

基于余弦贴近度与群体共识度的正态云多准则群决策方法

任 剑^{1,2†}, 王坚强³, 胡春华¹

(1. 湖南商学院 湖南省移动电子商务协同创新中心, 长沙 410205; 2. 湖南大学
工商管理学院, 长沙 410082; 3. 中南大学 商学院, 长沙 410083)

摘 要: 对于正态云多准则群决策问题, 提出一种基于余弦贴近度与群体共识度的决策方法. 将各专家的正态云决策矩阵转化为泛型正态随机决策矩阵, 利用正态云的线性组合法, 计算出线性加权泛型正态随机变量. 基于理想方案, 求得各专家认为各方案的余弦相似度、余弦贴近度和排序结果. 通过群体共识度, 判断专家们决策意见的一致性程度, 求得各方案的加权的余弦相似度、余弦贴近度, 并得到最终排序. 最后, 通过算例验证了所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 多准则群决策; 正态云; 泛型正态随机变量; 理想方案; 余弦相似度; 余弦贴近度; 群体共识度

中图分类号: C934

文献标志码: A

Multi-criterion group decision-making method based on normal cloud by cosine close degree and group consensus degree

REN Jian^{1,2†}, WANG Jian-qiang³, HU Chun-hua¹

(1. Mobile E-business Collaborative Innovation Center of Hu'nan Province, Hu'nan University of Commerce, Changsha 410205, China; 2. School of Business, Hu'nan University, Changsha 410082, China; 3. School of Business, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: For the multi-criterion group decision-making problems with normal clouds under the criterion set, a decision-making method based on cosine close degrees and group consensus degrees is proposed. In the method, firstly, the normal cloud decision-making matrices of the experts are transformed into general normal stochastic decision-making matrices. Then, by using the linear combination method of normal clouds, the linear weighted general normal stochastic variables of the alternatives are derived. Furthermore, based on ideal alternatives, the cosine similarity degrees, cosine close degrees and ranking results are attained by each expert. After that, through the group consensus degree, the consistency degree of the decision-making opinions of the expert sets is worked out. Accordingly, the weighted cosine similarity degree, weighted cosine close degree and the comprehensive ranking order are gained. Finally, the feasibility and effectiveness of the proposed method are verified by the comparative analysis of an illustrative example.

Keywords: multi-criterion group decision-making; normal cloud; general normal stochastic variable; ideal alternative; cosine similarity degree; cosine close degree; group consensus degree

0 引 言

目前, 决策环境愈加复杂, 并充满不确定性, 人们常常利用概率论和模糊集合论反映这种不确定性随机性表示事件发生的可能性, 模糊性表示事件边界的亦此亦彼性. 然而, 现实中不确定性往往表现出随机性和模糊性并存的情况. 为了处理这种混合不确定性的情形, 李德毅等^[1-2]提出了隶属云的概念和产生

机理. 隶属云即云模型, 是用语言值表示的某个定性概念与其定量表示之间的不确定性转换模型. 邸凯昌等^[3]探讨了云模型、虚云、云运算、云变换、不确定性推理等内容. 吕辉军等^[4]为实现定量数值与定性概念的自然转换, 提出了逆向云发生器的算法. 在大多数情况下, 不确定性变量的取值趋近于某个最可能的值, 若无法获取足够的信息, 可近似为服从正态分

收稿日期: 2016-03-11; 修回日期: 2016-07-21.

基金项目: 国家社会科学基金一般项目(15BJY163); 教育部人文社会科学研究青年基金项目(13YJCZH145); 国家自然科学基金重点项目(71431006); 国家自然科学基金面上项目(61273232); 中国博士后科学基金面上项目(2013M531784); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-13-0785); 湖南省教育厅科学研究优秀青年项目(15B129).

作者简介: 任剑(1979—), 男, 副教授, 博士, 从事决策理论及应用的研究; 王坚强(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论及应用等研究.

†通讯作者. E-mail: renjianemail@126.com

布,这种处理接近人类思维规律.基于此,李德毅等^[5]指出正态云模型具有普适性,是一种泛化的正态分布随机变量.王国胤等^[6]定义了多阶正态云模型,并探讨了其相关性质.Wang等^[7]提出了泛型正态云模型,并设计了泛型正向正态云算法和泛型逆向正态云算法.正态云方法具有坚实的数学理论基础,通过计算机模拟算法能实现正向、逆向的灵活转换,同时,正态分布和模糊认知在现实中普遍存在,因此具有广阔的应用前景.

在不确定性多准则决策中,通常用模糊随机变量描述随机性和模糊性并存的情况.模糊随机变量定义了从概率空间到模糊集类的一个可测函数^[8].模糊随机变量的自然状态与可能结果的不确定性分别用概率值和模糊数表示.实际中,这两者会相互影响、相互作用,表现出“你中有我,我中有你”的混合不确定性.云模型恰好能定性分析和定量表示这种复杂的有关联的不确定性,因此,在不确定性多准则决策研究中受到诸多学者的高度关注:

1) 语言云.王洪利等^[9]利用云模型解决语言多准则群决策问题.任剑^[10]针对语言随机多准则决策问题,将不确定语言评价标度转化为近似的一维正态云,并利用理想点法进行求解.Wang等^[11]针对区间语言多准则群决策问题,提出了一种基于区间集结云和海明距离的决策方法.杨恶恶等^[12]针对犹豫语言多准则决策问题,提出一种基于云模型和蒙特卡洛模拟的决策方法.赵坤等^[13]将前景理论和云模型应用于语言随机多准则决策问题中.

2) 区间云.于少伟等^[14]针对不确定性多准则群决策问题中的正态分布区间数,提出了一种逆向云算法并进行了误差分析.

3) 云综合评判模型.龚艳冰等^[15]构建了基于正态云模型和熵权的综合评判模型,并应用于人口发展现代化程度评估.周启刚等^[16]利用正态云综合评价模型进行了三峡库区土地利用生态风险评估.

4) 云层次分析法.Niu等^[17]提出了基于云模型的层次分析法,并应用于技术可行性分析.张杨等^[18]利用层次分析法和基于正态云模型的综合评判模型,进行了土地资源生态安全评价.Yang等^[19]提出了云德尔菲层次分析方法,并应用于多准则群决策方法.

5) 新型云模型.王坚强等^[20]定义了直觉正态云模型,设计了直觉正态云发生算法,提出了基于蒙特卡洛模拟的直觉正态云多准则群决策方法.Wang等^[21]定义了梯形云模型,并应用于区间值直觉语言多准则群决策问题中.

6) 云算子.Wang等^[22]基于云运算法则,定义了云加权算术平均算子、云加权几何平均算子、云有序加权平均算子、云混合集结算子,并应用于多准则群决策问题中.

7) 云相似度.夏登友等^[23]通过应急方案的评价云与评价标准云的相似性比较,综合评判和优选应急方案.

8) 云距离.张龙昌等^[24]利用优劣解距离法和云模型进行SaaS最优服务决策.

9) 云Choque积分.Wu等^[25]利用二序可加模糊测度、云模型、云Choque积分进行垃圾焚烧厂选址决策.

上述方法在集结准则值时,分别从云模型自身特征以及云模型与其他不确定性信息间的关联入手,较好处理了决策信息的不确定性.然而,对于正态云多准则群决策问题,没有深入探讨云模型的本质特征、方案与理想方案间的差异性、专家意见的一致程度等.鉴于此,本文提出正态云的线性组合方法、方案的余弦贴适度、专家的群体共识度,构建相应的正态云多准则群决策方法,并应用于城市片区雨涝灾害风险控制能力综合评估问题中进行算例分析.最后,通过算例验证了所提出方法的可行性和有效性.

1 正态云

1.1 正态云的定义

定义1^[3] 设 U 是一个用数值表示的定量论域,CL是 U 上的定性概念,若定量值 $x \in U$ 是定性概念CL的一次随机实现,对CL的确定度 $\mu(x) \in [0, 1]$ 是有稳定倾向的随机数($\mu: U \rightarrow [0, 1]$),则 x 在论域 U 上的分布称为云(Cloud),记为云 $CL(U)$,每一个 x 称为一个云滴.

正态云是一种具有普遍适应性的云模型.

定义2^[3] 在正态分布函数与正态隶属函数的基础上,正态云可用期望值 Ex (Expected value)、熵 En (Entropy)、超熵 He (Hyper entropy)这3个相互独立的参数共同表达一个定性概念的数字特征,反映概念的不确定性,记为 $CL(Ex, En, He)$.其中: Ex 是所有云滴在数域中的重心位置,反映了最能代表这个定性概念在数域的坐标; En 是定性概念亦此亦彼性的度量,反映了在数域中可被语言值接受的数域范围,即模糊度,同时反映了在数域中的这些点能代表这个语言值的概率; He 是熵 En 的离散程度,即熵的熵,反映了每个数值代表这个定性概念确定度的凝聚性,也反映云滴的凝聚程度.

期望值 Ex 、熵 En 、超熵 He 将定性概念中的模糊性和随机性关联到一起,构成定性和定量相互间的映射,作为知识表示的基础.当论域为一维时,正态云

NCL(Ex, En, He) 发生器算法见文献[4].

1.2 正态云的线性组方法

由正态云发生器算法可知: En' 服从以 En 为期望值、以 He^2 为方差的正态分布; $NCL(Ex, En, He)$ 服从以 Ex 为期望值、以 $(En')^2$ 为方差的正态分布. 因此, $NCL(Ex, En, He)$ 是一种泛型正态随机变量^[5]. 有

$$D(NCL(Ex, En, He)) = (En')^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - Ex)^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-Ex)^2}{2y^2} - \frac{(y-En)}{2He^2}}}{2\pi He|y|} dy = En^2 + He^2.$$

进而有

$$NCL(Ex, En, He) \sim N(Ex, En^2 + He^2). \quad (1)$$

He 反映了泛型正态随机变量的影响因素中的不均匀情况或者不相互独立情况, 可度量偏离正态分布的程度. 当 $He = 0$ 时, $NCL(Ex, En, He)$ 退化为正态随机变量 $N(Ex, En^2)$.

定理1 若 n 个正态云

$$NCL(Ex_j, En_j, He_j) \sim N(Ex_j, En_j^2 + He_j^2), \\ j \in N = \{1, 2, \dots, n\}$$

相互独立, 则 $\sum_{j=1}^n NCL(Ex_j, En_j, He_j)$ 也服从泛型正态分布, 即

$$\sum_{j=1}^n NCL(Ex_j, En_j, He_j) \sim N\left(\sum_{j=1}^n Ex_j, \sum_{j=1}^n (En_j^2 + He_j^2)\right).$$

定理2 若 n 个正态云

$$NCL(Ex_j, En_j, He_j) \sim N(Ex_j, En_j^2 + He_j^2), \quad j \in N$$

相互独立, 则线性组合 $\sum_{j=1}^n c_j NCL(Ex_j, En_j, He_j)$ 也服从泛型正态分布, 即

$$\sum_{j=1}^n c_j NCL(Ex_j, En_j, He_j) \sim N\left(\sum_{j=1}^n c_j Ex_j, \sum_{j=1}^n c_j^2 (En_j^2 + He_j^2)\right).$$

泛型正态分布的条件比正态分布的更宽松, 因此定理1和定理2显然成立.

2 余弦贴适度

在随机变量中, 均值表示随机变量取值的聚集趋势, 标准差表示随机变量取值的发散趋势. 因此, 对于效益型随机变量, 最优的情况是均值最大, 标准差最小; 最劣的情况是均值最小, 标准差最小. 效益型泛型正态随机变量同样具有这样的性质.

定义3 在一个群决策问题中, 设有 m 个备选方案, 记为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$; q 个领域专家, 记为 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$; 泛型正态随机决策矩阵 $GNSDM = (a_{ik})_{m \times q}$, 泛型正态随机变量 $a_{ik} \sim N(\tilde{\mu}_{ik}, \tilde{\sigma}_{ik}^2)$, $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iq}) = (N(\tilde{\mu}_{i1}, \tilde{\sigma}_{i1}^2), N(\tilde{\mu}_{i2}, \tilde{\sigma}_{i2}^2), \dots, N(\tilde{\mu}_{iq}, \tilde{\sigma}_{iq}^2))$, $i \in M = \{1, 2, \dots, m\}$, $k \in Q = \{1, 2, \dots, q\}$. 正理想方案 a^+ 和负理想方案 a^- 分别为

$$a^+ = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_q^+) = (N(\tilde{\mu}_1^+, (\tilde{\sigma}_1^+)^2), N(\tilde{\mu}_2^+, (\tilde{\sigma}_2^+)^2), \dots, N(\tilde{\mu}_q^+, (\tilde{\sigma}_q^+)^2)) = (N(\max_i(\tilde{\mu}_{i1}), \min_i(\tilde{\sigma}_{i1}^2)), N(\max_i(\tilde{\mu}_{i2}), \min_i(\tilde{\sigma}_{i2}^2)), \dots, N(\max_i(\tilde{\mu}_{iq}), \min_i(\tilde{\sigma}_{iq}^2))), \\ a^- = (a_1^-, a_2^-, \dots, a_q^-) = (N(\tilde{\mu}_1^-, (\tilde{\sigma}_1^-)^2), N(\tilde{\mu}_2^-, (\tilde{\sigma}_2^-)^2), \dots, N(\tilde{\mu}_q^-, (\tilde{\sigma}_q^-)^2)) = (N(\min_i(\tilde{\mu}_{i1}), \min_i(\tilde{\sigma}_{i1}^2)), N(\min_i(\tilde{\mu}_{i2}), \min_i(\tilde{\sigma}_{i2}^2)), \dots, N(\min_i(\tilde{\mu}_{iq}), \min_i(\tilde{\sigma}_{iq}^2))).$$

定义4 方案 a_i 的正余弦相似度 $CSD(a_i, a^+)$ 和负余弦相似度 $CSD(a_i, a^-)$ ($i \in M$) 分别为

$$CSD(a_i, a^+) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \frac{\tilde{\mu}_{ik} \tilde{\mu}_k^+ + \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{\sigma}_k^+}{\sqrt{\tilde{\mu}_{ik}^2 + \tilde{\sigma}_{ik}^2} \sqrt{(\tilde{\mu}_k^+)^2 + (\tilde{\sigma}_k^+)^2}}, \\ CSD(a_i, a^-) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \frac{\tilde{\mu}_{ik} \tilde{\mu}_k^- + \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{\sigma}_k^-}{\sqrt{\tilde{\mu}_{ik}^2 + \tilde{\sigma}_{ik}^2} \sqrt{(\tilde{\mu}_k^-)^2 + (\tilde{\sigma}_k^-)^2}}.$$

定理3 方案 a_i 的正余弦相似度 $CSD(a_i, a^+)$ 和负余弦相似度 $CSD(a_i, a^-)$ ($i \in M$) 具有以下性质:

- 1) $CSD(a_i, a^+) \in [0, 1]$, $CSD(a_i, a^-) \in [0, 1]$;
- 2) $CSD(a_i, a^+) = CSD(a^+, a_i)$, $CSD(a_i, a^-) = CSD(a^-, a_i)$;
- 3) $CSD(a_i, a^+) = 1 \leftrightarrow a_i = a^+ \leftrightarrow (\tilde{\mu}_{i1} = \tilde{\mu}_1^+) \wedge (\tilde{\mu}_{i2} = \tilde{\mu}_2^+) \wedge \dots \wedge (\tilde{\mu}_{iq} = \tilde{\mu}_q^+) \leftrightarrow (\tilde{\sigma}_{i1} = \tilde{\sigma}_1^+) \wedge (\tilde{\sigma}_{i2} = \tilde{\sigma}_2^+) \wedge \dots \wedge (\tilde{\sigma}_{iq} = \tilde{\sigma}_q^+)$;
- 4) $CSD(a_i, a^-) = 1 \leftrightarrow a_i = a^- \leftrightarrow (\tilde{\mu}_{i1} = \tilde{\mu}_1^-) \wedge (\tilde{\mu}_{i2} = \tilde{\mu}_2^-) \wedge \dots \wedge (\tilde{\mu}_{iq} = \tilde{\mu}_q^-) \leftrightarrow (\tilde{\sigma}_{i1} = \tilde{\sigma}_1^-) \wedge (\tilde{\sigma}_{i2} = \tilde{\sigma}_2^-) \wedge \dots \wedge (\tilde{\sigma}_{iq} = \tilde{\sigma}_q^-)$.

根据余弦相似度和相关系数之间的关系, 定理3显然成立.

定义5 方案 a_i 的余弦贴适度为

$$CCD(a_i) = \frac{CSD(a_i, a^+)}{CSD(a_i, a^+) + CSD(a_i, a^-)}, \\ i \in M.$$

可知, $CCD(a_i)$ 越大, 方案 a_i 与 a^+ 越贴近; $CCD(a_i)$ 值越小, a_i 与 a^- 越贴近, $i \in M$. 显然 $CCD(a_i) \in [0, 1]$, $i \in M$.

定义6 在一个群决策问题中,设有 m 个备选方案,记为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$; q 个领域专家,记为 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$; 专家权重向量 $W = (w_1, w_2, \dots, w_q)$, $w_k \in [0, 1] (k \in Q)$ 且 $\sum_{k=1}^q w_k = 1$; 泛型正态随机决策矩阵 $\text{GNSDM} = (a_{ik})_{m \times q}$, 泛型正态随机变量

$$\begin{aligned} a_{ik} &\sim N(\tilde{\mu}_{ik}, \tilde{\sigma}_{ik}^2), \\ a_i &= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iq}) = \\ &(N(\tilde{\mu}_{i1}, \tilde{\sigma}_{i1}^2), N(\tilde{\mu}_{i2}, \tilde{\sigma}_{i2}^2), \dots, N(\tilde{\mu}_{iq}, \tilde{\sigma}_{iq}^2)), \\ &i \in M, k \in Q. \end{aligned}$$

则方案 a_i 的加权正余弦相似度 $\text{CSD}_W(a_i, a^+)$ 和加权负余弦相似度 $\text{CSD}_W(a_i, a^-) (i \in M)$ 分别为

$$\begin{aligned} \text{CSD}_W(a_i, a^+) &= \sum_{k=1}^q w_k \frac{\tilde{\mu}_{ik} \tilde{\mu}_k^+ + \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{\sigma}_k^+}{\sqrt{\tilde{\mu}_{ik}^2 + \tilde{\sigma}_{ik}^2} \sqrt{(\tilde{\mu}_k^+)^2 + (\tilde{\sigma}_k^+)^2}}, \\ \text{CSD}_W(a_i, a^-) &= \sum_{k=1}^q w_k \frac{\tilde{\mu}_{ik} \tilde{\mu}_k^- + \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{\sigma}_k^-}{\sqrt{\tilde{\mu}_{ik}^2 + \tilde{\sigma}_{ik}^2} \sqrt{(\tilde{\mu}_k^-)^2 + (\tilde{\sigma}_k^-)^2}}. \end{aligned}$$

定理4 方案 a_i 的加权正余弦相似度 $\text{CSD}_W(a_i, a^+)$ 和加权负余弦相似度 $\text{CSD}_W(a_i, a^-) (i \in M)$ 具有以下性质:

- 1) $\text{CSD}_W(a_i, a^+) \in [0, 1], \text{CSD}_W(a_i, a^-) \in [0, 1]$;
- 2) $\text{CSD}_W(a_i, a^+) = \text{CSD}_W(a^+, a_i), \text{CSD}_W(a_i, a^-) = \text{CSD}_W(a^-, a_i)$;
- 3) $\text{CSD}_W(a_i, a^+) = 1 \Leftrightarrow a_i = a^+ \Leftrightarrow (\tilde{\mu}_{i1} = \tilde{\mu}_1^+ \wedge \tilde{\mu}_{i2} = \tilde{\mu}_2^+ \wedge \dots \wedge \tilde{\mu}_{iq} = \tilde{\mu}_q^+) \Leftrightarrow (\tilde{\sigma}_{i1} = \tilde{\sigma}_1^+ \wedge \tilde{\sigma}_{i2} = \tilde{\sigma}_2^+ \wedge \dots \wedge \tilde{\sigma}_{iq} = \tilde{\sigma}_q^+)$;
- 4) $\text{CSD}_W(a_i, a^-) = 1 \Leftrightarrow a_i = a^- \Leftrightarrow (\tilde{\mu}_{i1} = \tilde{\mu}_1^- \wedge \tilde{\mu}_{i2} = \tilde{\mu}_2^- \wedge \dots \wedge \tilde{\mu}_{iq} = \tilde{\mu}_q^-) \Leftrightarrow (\tilde{\sigma}_{i1} = \tilde{\sigma}_1^- \wedge \tilde{\sigma}_{i2} = \tilde{\sigma}_2^- \wedge \dots \wedge \tilde{\sigma}_{iq} = \tilde{\sigma}_q^-)$.

定义7 方案 a_i 的加权余弦贴近度 $\text{CCD}_W(a_i) (i \in M)$ 为

$$\text{CCD}_W(a_i) = \frac{\text{CSD}_W(a_i, a^+)}{\text{CSD}_W(a_i, a^+) + \text{CSD}_W(a_i, a^-)}.$$

$\text{CCD}_W(a_i)$ 越大, 方案 a_i 与 a^+ 越贴近; $\text{CCD}_W(a_i)$ 值越小, a_i 与 a^- 越贴近, $i \in M$. 显然 $\text{CCD}_W(a_i) \in [0, 1], i \in M$.

本节中的定义、定理同样适用于正态随机变量.

3 群体共识度

在群决策中, 由于知识和经验的不同, 专家们对于方案的排序常常存在不同意见, 需要对此进行定量分析, 以便权衡利弊, 从而进一步优化决策过程, 达成大多数专家认同的决策结果.

定义8 设专家集 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ 、方案集

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 专家集对方案集进行排序的群体共识度为

$$\text{GCD} = \frac{\sum_{r=1}^{\text{cnt}(A_r)} \sum_{a_{ir} \in A_r} (\text{cnt}(a_{ir}) - 1)}{m(q - 1)}.$$

其中: $A_r \subseteq A$ 为序号为 r 的排序方案子集 ($r \in O \subseteq M$), 方案 $a_{ir} \in A_r (i \in M, r \in O)$, $\text{cnt}(\cdot)$ 为计数函数.

定理5 群体共识度 GCD 具有以下性质:

- 1) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{\text{cnt}(A_r)} = A$;
- 2) $\text{GCD} \in [0, 1]$.

定义9 设专家集 E 、方案集 A 同定义8, 专家集对方案集进行排序的群体非共识度为 $\text{GNCD} = 1 - \text{GCD}$.

通常, 若群体共识度 $\text{GCD} > 0.5$, 则认为专家集对方案集的排序结果可接受, 这也与实际决策中, 少数服从多数原则相一致. 若群体共识度 $\text{GCD} \leq 0.5$, 则应返回前面的决策步骤, 进行迭代优化, 直至 $\text{GCD} > 0.5$ 为止. 群体共识度计算原理科学, 操作简便, 易于应用推广.

4 基于余弦贴近度与群体共识度的正态云多准则群决策方法

4.1 问题描述

在某个多准则群决策问题中, 设有 m 个备选方案, 记为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$; n 个相互独立的评价准则, 记为 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$; q 个领域专家, 记为 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$; $W^C = (w_1^C, w_2^C, \dots, w_n^C)$ 表示专家集给出的准则权重向量, w_j^C 是专家集给出的准则 C_j 的权重, $w_j^C \in [0, 1] (j \in N)$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j^C = 1$; $W^E = (w_1^E, w_2^E, \dots, w_q^E)$ 表示专家权重向量, w_k^E 是专家 e_k 的权重, $w_k^E \in [0, 1] (k \in Q)$ 且 $\sum_{k=1}^q w_k^E = 1$; q 个正态云决策矩阵, 记为 $\text{NCDM}_k = (x_{kij})_{m \times n}$, x_{kij} 是正态云集, 表示专家 e_k 认为方案 a_i 在准则集 C 下的优劣表现, x_{kij} 是正态云, 表示专家 e_k 认为方案 a_i 在准则 C_j 下的优劣表现 ($k \in Q, i \in M, j \in N$); 确定方案集 A 的排序.

4.2 决策步骤

Step 1: 利用式(1), 将正态云决策矩阵 NCDM_k 转化为泛型正态随机决策矩阵

$$\text{GNSDM}_k = (y_{kij})_{m \times n}.$$

其中

$$y_{kij} \sim N(\text{Ex}_{kij}, \text{En}_{kij}^2 + \text{He}_{kij}^2),$$

$$k \in Q, i \in M, j \in N.$$

Step 2: 根据定理 2, 利用准则权重向量 W^C 求得专家 e_k 认为方案 a_i 的线性加权泛型正态随机变量

$$z_{ki} \sim N\left(\sum_{j=1}^n w_j \text{Ex}_{kij}, \sum_{j=1}^n w_j^2 (\text{En}_{kij}^2 + \text{He}_{kij}^2)\right),$$

$$k \in Q, i \in M.$$

Step 3: 根据定义 3, 求得正理想方案 a^+ 和负理想方案 a^- .

Step 4: 根据定义 4, 求得专家 e_k 认为方案 a_i 的正余弦相似度 $\text{CSD}(a_{ik}, a_k^+)$ 和负余弦相似度 $\text{CSD}(a_{ik}, a_k^-)$, $k \in Q, i \in M$.

Step 5: 根据定义 5, 求得专家 e_k 认为方案 a_i 的余弦贴近度 $\text{CCD}(a_{ik})$, 比较其大小, 得到专家 e_k 认为方案 a_i 的排序结果, $k \in Q, i \in M$.

Step 6: 根据定义 8, 求得专家集对方案集进行排序的群体共识度 GCD , 若 $\text{GCD} > 0.5$, 则转至 Step 7, 否则, 调整正态云决策矩阵 $\text{NCDM}_k (k \in Q)$, 返回 Step 1.

Step 7: 根据定义 6, 利用专家权重向量 W^E 求得方案 a_i 的加权正余弦相似度 $\text{CSD}_W(a_i, a^+)$ 和加权负余弦相似度 $\text{CSD}_W(a_i, a^-) (i \in M)$.

Step 8: 根据定义 7, 求得方案 a_i 的加权余弦贴近度 $\text{CCD}_W(a_i) (i \in M)$, 比较其大小, 得到专家集认为

方案集的排序结果.

5 算例分析

近年来, 我国城市雨涝呈现发生范围广、积水深度大、滞水时间长的特点, 造成严重的社会经济损害, 危及人民群众生命财产安全, 已成为城市化进程中凸显的新难题. 某市水务管理部门请来 3 个专家 $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, 对本市 3 个城市片区 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的雨涝灾害风险控制能力进行综合评估. 在专家对雨涝灾害风险控制进行影响因素分析后, 筛选出 6 个评估雨涝灾害风险控制能力的指标 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_6\}$, 分别为设施排涝能力 C_1 、人员避险能力 C_2 、机构救援能力 C_3 、冲突协调能力 C_4 、部门联动能力 C_5 、政策保障能力 C_6 . 专家组确定的指标权重为 $W^C = (0.12, 0.15, 0.18, 0.25, 0.2, 0.1)$, 专家权重向量 $W^E = (0.35, 0.4, 0.25)$. 各专家给出的正态云决策矩阵如表 1~表 3 所示 (本例决策信息参考文献 [22]). 试评估各城市片区的雨涝灾害风险控制能力.

利用式 (1), 将正态云决策矩阵 NCDM_k 转化为泛型正态随机决策矩阵 $\text{GNSDM}_k = (y_{kij})_{m \times n}$, 根据定理 2, 利用指标权重向量 W^C , 求得专家 e_k 认为片区 a_i 的线性加权泛型正态随机变量 z_{ki} 如表 4 所示. 表 4 中 $k \in Q = \{1, 2, 3\}$, $i \in M = \{1, 2, 3\}$.

根据定义 3, 求得正理想片区 a^+ 和负理想片区 a^- 如表 5 所示.

表 1 正态云决策矩阵 NCDM_1

a_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
a_1	NCL(3.85, 2.1, 0.411)	NCL(5.1, 922, 0.47)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)	NCL(0.2, 958, 0.125)	NCL(3.85, 2.1, 0.411)
a_2	NCL(7.75, 2.655, 0.226)	NCL(6.15, 2.1, 0.411)	NCL(7.75, 2.655, 0.226)	NCL(10, 2.958, 0.125)	NCL(5.1, 922, 0.470)	NCL(7.75, 2.655, 0.226)
a_3	NCL(3.85, 2.1, 0.411)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)	NCL(5.1, 922, 0.470)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)	NCL(3.85, 2.1, 0.411)	NCL(7.75, 2.655, 0.226)

表 2 正态云决策矩阵 NCDM_2

a_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
a_1	NCL(5.1, 922, 0.470)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)	NCL(3.85, 2.1, 0.411)	NCL(3.85, 2.1, 0.411)	NCL(5.1, 922, 0.470)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)
a_2	NCL(6.15, 2.1, 0.411)	NCL(10, 2.958, 0.125)	NCL(6.15, 2.1, 0.411)	NCL(10, 2.958, 0.125)	NCL(6.15, 2.1, 0.411)	NCL(7.75, 2.655, 0.226)
a_3	NCL(10, 2.958, 0.125)	NCL(0.2, 958, 0.125)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)	NCL(5.1, 922, 0.470)	NCL(3.85, 2.1, 0.411)	NCL(0.2, 958, 0.125)

表 3 正态云决策矩阵 NCDM_3

a_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
a_1	NCL(6.15, 2.1, 0.411)	NCL(3.85, 2.1, 0.411)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)	NCL(5.1, 922, 0.470)	NCL(0.2, 958, 0.125)	NCL(0.2, 958, 0.125)
a_2	NCL(7.75, 2.655, 0.226)	NCL(10, 2.958, 0.125)	NCL(6.15, 2.1, 0.411)	NCL(10, 2.958, 0.125)	NCL(6.15, 2.1, 0.411)	NCL(7.75, 2.655, 0.226)
a_3	NCL(5.1, 922, 0.470)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)	NCL(5.1, 922, 0.470)	NCL(2.25, 2.655, 0.226)	NCL(3.85, 2.1, 0.411)	NCL(0.2, 958, 0.125)

表4 线性加权泛型正态随机变量 z_{ki}

	e_1	e_2	e_3
a_1	$N(2.5645, 1.2242)$	$N(3.8180, 0.8783)$	$N(2.9705, 1.0820)$
a_2	$N(7.5225, 1.2107)$	$N(7.8500, 1.2135)$	$N(8.0420, 1.2498)$
a_3	$N(3.8070, 1.0504)$	$N(3.6250, 1.0690)$	$N(3.1700, 1.0575)$

表5 正理想片区 a^+ 和负理想片区 a^-

	e_1	e_2	e_3
a_k^+	$N(7.5225, 1.0504)$	$N(7.8500, 0.8783)$	$N(8.0420, 1.0575)$
a_k^-	$N(2.5645, 1.0504)$	$N(3.6250, 0.8783)$	$N(2.9705, 1.0575)$

根据定义4和定义5,求得专家 e_k 认为片区 a_i 的正余弦相似度 $CSD(a_{ik}, a_k^+)$ 、负余弦相似度 $CSD(a_{ik}, a_k^-)$ 和余弦贴近度 $CCD(a_{ik})$ 如表6所示. 表6中, $k \in Q, i \in M$.

表6 正余弦相似度、负余弦相似度和余弦贴近度

	e_1	e_2	e_3
$CSD(a_{1k}, a_k^+)$	0.9633	0.9926	0.9781
$CSD(a_{2k}, a_k^+)$	1.0000	0.9998	0.9999
$CSD(a_{3k}, a_k^+)$	0.9919	0.9874	0.9827
$CSD(a_{1k}, a_k^-)$	0.9996	0.9999	1.0000
$CSD(a_{2k}, a_k^-)$	0.9725	0.9936	0.9810
$CSD(a_{3k}, a_k^-)$	0.9931	0.9997	0.9998
$CCD(a_{1k})$	0.4907	0.4982	0.4945
$CCD(a_{2k})$	0.5070	0.5016	0.5048
$CCD(a_{3k})$	0.4997	0.4969	0.4957

比较余弦贴近度 $CCD(a_{ik})$ 的大小,得到专家 e_k 认为片区 a_i 的排序结果如表7所示. 表7中, $k \in Q, i \in M$.

表7 专家 e_k 认为片区 a_i 的排序

	e_1	e_2	e_3
Ranking	$a_2 \succ a_3 \succ a_1$	$a_2 \succ a_1 \succ a_3$	$a_2 \succ a_3 \succ a_1$

根据定义8,求得专家组对片区集进行排序的群体共识度为

$$GCD = \frac{4}{6} \approx 0.6667.$$

群体共识度为 $GCD > 0.5$,进入下一步.

根据定义6和定义7,利用专家权重向量 W^E ,求得片区 a_i 的加权正余弦相似度 $CSD_W(a_i, a^+)$ 、加权负余弦相似度 $CSD_W(a_i, a^-)$ 和加权余弦贴近度 $CCD_W(a_i)$ 如表8所示 ($i \in M$).

表8 加权正、负余弦相似度和加权余弦贴近度

	$CSD_W(a_i, a^+)$	$CSD_W(a_i, a^-)$	$CCD_W(a_i)$
a_1	0.9787	0.9998	0.4947
a_2	0.9999	0.9831	0.5042
a_3	0.9878	0.9974	0.4976

比较加权余弦贴近度 $CCD_W(a_i) (i \in M)$ 的大小,得到专家组认为片区集的排序结果为 $a_2 \succ a_3 \succ a_1$.

文献[22]给出云集结算子法的决策步骤如下.

Step 1: 利用云加权算术平均(CWAA)算子集结各专家方案的云模型准则值.

Step 2: 利用云混合集结(CHA)算子与云有序加权平均(COWA)算子集结各专家方案的云集结准则值.

Step 3: 利用正态云发生器算法求得各方案综合云集结准则值一系列云滴的定量值和确定度,并求得各方案的期望得分值.

Step 4: 多次重复Step 3,求得各方案的期望得分值的平均值,进而得到方案的排序结果.

本文方法与文献[22]得到了一致的排序结果,且具有以下优点:

1) 本文方法指出正态云是一种泛型正态随机变量,并根据随机变量相互独立的规律,进行方案准则值的线性加权集结,与文献[22]直接将云模型进行算子集结相比,更具数理逻辑基础.

2) 本文方法利用正态随机变量的均值和方差两个特征参数,求解各方案的加权余弦贴近度,并得到排序结果,与文献[22]利用正态云发生器算法进行重复模拟确定方案的排序结果相比,更具稳定性且过程更简便.

3) 本文方法在得出各专家对于方案的排序结果后,先判断群体共识度,再进行后续决策,更符合实际情况.

为了更进一步检验本文方法的性能,下面与文献[26]中的区间排序可能度法进行对比分析.

将表4中的线性加权泛型正态随机变量转化为区间数,并根据专家权重向量进行区间数的线性加权集结,求得片区 a_i 的加权区间集结值 ($i \in M$),得到其可能度矩阵 $P = (p_{ij})_{3 \times 3}$ 如表9所示.

表 9 可能度矩阵 P

	a_1	a_2	a_3
a_1	0.5000	0.1384	0.4669
a_2	0.8616	0.5000	0.8286
a_3	0.5331	0.1714	0.5000

求得表9中可能度矩阵 P 的排序向量

$$K = (0.2675, 0.4484, 0.2841),$$

并得到方案的排序结果 $a_2 \underset{0.8286}{>} a_3 \underset{0.5331}{>} a_1$.

本文方法与文献 [26] 的区间排序可能度法的排序结果进行对比, 可知:

1) 两者排序结果一致;

2) 本文方法考虑了各方案与正、负理想方案的差异, 更符合最优化决策的要求;

3) 本文方法增加了判断专家组的群体共识度的环节, 考虑了专家意见分歧较大的情况, 更符合群体决策的特点.

综上所述, 本文方法比以往方法具有更好的排序结果和分析手段, 性能优良.

6 结 论

正态云在不确定性决策中具有广泛的应用前景. 本文构建了正态云的线性组合法, 定义了泛型正态随机群决策中的正理想方案、负理想方案、正余弦相似度、负余弦相似度、余弦贴适度、加权正余弦相似度、加权负余弦相似度、加权余弦贴适度与群体共识度, 并探讨了它们的性质, 进而提出一种基于余弦贴适度与群体共识度的正态云多准则群决策方法. 最后通过算例分析表明, 所提出的方法具有以下特点:

1) 充分利用正态云与正态随机变量之间的关系, 进行各方案准则值的线性加权求和, 避免复杂转换过程中决策信息的损失;

2) 将理想点法、余弦相似度应用到准则值为正态云的群决策中, 形成余弦贴适度, 拓展了方法的应用范围;

3) 定义了群体共识度, 利用其分析群决策中专家意见的一致性程度, 并进行初始决策信息的动态调整, 从而减少冲突, 改善决策效果.

参考文献 (References)

[1] 李德毅, 孟海军, 史雪梅. 隶属云和隶属云发生器[J]. 计算机研究与发展, 1995, 32(6): 15-20.
(Li D Y, Meng H J, Shi X M. Membership clouds and membership cloud generators[J]. J of Computer Research and Development, 1995, 32(6): 15-20.)

[2] Li D Y, Cheung D, Shi X M, et al. Uncertainty reasoning

based on cloud models in controllers[J]. Computers and Mathematics with Application, 1998, 35(3): 99-123.

[3] 邸凯昌, 李德仁, 李德毅. 云理论及其在空间数据挖掘和知识发现中的应用[J]. 中国图像图形学报, 1999, 4(11): 929-935.
(Di K C, Li D R, Li D Y. Cloud theory and its applications in spatial data mining and knowledge discovery[J]. J of Image and Graphics, 1999, 4(11): 929-935.)

[4] 吕辉军, 王晔, 李德毅, 等. 逆向云在定性评价中的应用[J]. 计算机学报, 2003, 26(8): 1009-1014.
(Lü H J, Wang Y, Li D Y, et al. The application of backward cloud in qualitative evaluation[J]. Chinese J of Computers, 2003, 26(8): 1009-1014.)

[5] 李德毅, 刘常昱. 论正态云模型的普适性[J]. 中国工程科学, 2004, 6(8): 28-34.
(Li D Y, Liu C Y. Study on the universality of the normal cloud model[J]. Engineering Science, 2004, 6(8): 28-34.)

[6] 王国胤, 许昌林, 张清华, 等. 双向认知计算的 p 阶正态云模型递归定义及分析[J]. 计算机学报, 2013, 36(11): 2316-2329.
(Wang G Y, Xu C L, Zhang Q H, et al. P -order normal cloud model recursive definition and analysis of bidirectional cognitive computing[J]. Chinese J of Computers, 2013, 36(11): 2316-2329.)

[7] Wang G Y, Xu C L, Li D Y. Generic normal cloud model[J]. Information Sciences, 2014, 280(10): 1-15.

[8] Kwakernaak H. Fuzzy random variables-I[J]. Information Sciences, 1978, 15(1): 1-29.

[9] 王洪利, 冯玉强. 基于云模型具有语言评价信息的多属性群决策研究[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 679-685.
(Wang H L, Feng Y Q. On multiple attribute group decision making with linguistic assessment information based on cloud model[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 679-685.)

[10] 任剑. 基于云模型的语言随机多准则决策方法[J]. 计算机集成制造系统, 2012, 18(12): 2792-2797.
(Ren J. Linguistic-stochastic multi-criterion decision-making method based on cloud model[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2012, 18(12): 2792-2797.)

[11] Wang J Q, Peng J J, Zhang H Y, et al. An uncertain linguistic multi-criteria group decision-making method based on a cloud model[J]. Group Decision and Negotiation, 2015, 24(1): 171-192.

[12] 杨恶恶, 王坚强, 马超群, 等. 基于云发生算法的犹豫语言多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(2): 371-374.
(Yang W E, Wang J Q, Ma C Q, et al. Hesitant linguistic multiple criteria decision making method based on cloud generating algorithm[J]. Control and Decision, 2015, 30(2): 371-374.)

[13] 赵坤, 高建伟, 祁之强, 等. 基于前景理论及云模型风险型多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(3):

- 395-402.
(Zhao K, Gao J W, Qi Z Q, et al. Multi-criteria risky-decision-making approach based on prospect theory and cloud model[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(3): 395-402.)
- [14] 于少伟, 史忠科. 基于正态分布区间数的逆向云新算法[J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(10): 2021-2026.
(Yu S W, Shi Z K. New algorithm of backward cloud based on normal interval number[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2011, 31(10): 2021-2026.)
- [15] 龚艳冰, 张继国. 基于正态云模型和熵权的人口发展现代化程度综合评价[J]. *中国人口资源与环境*, 2012, 22(1): 138-143.
(Gong Y B, Zhang J G. Comprehensive assessment on population development degree of modernization based on normal cloud model and entropy weight[J]. *China Population Resources and Environment*, 2012, 22(1): 138-143.)
- [16] 周启刚, 张晓媛, 王兆林. 基于正态云模型的三峡库区土地利用生态风险评价[J]. *农业工程学报*, 2014, 30(23): 289-297.
(Zhou Q G, Zhang X Y, Wang Z L. Land use ecological risk evaluation in Three Gorges Reservoir area based on normal cloud model[J]. *Trans of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2014, 30(23): 289-297.)
- [17] Niu D X, Fan L L. Technology feasibility evaluation of grid-connected distributed generation based on cloud model[J]. *Systems Engineering Procedia*, 2012, 4(II): 305-313.
- [18] 张杨, 严金明, 江平, 等. 基于正态云模型的湖北省土地资源生态安全评价[J]. *农业工程学报*, 2013, 29(22): 252-258.
(Zhang Y, Yan J M, Jiang P, et al. Normal cloud model based evaluation of land resources ecological security in Hubei province[J]. *Trans of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2013, 29(22): 252-258.)
- [19] Yang X J, Yan L L, Zeng L. How to handle uncertainties in AHP: The cloud delphi hierarchical analysis[J]. *Information Sciences*, 2013, 222(2): 384-404.
- [20] 王坚强, 杨恶恶. 基于蒙特卡罗模拟的直觉正态云多准则群决策方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(11): 2859-2865.
(Wang J Q, Yang W E. Multiple criteria group decision making method based on intuitionistic normal cloud by Monte Carlo simulation[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2013, 33(11): 2859-2865.)
- [21] Wang J Q, Wang P, Wang J, et al. Atanassov's interval-valued intuitionistic linguistic multicriteria group decision-making method based on the trapezium cloud model[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2015, 23(3): 542-554.
- [22] Wang J Q, Lu P, Zhang H Y, et al. Method of multi-criteria group decision-making based on cloud aggregation operators with linguistic information[J]. *Information Sciences*, 2014, 274(8): 177-191.
- [23] 夏登友, 钱新明, 康青春, 等. 基于云模型的应急决策方法[J]. *北京科技大学学报*, 2014, 36(7): 972-978.
(Xia D Y, Qian X M, Kang Q C, et al. Emergency decision-making method based on the cloud model[J]. *J of University of Science and Technology Beijing*, 2014, 36(7): 972-978.)
- [24] 张龙昌, 杨艳红, 赵绪辉. 基于云模型的SaaS决策方法[J]. *电子学报*, 2015, 43(5): 987-992.
(Zhang L C, Yang Y H, Zhao X H. SaaS decision-making method based on cloud model[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(5): 987-992.)
- [25] Wu Y N, Chen K F, Zeng B X, et al. Cloud-based decision framework for waste-to-energy plant site selection—A case study from China[J]. *Waste Management*, 2016, 48(2): 593-603.
- [26] 徐改丽, 吕跃进. 基于正态分布区间数的多属性决策方法[J]. *系统工程*, 2011, 29(9): 120-123.
(Xu G L, Lv Y J. Approach of multi-attribute decision-making based on normal distribution interval number[J]. *Systems Engineering*, 2011, 29(9): 120-123.)

(责任编辑: 郑晓蕾)