资能力  $C_k$  对多产品库存系统的订购量的影响.

### 1.3 最优期望订购量和总期望报酬准则

记

$\mathbf{Q}_k^*(\mathbf{j}|i) = (Q_{1k}^*(j_1|i_1), Q_{2k}^*(j_2|i_2), \dots, Q_{Nk}^*(j_N|i_N))$  为模型(4)的最优解, 因为每种产品的状态集为  $\mathbf{S} = \{1, 2, \dots, S\}$ , 其中包含了  $S$  个元素, 所以随机变量  $Z_{nk}$  的所有可能取值共为  $S$  个. 因此,  $Q_{nk}^*(j_n|i_n)$  只是当第  $n$  种产品的质量水平由初始状态  $i_n$  转移到  $j_n$  时的最优条件订购量. 以下主要研究在不完备质量和融资能力约束下, 给出的多产品库存系统的最优期望订购量和总期望报酬准则.

**命题1** 设第  $n$  种产品的质量波动过程  $\{Z_{nk} = i, i \in \mathbf{S}\}$  满足马氏性, 其转移概率矩阵为  $\mathbf{P}_n = (p_{i_n j_n})_{S \times S}, i_n, j_n \in \mathbf{S}$ , 即第  $n$  种产品的质量水平由  $i_n$  转移到  $j_n$  的概率为  $P(Z_{nk} = j_n | Z_{nk} = i_n) = p_{i_n j_n}$ . 若  $\mathbf{Q}_k^*(\mathbf{j}|i)$  为模型(4)的 Kuhn-Tucker 条件下的极大值点, 则可得以下结论:

- 1)  $\mathbf{Q}_k^*(\mathbf{j}|i)$  为该模型的最优解.
- 2) 第  $n$  种产品在质量水平处于初始状态  $i_n$  下于第  $k$  周期的最优期望订购量为

$$\bar{Q}_{nk}^*(j_n|i_n) = \sum_{j_n \in \mathbf{S}} p_{i_n j_n} Q_{nk}^*(j_n|i_n),$$

$$n = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

其中:  $Q_{nk}^*(j_n|i_n)$  满足

$$F_{X_n}(Q_{nk}^*(j_n|i_n)) = \frac{(P_{nk} - C_{nk})[\eta_n - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n))] + \eta_n \lambda_n^* C_{nk}}{(P_{nk} - V_{nk})[1 - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n))]},$$

$\lambda_n^*$  为模型(4)的 Kuhn-Tucker 条件的拉格朗日乘子.

3) 零售商在不完备质量和融资能力约束下于第  $k$  周期所获得的最优期望销售利润为

$$\text{E}[\Omega_k(\bar{\mathbf{Q}}_k^*(j_n|i_n))] = \sum_{j_n \in \mathbf{S}} p_{i_n j_n} \text{E}[\Omega_n(Q_{nk}^*(j_n|i_n))]. \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \text{E}[\Omega_n(Q_{nk}^*(j_n|i_n))] = & (P_{nk} - C_{nk}) \left[ \int_0^{Q_{nk}^*(j_n|i_n)} w d\Phi_{W_n(j_n)}(w) + (1 - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n))Q_{nk}^*(j_n|i_n) \right] - (P_{nk} - V_{nk}) \times \\ & \left[ \int_0^{Q_{nk}^*(j_n|i_n)} \int_0^w (w - x) dF_{X_n}(x) d\Phi_{W_n(j_n)}(w) + (1 - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n)) \int_0^{Q_{nk}^*(j_n|i_n)} (Q_{nk}^*(j_n|i_n) - x) dF_{X_n}(x) \right]. \end{aligned}$$

**证明** 记

$$G_n(Q_{nk}(j_n|i_n), \varphi_{nk}(j_n)) = \varphi_{nk}(j_n) - \frac{1}{\eta_n} \text{E}[\varphi_{nk}(j_n) - \Omega_n(Q_{nk}(j_n|i_n))]^+,$$

故由式(4)易知

$$\begin{aligned} \max_{\varphi_k(\mathbf{j}) \in \mathbf{R}^N} \{ G(\Omega_k(\mathbf{Q}_k(\mathbf{j}|i), \varphi_k(\mathbf{j}))) \} = & \sum_{n=1}^N \max_{\varphi_{nk}(j_n) \in \mathbf{R}} \{ G_n(Q_{nk}(j_n|i_n), \varphi_{nk}(j_n)) \}. \end{aligned}$$

当  $Q_{nk}(j_n|i_n)$  为固定常数时, 若  $\varphi_{nk}^*(j_n)$  为模型  $\max_{\varphi_{nk}(j_n) \in \mathbf{R}} \{ G_n(Q_{nk}(j_n|i_n), \varphi_{nk}(j_n)) \}$  的最优解, 则由文献[16]附录A中的A.1和A.2可得

$$G(\Omega_k(\mathbf{Q}_k(\mathbf{j}|i), \varphi_k^*(\mathbf{j}))) = \sum_{n=1}^N G_n(Q_{nk}(j_n|i_n), \varphi_{nk}^*(j_n)) = \sum_{n=1}^N \left\{ (P_{nk} - V_{nk})Q_{nk}(j_n|i_n) - \frac{1}{\eta_n} [D_1(Q_{nk}(j_n|i_n)) + D_2(Q_{nk}(j_n|i_n)) + D_3(Q_{nk}(j_n|i_n))] \right\},$$

其中

$$\begin{aligned} D_1(Q_{nk}(j_n|i_n)) = & \int_0^{Q_{nk}(j_n|i_n)} \int_0^w (P_{nk} - C_{nk})Q_{nk}(j_n|i_n) dF_{X_n}(x) d\Phi_{W_n(j_n)}(w) - \\ & \int_0^{Q_{nk}(j_n|i_n)} \int_0^w ((V_{nk} - C_{nk})w + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (P_{nk} - V_{nk})x dF_{X_n}(x) d\Phi_{W_n(j_n)}(w), \\ D_2(Q_{nk}(j_n|i_n)) = & \\ & \int_0^{Q_{nk}(j_n|i_n)} \int_w^{+\infty} (P_{nk} - \\ & C_{nk})(Q_{nk}(j_n|i_n) - w) dF_{X_n}(x) d\Phi_{W_n(j_n)}(w), \\ D_3(Q_{nk}(j_n|i_n)) = & \\ & \int_{Q_{nk}(j_n|i_n)}^{+\infty} \int_0^{Q_{nk}(j_n|i_n)} (P_{nk} - \\ & V_{nk})(Q_{nk}(j_n|i_n) - x) dF_{X_n}(x) d\Phi_{W_n(j_n)}(w). \end{aligned}$$

因此, 决策优化模型(4)等价于

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{Q}_k(j|i)} \left\{ \sum_{n=1}^N \left\{ (P_{nk} - V_{nk})Q_{nk}(j_n|i_n) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{\eta_n} [D_1(Q_{nk}(j_n|i_n)) + D_2(Q_{nk}(j_n|i_n)) + \right. \right. \\ \left. \left. D_3(Q_{nk}(j_n|i_n))] \right\} \right\}; \\ \text{s.t. } \sum_{n=1}^N Q_{nk}(j_n|i_n) C_{nk} \leq C_k. \end{cases}$$

由约束集

$$\mathbf{X} = \left\{ \mathbf{Q}_k \in \mathbf{R}^N \mid \sum_{n=1}^N Q_{nk}(j_n|i_n) C_{nk} \leq C_k \right\}$$

易知  $\mathbf{X}$  为凸集. 对于  $\forall \mathbf{Q}_k \in \mathbf{X}$ , 记  $\mathbf{C} = (c_{nm})_{N \times N}$ , 其中  $c_{nm} = \frac{\partial^2 G(\Omega_k(\mathbf{Q}_k(j|i), \boldsymbol{\varphi}_k^*(j)))}{\partial Q_{nk}(j_n|i_n) \partial Q_{mk}(j_m|i_m)}$ ,  $n, m = 1, 2, \dots, N$ . 因此, 当  $n \neq m$  时, 有  $c_{nm} = 0$ ; 当  $n = m$  时, 有

$$\begin{aligned} c_{nn} = & \\ & -\frac{1}{\eta_n} \{ (P_{nk} - C_{nk}) \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}(j_n|i_n)) + (P_{nk} - \\ & V_{nk}) [f_{X_n}(Q_{nk}(j_n|i_n)) (1 - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}(j_n|i_n))) + \\ & f_{X_n}(Q_{nk}(j_n|i_n)) \varphi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}(j_n|i_n))] \}. \end{aligned}$$

记  $C_n$  为  $\mathbf{C}$  的  $n$  阶顺序主子式, 即

$$C_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}, n = 1, 2, \dots, N.$$

显然, 由销售价  $P_{nk}$ 、进价  $C_{nk}$  和残值  $V_{nk}$  的实际意义, 易知  $P_{nk} > C_{nk} > V_{nk}$ , 故  $c_{nn} > 0$ , 因此  $(-1)^n C_n > 0$ . 由此可知  $\mathbf{C}$  为负定的矩阵, 故  $-G(\Omega_k(\mathbf{Q}_k(j|i), \boldsymbol{\varphi}_k^*(j)))$  为凸函数, 由决策优化模型(4)所确定的(MP)问题为凸规划. 又因为在(MP)问题为凸规划条件下, 满足 Kuhn-Tucker 条件的极大值点为(MP)问题最优解的充分必要条件, 所以  $\mathbf{Q}_k^*(j|i) = (Q_{1k}^*(j_1|i_1), Q_{2k}^*(j_2|i_2), \dots, Q_{Nk}^*(j_N|i_N))$  为模型(4)的最优解.

再由上述(MP)问题的 Kuhn-Tucker 条件, 即

$$\begin{cases} \nabla G \Omega_k(\mathbf{Q}_k(j|i), \boldsymbol{\varphi}_k^*(j)) + \\ \lambda_n^* \nabla \left( \sum_{n=1}^N Q_{nk}(j_n|i_n) C_{nk} - C_k \right) = 0, \\ \lambda_n^* \left( \sum_{n=1}^N Q_{nk}(j_n|i_n) C_{nk} - C_k \right) = 0, \lambda_n^* \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

解之, 得

$$\begin{aligned} F_{X_n}(Q_{nk}^*(j_n|i_n)) = & \\ \frac{(P_{nk} - C_{nk})[\eta_n - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n))] + \eta_n \lambda_n^* C_{nk}}{(P_{nk} - V_{nk})[1 - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n))]}, & \\ n = 1, 2, \dots, N. & \end{aligned}$$

又因为该产品的质量水平由初始状态  $i_n$  转移到  $j_n$  的概率为  $P(Z_{nk} = j_n | Z_{nk} = i_n) = p_{i_n j_n}$ , 故当状态  $j_n$  取遍集合  $\mathbf{S}$  中的元素的所有赋值时, 可得该产品于下个周期的最优期望订购量, 即  $\bar{Q}_{nk}^*(j_n|i_n) = \sum_{j_n \in \mathbf{S}} p_{i_n j_n} Q_{nk}^*(j_n|i_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

将  $Q_{nk}^*(j_n|i_n)$  代入式(2), 并求其数学期望, 可得

$$\begin{aligned} E[\Omega_n(Q_{nk}^*(j_n|i_n))] = & \\ (P_{nk} - C_{nk}) \left[ \int_0^{Q_{nk}^*(j_n|i_n)} w d\Phi_{W_n(j_n)}(w) + (1 - \right. & \\ \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n))) Q_{nk}^*(j_n|i_n) \left. \right] - (P_{nk} - V_{nk}) \times & \\ \left[ \int_0^{Q_{nk}^*(j_n|i_n)} \int_0^w (w - x) dF_{X_n}(x) d\Phi_{W_n(j_n)}(w) + \right. & \\ \left. 1 - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n)) \int_0^{Q_{nk}^*(j_n|i_n)} (Q_{nk}^*(j_n|i_n) - \right. & \\ \left. x) dF_{X_n}(x) \right]. & \end{aligned}$$

因为  $Q_{nk}^*(j_n|i_n)$  为当第  $n$  种产品的质量水平由状态  $i_n$  转移到状态  $j_n$  时的最优订购量, 所以  $E[\Omega_n(Q_{nk}^*(j_n|i_n))]$  仅为当产品的质量水平处于某个状态  $j_n$  时库存系统所获得的最优条件期望利润. 又因为第  $n$  种产品的质量水平由状态  $i_n$  转移到  $j_n$  的概率为  $p_{i_n j_n}$ , 故零售商在下个周期获得最优期望销售利润等于  $E[\Omega_n(Q_{nk}^*(j_n|i_n))]$  的概率为  $p_{i_n j_n}$ . 因此, 第  $n$  种产品在不完备质量和融资能力约束下于下个周期所获得的最优期望销售利润为  $E[\Omega_k(\bar{\mathbf{Q}}_k^*(j_n|i_n))] = \sum_{j_n \in \mathbf{S}} p_{i_n j_n} E[\Omega_n(Q_{nk}^*(j_n|i_n))]$ .  $\square$

随着供应链管理决策环境的进一步复杂化, 由单一要素所构建起来的理论体系已不足以刻画实际问题, 集成多重要素于模型的理论框架, 已成为研究库存系统的优化与控制的主流思想. 命题1的结论充分体现了融资能力、风险厌恶、产品质量的不完备性、需求的随机性等基本要素对库存系统的决策机制的影响, 解决了复杂环境下库存系统的最优订购决策问

题,并在模型的基础框架上纳入了质量波动的马氏随机过程,以刻画多产品库存系统的内在的随机变化规律,进而揭示总期望销售利润的运动趋势.

**注1** 命题1中的式(5)是本文的核心公式之一,主要以运筹学中的Kuhn-Tucker条件为理论基础推导而得的.由于本文的(MP)问题的Kuhn-Tucker条件(式(7))为非线性方程组,结构比较复杂,方程中的拉氏乘子 $\lambda_n^*$ 并没有具体的解析式,不过可以借助数学软件来求解,如LINGO或MATLAB.此外,结合式(7)求得 $F_{X_n}$ 的具体解析式,再利用反函数的性质,即可给出库存系统的最优期望订货量

$$Q_{nk}^*(j_n|i_n) = F_{X_n}^{-1}[(P_{nk} - C_{nk})[\eta_n - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n))] + \eta_n \lambda_n^* C_{nk} (P_{nk} - V_{nk}) [1 - \Phi_{W_n(j_n)}(Q_{nk}^*(j_n|i_n))]].$$

1.4 库存系统的随机性分析

如何构建系统的随机性的评估体系是风险库存控制理论中的核心问题之一,以下主要利用随机过程中的首达性、PH分布等基本理论<sup>[17]</sup>来刻画多产品库存系统随机性的问题.

记 $f_{ij}^{(n)}(m)$ 为第 $n$ 种产品质量水平从状态 $i$ 出发历经 $m$ 个周期后首次到达 $j$ 的概率, $E_{\text{首达}}[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(j|i))]$ 为其相应的最优期望利润,该产品质量水平的 $m$ 步转移概率矩阵为 $P_n(m) = (p_{ij}^{(n)}(m))_{S \times S}$ , $i, j \in S$ .由切普曼-柯尔莫哥洛夫方程<sup>[17]</sup>可知

$$E_{\text{首达}}[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(j|i))] = \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} \cdots \sum_{i_{m-1} \neq j} p_{i_1 i_1}^{(n)} p_{i_1 i_2}^{(n)} \cdots \times p_{i_{m-1} j}^{(n)} E[\Omega_n(Q_{n(k+1)}^*(j|i_{m-1}))].$$

再由 $f_{ij}^{(n)}(m)$ 的定义可知,该产品的质量水平从状态 $i$ 出发首达状态 $j$ 的平均时间为 $\sum_{m=1}^{+\infty} m f_{ij}^{(n)}(m)$ .于是,可得该产品的质量水平从状态 $i$ 出发首次到达状态 $j$ 时平均每个周期所获取的最优期望利润

$$\bar{\Omega}_{\text{首达}}(Z_{n(k+m)} = j | Z_{nk} = i) = \frac{\sum_{m=1}^{+\infty} E_{\text{首达}}[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(j|i))]}{\sum_{m=1}^{+\infty} m f_{ij}^{(n)}(m)}. \tag{8}$$

其中

$$E_{\text{首达}}[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(j|i))] = \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} \cdots \sum_{i_{m-1} \neq j} p_{i_1 i_1}^{(n)} p_{i_1 i_2}^{(n)} \cdots \times p_{i_{m-1} j}^{(n)} E[\Omega_n(Q_{n(k+1)}^*(j|i_{m-1}))].$$

由式(8)可得出一个重要的管理启示,即决策者

通过 $\bar{\Omega}_{\text{首达}}(Z_{n(k+m)} = j | Z_{nk} = i)$ 的数值结果可以获得库存系统平均每周期所获取的销售利润目标的信息.记 $\mu_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{+\infty} m f_{ij}^{(n)}(m)$ ,显然 $\bar{\Omega}_{\text{首达}}(Z_{n(k+m)} = j | Z_{nk} = i)$ 关于 $\mu_{ij}^{(n)}$ 为单调递减的函数.由此可知,当库存首次到达该质量状态的平均时间(称为首达时间)越长时,库存系统首次获得预期的利润额度越低.同时,该命题具有重要的理论意义,即将 $m$ 步的最优期望利润的求解过程分解为一步形式来计算,实现了多周期与单周期的模型的相互转换计算过程.

设 $\{Z_{nk}, k \geq 0\}$ 为第 $n$ 种产品的随机质量波动过程,其一步转移概率矩阵为 $P_n = \begin{bmatrix} P_{1n} & P_{0n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ ,其中 $P_{1n}$ 为瞬时状态集的一步转移概率, $P_{0n} = (\mathbf{I} - P_{1n})\mathbf{e}$ , $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$ , $\mathbf{I}$ 为单位矩阵;状态的初始分布概率为 $\pi(0) = (\alpha_0, \boldsymbol{\alpha})$ , $\alpha_0$ 为吸收状态的初始概率值,而向量 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L)$ 为瞬时状态的初始概率值.

**命题2** 设随机过程 $\{Z_{nk}, k \geq 0\}$ 的吸收状态为 $i_{\text{吸收}}$ ,若当库存系统的质量水平从瞬时状态集出发历经 $m$ 个周期后到达吸收状态 $i_{\text{吸收}}$ 时,其相应的最优期望利润为 $E[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(i_{\text{吸收}}))]$ ,则第 $n$ 种产品的质量水平由瞬时状态集首次到达稳定吸收状态集时所获取的平均最优期望利润为

$$\bar{\Omega}_{\text{首达}}(Z_{n(k+m)} = i_{\text{吸收}}) = \frac{\sum_{m=1}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha} P_{1n}^{m-1} (\mathbf{I} - P_{1n}) \mathbf{e} E[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(i_{\text{吸收}}))]}{\boldsymbol{\alpha} (\mathbf{I} - P_{1n})^{-1} \mathbf{e}}, \tag{9}$$

其中

$$E[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(i_{\text{吸收}}))] = \sum_{l=0}^L \alpha_l E[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(i_{\text{吸收}}|i_l))].$$

**证明** 因为 $\{Z_{nk}, k \geq 0\}$ 的一步转移概率矩阵为 $P_n = \begin{bmatrix} P_{1n} & P_{0n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ ,所以由其PH分布的定义,可知其相应的分布列为 $P(\tau = m) = \boldsymbol{\alpha} P_{1n}^{m-1} (\mathbf{I} - P_{1n})\mathbf{e}$ .当库存系统的质量水平从瞬时状态出发历经 $m$ 个周期后被吸收 $i_{\text{吸收}}$ 时,其相应的最优期望利润为 $E[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(i_{\text{吸收}}))]$ ,故第 $n$ 种产品的质量水平由瞬时状态集首次到达吸收状态集时的最优期望利润为

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha} P_{1n}^{m-1} (\mathbf{I} - P_{1n}) \mathbf{e} E[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(i_{\text{吸收}}))].$$

又因为 $\pi(0) = (\alpha_0, \boldsymbol{\alpha})$ 为质量水平的初始概率分布,所以当其初始状态处于 $i_l (l = 0, 1, \dots, L)$ 时

的概率为 $\alpha_l$ ,即系统可能从初始状态 $i_l$ 出发的概率值.因此,可得

$$E[\Omega_{n(k+m)}(Q_{n(k+m)}^*(i_{\text{吸收}}))] = \sum_{l=0}^L \alpha_l E[\Omega_{n(k+m)}(Q_{n(k+m)}^*(i_{\text{吸收}}|i_l))].$$

再由 $\{Z_{nk}, k \geq 0\}$ 的PH分布的期望: $E(\tau) = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{1n})^{-1}\mathbf{e}$ ,即库存系统由瞬时状态集到吸收状态集的首达时间的均值,其相应的平均最优期望利润为

$$\overline{\Omega}_{\text{首达}}(Z_{n(k+m)} = i_{\text{吸收}}) = \frac{\sum_{m=1}^{+\infty} \alpha P_{1n}^{m-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{1n}) \mathbf{e} E[\Omega_n(Q_{n(k+m)}^*(i_{\text{吸收}}))]}{\alpha (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{1n})^{-1} \mathbf{e}}. \quad \square$$

一般情况下,当某个状态被吸收时意味着系统由随机状态进入相对固定的运行模式.可见,利用系统从瞬时状态集到吸收状态集的首达时间的概率分布,可以深入了解其内部运行的规律性.因此,PH分布在系统的可靠性分析里具有特殊的意义.在已知的最优期望利润的条件下,命题2主要基于首达时间均值的视角,利用PH分布的特征数解决了库存系统的平均收益问题,其结论表明:当特征数 $E(\tau) = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{1n})^{-1}\mathbf{e}$ 的取值越大时,库存系统所取得相应的平均最优期望利润 $\overline{\Omega}_{\text{首达}}(Z_{n(k+m)} = i_{\text{吸收}})$ 越小.在此情形下,根据本文的决策环境(供应能力与质量水平相关),若将 $i_{\text{吸收}}$ 视为当库存系统的供应能力为最小时其所处于的状态,则意味着库存系统在没有到达吸收态之前,将长时间地保持在相对良好的状态下运行,否则反之.事实上,这是因为最优订购策略受库存系统的供应能力的影响,所以当产品处于的质量水平与之对应的供应能力最小时,其对最优订购策略的约束力最大.显然,作为决策者所希望的是供应能力对最优订购策略的约束力越低越好.因此,当 $E(\tau)$ 的取值越大时,意味着库存系统到达吸收态的平均时间越长,即

系统保持在较高的供应能力下运行的时间也越长.

## 2 数值算例分析

为简化模型的计算过程,仅考虑由产品A、B、C构成的多产品库存系统,并进行如下的模型假设:

- 1)根据产品质量的缺陷率程度,将各产品的质量水平统一划分为4个状态,即状态集 $\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- 2)库存系统的初始周期为 $t_0 = k$ .
- 3)产品A、B、C的需求变量的密度函数分别为

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 1/200, & x \in [0, 200]; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} 1/260, & x \in [0, 250]; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$f_{X_3}(x) = \begin{cases} 1/300, & x \in [0, 300]; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

- 4)由于库存系统的供应能力依赖于质量水平的高低,假设不同的质量水平下随机供应能力的密度函数如表1所示,其中伽玛函数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

结合命题1的结论以及分布函数的单调递增性,易知当其他参数取值不变时,最优订购量 $Q_{nk}^*(j_n|i_n)$ 为 $\eta_n$ 的单调递增函数.为此,本算例只针对模型最优解与质量水平的波动性、融资能力等因素之间的关系进行敏感性分析.

### 2.1 模型的最优数值解

将表2中的相关模型参数值、转移概率矩阵及初始状态值分别代入式(5)和(6),并结合模型(4)的Kuhn-Tucker条件以及上述所假定的需求和供应能力的密度函数,可得在随机质量波动下基于风险厌恶及融资能力约束的多产品库存模型的最优数值解(详见表2的后4行).

表1 不同的质量水平下供应能力的密度函数

状态	A产品	B产品	C产品
1	$\phi_{W_1(1)}(w) = \begin{cases} \frac{0.04^2 w}{\Gamma(2)e^{0.04w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$	$\phi_{W_3(1)}(w) = \begin{cases} \frac{0.06^2 w}{\Gamma(2)e^{0.06w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$	$\phi_{W_3(1)}(w) = \begin{cases} \frac{0.08^2 w}{\Gamma(2)e^{0.08w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$
2	$\phi_{W_1(2)}(w) = \begin{cases} \frac{0.03^2 w}{\Gamma(2)e^{0.03w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$	$\phi_{W_3(2)}(w) = \begin{cases} \frac{0.05^2 w}{\Gamma(2)e^{0.05w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$	$\phi_{W_3(2)}(w) = \begin{cases} \frac{0.07^2 w}{\Gamma(2)e^{0.07w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$
3	$\phi_{W_1(3)}(w) = \begin{cases} \frac{0.025^2 w}{\Gamma(2)e^{0.025w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$	$\phi_{W_3(3)}(w) = \begin{cases} \frac{0.03^2 w}{\Gamma(2)e^{0.03w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$	$\phi_{W_3(3)}(w) = \begin{cases} \frac{0.05^2 w}{\Gamma(2)e^{0.05w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$
4	$\phi_{W_1(4)}(w) = \begin{cases} \frac{0.02^2 w}{\Gamma(2)e^{0.02w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$	$\phi_{W_4(4)}(w) = \begin{cases} \frac{0.02^2 w}{\Gamma(2)e^{0.02w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$	$\phi_{W_3(4)}(w) = \begin{cases} \frac{0.03^2 w}{\Gamma(2)e^{0.03w}}, & w \geq 0; \\ 0, & w < 0. \end{cases}$

表2 一定风险厌恶及融资能力约束条件下模型的最优数值解

模型参数值	产品A				产品B				产品C			
	$C_{1k} = 160, C_k \leq 55\ 000$				$C_{2k} = 185, C_k \leq 55\ 000$				$C_{3k} = 250, C_k \leq 55\ 000$			
	$\eta_1 = 0.035, P_{1k} = 300, V_{1k} = 13$				$\eta_2 = 0.023, P_{2k} = 250, V_{2k} = 10$				$\eta_3 = 0.030, P_{3k} = 350, V_{3k} = 12$			
转移概率矩阵	0.50	0.50	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.35	0.65	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
	0.00	0.24	0.36	0.40	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
初始状态	最优期望订购量	最优期望利润	最优期望订购量	最优期望利润	最优期望订购量	最优期望利润	最优期望订购量	最优期望利润				
1	131.6	4659.6	79.0	1422.6	77.3	1972.5						
2	142.2	5050.1	69.2	1563.4	77.8	2681.8						
3	154.7	4953.8	68.4	1890.0	68.2	2163.5						
4	178.5	4813.0	11.5	681.3	97.3	3396.5						

若产品A、B、C质量水平的初始状态  $i = (i_1, i_2, i_3) = (1, 1, 1)$ , 则由表2的数据可知, 这3种产品在下一个周期的最优Portfolio策略  $Q_k^*(j|i) = (Q_{1k}^*(j_1|i_1), Q_{2k}^*(j_2|i_2), Q_{3k}^*(j_3|i_3)) = (131.6, 79.0, 77.3)$ , 各产品相应的最优期望利润为(4659.6, 1422.6, 1972.5), 将各分量相加即可得多产品库存系统的最优总期望利润. 同理, 可知各产品在不同的初始状态下, 多产品库存系统的最优Portfolio策略及最优期望利润. 显然, 当产品A、B、C质量水平的初始状态分别处于2、3和4时, 其最优期望利润为最大, 而当各处于1、4和1时, 相应的最优期望利润为最小. 由此可见, 在一定的融资能力和风险厌恶下, 产品的随机质量的波动性对模型的最优解具有重要的影响.

以下只针对产品A的首达性问题进行分析, 其他产品可以类推. 根据产品A质量水平的转移概率矩阵, 可得产品A的状态转移如图1所示.

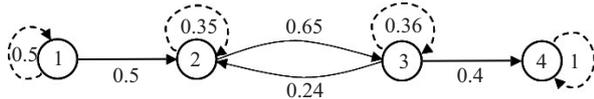


图1 产品A的状态转移示意图

假设产品A质量水平的初始状态为  $i_0 = 1$ , 并且库存系统以  $i = 2$  作为收益目标. 于是, 根据图1, 易知由状态1出发历经  $m$  个周期后首达状态2的概率为  $f_{12}^{(1)}(m) = P(T_{12} = m|i_0 = 1) = 1/2^m$ . 同时, 由图1可知, 在  $i_t \neq 2$  的条件下, 当  $i_t \neq 1$  时, 有  $(Z_{1(k+m)} = 2, Z_{1(k+t)} = i_t \neq 2, t = 1, 2, \dots, m-1) = \emptyset$ . 因此, 只需求出  $E[\Omega_1(Q_{1(k+m)}^*(Z_{1(k+m)} = 2|Z_{1(k+m-1)} = 1))]$  的值. 利用表1所给出的不同质量水平下随机供应能力的密度函数, 并结合命题1的结论, 有  $[E[\Omega_1(Q_{1(k+m)}^*(Z_{1(k+m)} = 2|Z_{1(k+m-1)} = 1))] = 4944.5$ . 再由泰勒展开式可知, 当  $0 \leq |x| < 1$  时, 有  $\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m$ , 对其两边求导, 得  $\frac{H(x)}{(1-x)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} mx^{m-1}$ . 因此, 首达时间  $T_{12}$  的数学期望  $E(T_{12})$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} m f_{ij}^{(n)}(m) = \frac{H\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = 2. \text{ 于是, 由式(8)可得}$$

$$\bar{\Omega}_{\text{首达}}(Z_{1(k+m)} = 2|Z_{1k} = 1) = 4944.5 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \approx 2472.3,$$

即产品A的质量水平按表2中的转移概率矩阵的随机波动下, 库存系统由状态1出发首次到达状态2时, 平均每个周期所获取的最优期望利润为2472.3.

注2 若无特殊说明, 以下算例分析的参数取值如表1和表2所示.

### 2.2 供应能力对最优期望订购量的敏感性分析

由于质量水平波动性的幅度影响着库存系统的供应能力的大小, 为了分析产品的供应能力对模型最优解的影响, 不失理论上的一般性, 这里假设各产品的供应能力  $W$  都服从伽玛分布  $Ga(\alpha, \xi)$ . 由于随机变量的矩是反映总体的取值规律的最主要特征数之一, 故  $E(W)$  可以作为衡量各产品的供应能力的指标数. 因为  $Ga(\alpha, \xi)$  分布的数学期望  $E(W) = \alpha/\xi$ , 所以当  $\alpha$  的取值固定时, 可以通过  $\xi$  的取值趋势来反映产品的供应能力的大小. 接下来主要在一定的风险厌恶和融资能力约束下, 利用  $\xi$  的取值变化情况来间接地揭示供应能力对最优解的敏感性. 令伽玛分布中的参数  $\alpha = 2$ , 根据命题1的结论, 可得如下供应能力与最优期望订购量之间关系, 如图2所示.

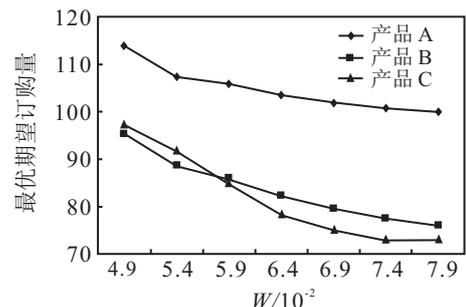


图2 供应能力对最优期望订购量的影响

显然,  $E(W) = \alpha/\xi$  为关于  $\xi$  的单调递减函数, 由此表明当  $\xi$  增大时, 各产品的供应能力相应地递减. 在一定的风险厌恶和资金约束下, 由图2中的曲线运动趋势可知, 当  $\xi$  的取值越大时, 各产品的最优期望订购量和最优期望利润以及库存系统的总利润越小, 说明库存系统的供应能力与模型的最优解具有正相关性. 因此, 在库存系统的优化与控制中, 将“供应能力依赖着质量水平的波动性”的理念纳入联合采购的决策机制, 具有一定的管理意义.

### 2.3 融资能力对最优期望订购量的影响性分析

在一定风险厌恶和质量水平下, 为了便于深入了解融资能力  $C_k$  与模型的最优解之间的关系, 不妨假设产品 A、B、C 在质量水平的波动下于下个周期的供应能力必然分别服从  $Ga(2, 0.049)$ ,  $Ga(2, 0.054)$  和  $Ga(2, 0.059)$ , 这里所谓的必然性指的是当某种产品质量水平从某个初始状态出发时, 将以 1 的转移概率到达下个状态. 同理, 根据命题 1 的结论, 可得融资能力  $C_k$  与模型的最优期望订购量之间的关系, 如图 3 所示.

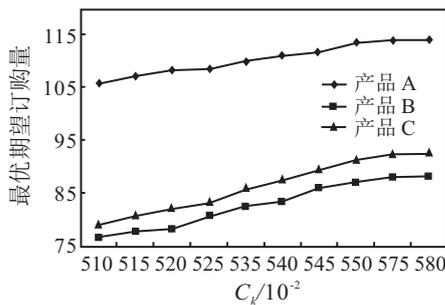


图 3 融资能力对最有期望订购量的影响

由图3中曲线的运动规律可知, 各产品的最优期望订购量随着融资能力的增强而变大, 可见其两者之间具有正相关性. 然而, 随着融资能力值  $C_k$  的进一步增大, 各产品最优期望订购量的运动曲线的上升趋势逐渐地平坦, 由此说明  $C_k$  值对最优期望订购量和期望利润的敏感性在逐渐地减小, 当  $C_k$  值达到一定的水平时, 模型的最优解趋向于稳定值. 于是, 可得出一个重要的结论, 即: 一个企业的融资能力达到运作与管理的资金需求时, 可以不考虑资金因素对库存系统的最优 Portfolio 策略的影响. 此外, 在一定的融资能力下, 相对产品 A 和 C 而言, 产品 B 的最优期望订购量相对较低. 事实上, 根据本算例对模型的风险厌恶参数的设计:  $\eta = (0.035, 0.023, 0.03)$ , 即产品 A、B、C 的风险厌恶程度分别为  $\eta_1 = 0.035$ ,  $\eta_2 = 0.023$  及  $\eta_3 = 0.03$ , 故  $\eta_1 > \eta_3 > \eta_2$ . 可见决策者对待产品 B 的风险厌恶度相对较高. 由此, 表明了不同的风险厌恶程度影响了库存系统的最优期望订购量, 即管理者的风险厌恶程度越高, 其所作出的订购决策相对越保守.

### 2.4 模型比较分析

在不考虑库存系统的供应能力受质量水平的波动影响下, 可将模型(2)转化为如下的表达式:

$$\Omega_n(Q_n) = (P_n - C_n) \min\{Q_n, W_n\} - (P_n - V_n)(\min\{Q_n, W_n\} - X_n)^+, \quad (10)$$

其中  $Q_n, P_n, C_n$  和  $W_n$  分别为第  $n$  种产品的订购量、销售价、进货价和供应能力. 在式(10)的基础上, 同样可推导出基于 CVaR 准则下带有融资能力约束的多产品库存决策优化模型, 如本文的式(4)所示, 但相关的变量不再受质量水平波动性的约束. 于是, 参照前文给出最优解的推导方法, 可得第  $n$  种产品的最优期望利润, 即

$$E[\Omega_n(Q_n^*)] = (P_n - C_n) \left[ \int_0^{Q_n^*} w d\Phi_{W_n}(w) + (1 - \Phi_{W_n}(Q_n^*))Q_n^* \right] - (P_n - V_n) \times \left[ \int_0^{Q_n^*} \int_0^w (w - x) dF_{X_n}(x) d\Phi_{W_n}(w) + (1 - \Phi_{W_n}(Q_n^*)) \int_0^{Q_n^*} (Q_n^* - x) dF_{X_n}(x) \right], \quad (11)$$

其中  $Q_n^*$  满足

$$F_{X_n}(Q_n^*) = \frac{(P_n - C_n)[\eta_n - \Phi_{W_n}(Q_n^*)] + \eta_n \lambda_n^* C_n}{(P_n - V_n)[1 - \Phi_{W_n}(Q_n^*)]}.$$

为了比较带有和不带有质量水平波动性的库存决策模型的差异性, 以下利用式(6)和(11)给出最优期望利润差曲线的定义, 即

$$E(\bar{Q}_k^*(j_n | i_n), Q_n^*) = E[\Omega_k(\bar{Q}_k^*(j_n | i_n))] - E[\Omega_n(Q_n^*)].$$

假设在不考虑质量水平的波动下, 各产品的供应能力  $W_n$  都固定服从于  $Ga(2, 0.079)$ ; 而在考虑质量水平的环境下, 各产品供应能力  $W_n(j_n)$  因质量水平  $j_n$  的影响, 其分布函数为  $Ga(2, \xi)$ , 其中参数  $\xi$  的取值分别为: 0.049, 0.054, 0.059, 0.064, 0.069, 0.074. 于是, 结合表 2 中的模型参数值, 可得出最优期望利润差曲线, 如图 4 所示.

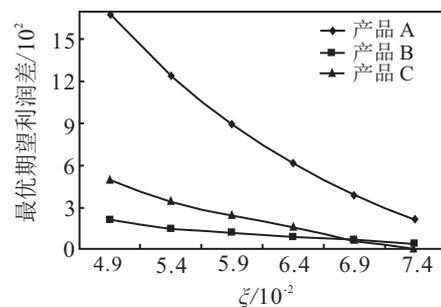


图 4 各产品最优期望利润差曲线

由图4可知, 在不完备质量环境下, 若决策者忽略质量水平的波动性带来的影响, 而采取  $Q_n^*$  的订购策略, 则其在此决策优化的过程中, 将面临一定的利

润损失的风险,其中产品A的利润损失额最大.从中也表明在一定的模型参数下,充分考虑质量水平的波动性对模型决策的影响,有利于提升最优期望利润水平.然而,当产品的质量水平的波动性使得供应能力的参数 $\xi$ 逐步趋向于0.079时,各产品的最优期望利润差曲线也逐渐趋向于零.由此说明在此情形下,由质量水平的波动性施加在决策机制的作用逐步趋弱,相应的最优期望利润的提升幅度也逐渐变小.可见,将质量水平的波动性纳入库存系统的决策机制具有一定的决策参考价值 and 意义.

### 3 结 论

本文在不完备质量环境下充分考虑融资能力、风险厌恶、质量水平的波动性、需求的随机性等要素对决策机制的影响,拓展了多产品库存系统的优化与控制模型,并提出由多重要素组成的最优Portfolio策略.同时,利用首达性、常返性及Phase-Type分布等随机过程的基本理论分析了库存系统的随机性.根据模型相关的结论,可以得出以下重要的管理启示:产品质量水平的波动性对库存系统的最优解具有重要的影响,当其波动性使得供应能力提高时,质量水平与最优解之间的关系为正相关的,否则反之;库存系统的最优期望订购量与融资能力之间具有正相关性,但随着融资能力值的进一步增大,其对最优期望订购量和期望利润的敏感性逐渐趋弱,即当融资能力达到一定的水平时,决策者可以不考虑资金的因素对库存系统的影响;在一定的融资能力下,决策者的风险厌恶程度与最优期望订购量之间具有一定的关联性.决策者可以利用库存系统的历史数据,统计出质量水平的转移概率矩阵,结合本模型构建每周期的最优决策机制,以提升库存系统的运作与管理水平.

### 参考文献(References)

- [1] Jain R, Singh S R. Inflationary implications on an inventory with expiration date, capital constraint and uncertain lead time in a multi-echelon supply chain[J]. *Int J of Procurement Management*, 2011, 4(4): 419-432.
- [2] Aryanezhad M B, Moezi S D, Saiedy H. A genetic algorithm to optimize a multi-product EOQ model with limited warehouse-space and capital limitation under VMI[J]. *Int J of Management Perspective*, 2012, 1(1): 31-35.
- [3] Ma L, Xue W, Zhao Y, et al. Loss-averse inventory and borrowing decisions with constraints on working capital in fashion and textiles industry[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 6(5): 1-10.
- [4] Yan X, Wang Y. A newsvendor model with capital constraint and demand forecast update[J]. *Int J of Production Research*, 2014, 52(17): 5021-5040.
- [5] Lee H L, Rosenblatt M J. Optimal inspection and ordering policies for products with imperfect quality[J]. *IIE Transactions*, 1985, 17(3): 284-289.
- [6] Hsu J T, Hsu L F. An EOQ model with imperfect quality items, inspection errors, shortage backordering, and sales returns[J]. *Int J of Production Economics*, 2013, 143(1): 162-170.
- [7] Tai A H. An EOQ model for imperfect quality items with multiple quality characteristic screening and shortage backordering[J]. *European J of Industrial Engineering*, 2015, 9(2): 261-276.
- [8] Sher M, Kim S L. An economic order quantity model for items experiencing failure in storage[J]. *Int J of Operational Research*, 2015, 22(4): 405-422.
- [9] Tsai W C. Order allocation for multi-item sourcing with supply disruptions in shipment quality and delivery[J]. *Int J of Logistics Research and Applications*, 2015, 18(6): 1-24.
- [10] 张群, 李群霞, 谷炜, 等. 考虑缺陷率和缺货的模糊库存模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2008, 28(11): 62-68. (Zhang Q, Li Q X, Gu W, et al. Fuzzy inventory model with defective rate and shortage backordering[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2008, 28(11): 62-68.)
- [11] 李群霞, 张群, 朱晓宁, 等. 缺陷品可完全退货的库存控制模型的研究[J]. *中国管理科学*, 2009, 17(6): 116-121. (Li Q X, Zhang Q, Zhu X N, et al. Optimal inventory model with completely returning defective items[J]. *Chinese J of Management Science*, 2009, 17(6): 116-121.)
- [12] Choi S, Ruszczynski A, Zhao Y. A multi-product risk-averse newsvendor with law-invariant coherent measures of risk[J]. *Operations Research*, 2011, 59(2): 346-364.
- [13] Sun Y, Wissel J, Jackson P L. Separation results for multi-product inventory hedging problems[J]. *Annals of Operations Research*, 2016: 237(1): 1-17.
- [14] Chen X, Sun P. Optimal structural policies for ambiguity and risk averse inventory and pricing models[J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 2012, 50(1): 133-146.
- [15] Dai Y, Chao X. Salesforce contract design and inventory planning with asymmetric risk-averse sales agents[J]. *Operations Research Letters*, 2013, 41(1): 86-91.
- [16] Wu M, Zhu S X, Teunter R H. The risk-averse newsvendor problem with random capacity[J]. *European J of Operational Research*, 2013, 231(2): 328-336.
- [17] 林元烈. 应用随机过程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. (Lin Y L. *Applied stochastic processes*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)