第 32 卷 第 4 期
2017 年 4 月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.32 No.4
Apr. 2017

文章编号: 1001-0920(2017)04-0681-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.0115

基于满意度的区间型多目标合作对策求解模型

洪防璇[1,2†], 李登峰[2]

(1. 福州大学 至诚学院，福州 350002；2. 福州大学 经济与管理学院，福州 350002)

摘　要: 针对效用函数可能具有嵌套、重叠和(或)包含关系的区间型多目标合作对策求解问题,提出两阶段非线性规划模型和方法. 考虑实际决策问题中的多目标因素,定义基于满意度的区间数排序关系及区间型多目标合作对策的区间值核心解概念,进而构建多目标两阶段非线性规划求解模型,并给出二分法的求解步骤. 最后,通过实例说明所提出模型和方法的可行性和适用性.

关键词: 合作对策；区间值核心；区间数排序；二分法

中图分类号: F272　　**文献标志码:** A

Solution models for interval-valued multiobjective cooperative games based on satisfactory degree

HONG Fang-xuan[1,2†], *LI Deng-feng*[2]

(1. Zhicheng College，Fuzhou University，Fuzhou 350002，China；2. School of Economics and Management，Fuzhou University，Fuzhou 350002，China)

Abstract: With regard to a solution problem of the interval-valued multiobjective cooperative games with payoffs of inclusion and/or overlap relations, the two-phase nonlinear programming models and method are proposed. In view of the multiobjective factors in the real decision problem, the relation of interval ranking and the concept of interval-valued cores of interval-valued multiobjective cooperative games based on the satisfactory degree are defined. Hereby, the multiobjective two-phase nonlinear programming solution models and corresponding bisection steps are proposed. Finally, the feasibility and applicability of the models and method are illustrated by a numerical example.

Keywords: cooperative game；interval core；interval ranking；bisection method

0 引　言

合作对策在多个领域得到了广泛的应用[1],然而真正实施时,却发现单目标合作对策下的解往往并不令人满意. 这可能是由于在实际问题中,单目标下构建的模型经常没有综合考虑影响决策制定的内外部环境的次级或冲突性目标. 目前,越来越多的学者开始探讨现实应用问题中的这一类多目标合作对策问题[2-3]. 在这类对策中,每个联盟的支付函数是衡量多个准则或多个目标的多维向量. 同时,由于决策主体的信息不完全和不确定性以及行为的复杂性,联盟支付值往往很难精确获得,通常只能给出大致的估计范围,即表示为区间模糊数,由此产生了区间型多目标合作对策问题. Tanino[4] 考虑了一类具有结盟受限的多目标合作对策及其核心解;谭春桥等[5] 提出了一类具有区间联盟值对策的Shapley值;孟凡永等[6-7] 基于区间数 Hukuhara 差,解决了区间型合作对策问题和具有联盟结构的区间型合作对策问题. 这些研究主要是建立在传统的区间数排序方法上,如Moore法[8] 和LR法[9]. 这种传统的区间数排序方法相对严格,仅仅考虑了严格大于或相交的关系,而忽略了区间数可能存在嵌套、重叠和(或)包含等关系. 然而,在现实问题中,各个局中人可能以一定的满意度接受这种嵌套、重叠和(或)包含关系的联盟支付值(即区间数)的排序.

收稿日期: 2016-01-20；**修回日期:** 2016-06-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71231003, 71171055)；高等学校博士学科点专项科研基金项目 (20113514110009)；教育部新世纪优秀人才支持计划项目 (NCET-10-0020)；福建省社会科学规划项目 (FJ2015B185)；福建省中青年教师教育科研项目 (JA13392S)；福建省高校杰出青年科研人才培育计划项目 (闽教科 [2015]54 号)；福建省高校科技创新团队支持计划项目 (闽教科 [2012]3 号).

作者简介: 洪防璇 (1984−), 女, 教师, 博士生, 从事经济管理决策与对策的研究；李登峰 (1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事经济管理决策与对策等研究.

†通讯作者. E-mail: hongfangxuan-2@163.com

本文通过引入区间数排序指标满意度,定义区间数大小排序方法,据此给出区间型多目标合作对策的区间值核心解概念,构建多目标规划模型及其两阶段多目标求解方法,并以供应链上企业产品合作创新利益分配的实例加以验证和分析.

1 预备知识

1.1 区 间 数

把区间数界定为实数集R中的有限闭区间数,常用$\hat{a}$表示,即$\hat{a}=[\underline{a},\bar{a}]$,其中$\bar{a}$和$\underline{a}$分别表示区间数$\hat{a}$的上限和下限,且满足$-\infty<\underline{a}\leqslant\bar{a}<+\infty$. 区间数$\hat{a}$也可表示为

$$\hat{a}=\langle m(\hat{a}),r(\hat{a})\rangle.$$

其中: $m(\hat{a})=(\bar{a}+\underline{a})/2$是区间数$\hat{a}$的中间值, $r(\hat{a})=(\bar{a}-\underline{a})/2$是区间数$\hat{a}$长度的一半. 若$r(\hat{a})=0$,即$\underline{a}=\bar{a}$,则$\hat{a}$退化为实数,因此,实数为一种特殊的区间数.

设$\hat{a}=[\underline{a},\bar{a}]$和$\hat{b}=[\underline{b},\bar{b}]$为两个区间数,$\lambda$是实数. 规定它们的运算规则如下:

1) $\hat{a}+\hat{b}=[\underline{a}+\underline{b},\bar{a}+\bar{b}]$.

2) $\lambda\hat{a}=\begin{cases}[\lambda\underline{a},\lambda\bar{a}],\ \lambda\geqslant 0;\\ [\lambda\bar{a},\lambda\underline{a}],\ \lambda<0.\end{cases}$

同理,区间数的运算规则也可表示为:

1') $\hat{a}+\hat{b}=\langle m(\hat{a}),r(\hat{a})\rangle+\langle m(\hat{b}),r(\hat{b})\rangle=\langle m(\hat{a})+m(\hat{b}),r(\hat{a})+r(\hat{b})\rangle.$

2') $\lambda\hat{a}=\lambda\langle m(\hat{a}),r(\hat{a})\rangle=\langle\lambda m(\hat{a}),|\lambda|r(\hat{a})\rangle=\begin{cases}\langle\lambda m(\hat{a}),\lambda r(\hat{a})\rangle,\ \lambda\geqslant 0;\\ \langle\lambda m(\hat{a}),-\lambda r(\hat{a})\rangle,\ \lambda<0.\end{cases}$

1.2 区间数大小排序

区间数大小排序是一个很复杂的问题, Moore[8]、Ishihuchi等[9]、Nakahara等[10]、Senguta等[11]、Li等[12]、张全等[13]和Fei等[14]做了这方面的研究. 目前,关于区间型合作对策的多数文献主要采用Moore[8]和Ishihuchi[9]的观点,尤其是LR法中的区间数排序. LR法认为,只要满足$\underline{a}\leqslant\underline{b}$且$\bar{a}\leqslant\bar{b}$,则区间数$\hat{a}$不大于$\hat{b}$,即$\hat{a}\leqslant\hat{b}$. 这种区间数排序的定义过于严格,忽略了区间数之间可能存在嵌套、重叠和(或)包含关系的一般情况. 因此,受Li等[12]定义的区间数模糊偏序关系的启发,本文提出基于隶属函数(满意度)的区间数大小比较排序观点,将区间数的排序关系分为$\hat{a}$不大于$\hat{b}$、$\hat{a}$不小于$\hat{b}$和$\hat{a}$等于$\hat{b}$三种,分别记为$\hat{a}\leqslant_I\hat{b}$、$\hat{a}\geqslant_I\hat{b}$和$\hat{a}=_I\hat{b}$.

定义1 设$\hat{a}=[\underline{a},\bar{a}]$和$\hat{b}=[\underline{b},\bar{b}]$为两个区间数,模糊关系"$\hat{a}\leqslant_I\hat{b}$"成立的隶属函数可定义为

$$\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})=\begin{cases}1,\ \bar{a}<\underline{b};\\ 1^-,\ \underline{a}<\underline{b}\leqslant\bar{a}<\bar{b};\\ \dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{2(r(\hat{b})-r(\hat{a}))},\ \underline{b}\leqslant\underline{a}\leqslant\bar{a}\leqslant\bar{b}\text{且}r(\hat{b})>r(\hat{a});\\ 0.5,\ r(\hat{a})=r(\hat{b})\text{且}\underline{a}=\underline{b}.\end{cases}\tag{1}$$

其中: 1^-是一个小于1的模糊数,表示区间数$\hat{a}$弱不大于$\hat{b}$;符号"$\leqslant_I$"表示区间数的大小关系,类似于实数中的"$\leqslant$"符号,表示为"本质上不大于".

显然, $0\leqslant\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})\leqslant 1$,将$\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})$表示为$\hat{a}\leqslant_I\hat{b}$的满意度. 当$\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})=0$时, $\hat{a}\leqslant_I\hat{b}$不被接受(即$\hat{a}\leqslant_I\hat{b}$不成立,也即$\hat{a}\geqslant_I\hat{b}$);当$0<\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})<1$时,表明局中人接受$\hat{a}\leqslant_I\hat{b}$的满意程度介于$0\sim1$之间;当$\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})=1$时,局中人完全满意地接受$\hat{a}\leqslant_I\hat{b}$,即局中人坚信$\hat{a}\leqslant_I\hat{b}$是对的.

同样,对于$\hat{a}$不小于$\hat{b}$,即模糊关系"$\hat{a}\geqslant_I\hat{b}$"成立的隶属函数可定义为$\phi(\hat{a}\geqslant_I\hat{b})=1-\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})$,具体可表示为

$$\phi(\hat{a}\geqslant_I\hat{b})=\begin{cases}0,\ \bar{a}<\underline{b};\\ 0^+,\ \underline{a}<\underline{b}\leqslant\bar{a}<\bar{b};\\ \dfrac{\underline{a}-\underline{b}}{2(r(\hat{b})-r(\hat{a}))},\ \underline{b}\leqslant\underline{a}\leqslant\bar{a}\leqslant\bar{b}\text{且}r(\hat{b})>r(\hat{a});\\ 0.5,\ r(\hat{a})=r(\hat{b})\text{且}\underline{a}=\underline{b}.\end{cases}\tag{2}$$

其中0^+是一个大于0的模糊数,表示区间数$\hat{a}$弱不小于$\hat{b}$.

不难证明,区间数排序指标ϕ具有如下性质:

1) $0\leqslant\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})\leqslant 1$.

2) $\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{a})=0.5$.

3) $\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})+\phi(\hat{a}\geqslant_I\hat{b})=1$.

4) 对于任意区间数$\hat{a}$、$\hat{b}$和$\hat{c}$,如果$\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})\geqslant 0.5$且$\phi(\hat{b}\leqslant_I\hat{c})\geqslant 0.5$,则$\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{c})\geqslant 0.5$;若$\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{b})\leqslant 0.5$且$\phi(\hat{b}\leqslant_I\hat{c})\leqslant 0.5$,则$\phi(\hat{a}\leqslant_I\hat{c})\leqslant 0.5$.

性质4)表示,定义1给出的区间数排序指标具有传递性.

若$\bar{a}=\bar{b}$和$\underline{a}=\underline{b}$同时成立,则称$\hat{a}$等于$\hat{b}$,记为$\hat{a}=_I\hat{b}$.

2 区间型多目标合作对策建模及求解

2.1 问题描述

区间型多目标合作对策通常表示为$\langle N,\hat{v}\rangle$,其中$N=\{1,2,\cdots,n\}$表示为合作对策的局中人集合,把

集合N中任意非空子集$S \subseteq N$称为合作对策的联盟,$\hat{v}_k(S): 2^n \rightarrow \Re^m$ 表示对于区间型多目标合作对策的任何一个联盟S对应目标$O_k(k=1,2,\cdots,m)$的支付函数值为$\hat{v}_k(S)$. 其中: $\hat{v}_k(S) = [\underline{v}_k(S), \bar{v}_k(S)]$, $\bar{v}_k(S)$和$\underline{v}_k(S)$是$\hat{v}_k(S)$的上限和下限, 且满足$\hat{v}_k(S) \in \Re^m$为闭区间数, 同时给定$\hat{v}_k(\varnothing) = [0,0]$. 当$S = \{i\}$时(通常将$\hat{v}_k(\{i\})$简记为$\hat{v}_k(i)$), $\hat{v}_k(i)$表示局中人i不与任何人合作(结盟)时的支付值; 当$S = N$时, $\hat{v}_k(N)$表示n个局中人合作的支付值, 即所有局中人都参与合作.

将所有区间型多目标合作对策记为IG^n. 当所有区间数退化为实数时, 即$\underline{v}_k(S) = \bar{v}_k(S)$时, 区间型多目标合作对策$\langle N, \hat{v}\rangle$就退化为传统的多目标合作对策$\langle N, v\rangle$, 其中$\hat{v}_k(S) = v_k(S)$. 这意味着传统的多目标合作对策是一类特殊的区间型多目标合作对策. Alparslan-Gök等[15]证明, 如果所有的区间型合作对策$\langle N, \hat{v}\rangle$的区间数都退化为实数, 则对于相应的退化后的传统合作对策, 强均衡简化为均衡, 强不均衡简化为不均衡.

2.2 区间型多目标合作对策的区间值核心解概念

用$\hat{x}_{ik}$表示局中人i对应目标O_k的支付值, $\hat{x}_k = (\hat{x}_{1k}, \hat{x}_{2k}, \cdots, \hat{x}_{nk})$为对应目标$O_k$的区间型支付向量. 对于任何一个非空联盟$S \in 2^n\{\varnothing\}$, $\sum\limits_{i\in S}\hat{x}_{ik} = \Big[\sum\limits_{i\in S}\underline{x}_{ik}, \sum\limits_{i\in S}\bar{x}_{ik}\Big] \in \Re$.

定义2 对于任何一个区间型多目标合作对策$(N, \hat{v})$, 区间值分配$I(\hat{v})$满足

$$I(\hat{v}) = \Big\{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_m) \in \Re^{nm}\Big|\sum_{i\in N}\hat{x}_{ik} =_I \hat{v}_k(N), \hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(i)\Big\}.$$

其中: $\sum\limits_{i\in N}\hat{x}_{ik} =_I \hat{v}_k(N)$为有效性条件, 即对于任何一个目标$O_k$, 所有局中人的分配值总和必须等于最大联盟$N$的支付值, 等价于$\sum\limits_{i\in N}\bar{x}_{ik} = \bar{v}_k(N)$和$\sum\limits_{i\in N}\underline{x}_{ik} = \underline{v}_k(N)$; $\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(i)$为个体理性条件, 即对于任何一个目标$O_k$, 任何一个局中人的分配必须不小于他自己单干时的支付值.

定义3 区间型多目标合作对策$(N, \hat{v})$的核心是所有不被优超的区间型支付向量的集合.

记区间值核心$C(\hat{v})$为

$$C(\hat{v}) = \Big\{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_m) \in \Re^{nm}\Big|\sum_{i\in N}\hat{x}_{ik} =_I \hat{v}_k(N), \sum_{i\in S, S\subset N}\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S)\Big\}.$$

其中: $\sum\limits_{i\in N}\hat{x}_{ik} =_I \hat{v}_k(N)$为有效性条件, $\sum\limits_{i\in S, S\subset N}\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S)$是区间型支付向量的稳定性条件. 由于单个局中人可视为一个联盟, 即联盟$S = \{i\}$时, $\sum\limits_{i\in S, S\subset N}\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S)$等价为$\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(i)$, 不难推导出对于任何$\hat{v} \in \mathrm{IG}^n$, $C(\hat{v}) \subseteq I(\hat{v})$.

由此可见, 所有满足条件$\sum\limits_{i\in S, S\subset N}\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S)$和$\sum\limits_{i\in N}\hat{x}_{ik} =_I \hat{v}_k(N)$的区间型支付向量的集合为区间型多目标合作对策$(N, \hat{v})$的区间值核心, 其中局中人$i$的分配值为$\hat{x}_{ik} = [\underline{x}_{ik}, \bar{x}_{ik}]$.

根据定义3, $C(\hat{v})$的求解可以转化为下述区间型不等式组求解:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i\in S, S\subset N}\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S),\\ \sum\limits_{i\in N}\hat{x}_{ik} =_I \hat{v}_k(N),\\ \bar{x}_{ik} \geqslant \underline{x}_{ik},\ i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{3}$$

然而, 式(3)的求解涉及到区间数的运算及排序, 且局中人对不同目标的偏好倾向不同, 下节将继续探讨这一问题.

2.3 区间值核心求解模型构建

根据定义1关于区间数排序满意度ϕ值的公式, 建立下述不等式组, 进而用于构建区间型多目标合作对策的非线性规划模型.

令$\alpha \in [0,1]$表示为区间数不等式约束可允许接受的满意度, 根据定义1, 当区间数$\underline{b} \leqslant \underline{a} \leqslant \bar{a} \leqslant \bar{b}$且$r(\hat{b}) > r(\hat{a})$时, 不等式约束$\hat{a} \leqslant_I \hat{b}$的等价形式被定义为

$$\begin{cases}\bar{a} \leqslant \bar{b},\\ \underline{a} \geqslant \underline{b},\\ \phi(\hat{a} \leqslant_I \hat{b}) \geqslant \alpha.\end{cases} \tag{4}$$

根据式(1), 不等式组(4)可转化为

$$\begin{cases}\bar{a} \leqslant \bar{b},\\ \underline{a} \geqslant \underline{b},\\ \dfrac{\bar{b} - \bar{a}}{2(r(\hat{b}) - r(\hat{a}))} \geqslant \alpha.\end{cases} \tag{5}$$

同理, 根据定义1, 区间数不等式约束$\hat{a} \geqslant_I \hat{b}$的等价形式被定义为

$$\begin{cases}\underline{a} \geqslant \underline{b},\\ \bar{a} \leqslant \bar{b},\\ \phi(\hat{a} \geqslant_I \hat{b}) \geqslant \alpha.\end{cases} \tag{6}$$

不等式组(6)可转化为

$$\begin{cases}\underline{a} \geqslant \underline{b}, \\ \bar{a} \leqslant \bar{b}, \\ \dfrac{\underline{a}-\underline{b}}{2(r(\hat{b})-r(\hat{a}))} \geqslant \alpha.\end{cases} \tag{7}$$

同理,当 $\bar{a} < \underline{b}, \underline{a} < \underline{b} \leqslant \bar{a} < \bar{b}$ 或 $r(\hat{a}) = r(\hat{b})$ 且 $\underline{a} = \underline{b}$ 时,根据定义1,区间数不等式 $\hat{a} \leqslant_I \hat{b}$ 可转化为一系列不等式约束条件求解. 因此,区间型多目标合作对策 $C(\hat{v})$ 的求解可以转化为以下几种情况探讨.

1) 当区间数 $\underline{v}_k(S) \leqslant \sum\limits_{i\in S}\underline{x}_{ik} \leqslant \sum\limits_{i\in S}\bar{x}_{ik} \leqslant \bar{v}_k(S)$ 且 $r(\hat{v}_k(S)) > r\Big(\sum\limits_{i\in S}\hat{x}_{ik}\Big)$ 时,对于任何一个联盟 $S\subset N$,令 $\alpha_{Sk} = \phi\Big(\sum\limits_{i\in S}\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S)\Big)$ 表示为区间数不等式 $\sum\limits_{i\in S}\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S)$ 允许接受的满意度.

根据定义3,可构建区间型多目标合作对策的两阶段求解模型.

第1阶段,根据式(3),可先构建下述非线性规划模型:

$$\max\ \{\max_{1\leqslant k\leqslant m}\min_{S\subset N}\{\alpha_{Sk}\}\};$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{i\in S,S\subset N}\underline{x}_{ik} \geqslant \underline{v}_k(S), \\ \sum\limits_{i\in S,S\subset N}\bar{x}_{ik} \leqslant \bar{v}_k(S), \\ \alpha_{Sk} = \phi\Big(\sum\limits_{i\in S,S\subset N}\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S)\Big), \\ \sum\limits_{i\in N}\hat{x}_{ik} =_I \hat{v}_k(N), \\ \bar{x}_{ik} \geqslant \underline{x}_{ik},\ i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{8}$$

令 $\beta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\min\limits_{S\subset N}\{\alpha_{Sk}\}$,则 $0\leqslant\beta\leqslant 1$. 式(8)通过数学处理,可以转化为下述非线性规划模型:

$$\max\ \{\beta\};$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{i\in S,S\subset N}\underline{x}_{ik} \geqslant \underline{v}_k(S), \\ \sum\limits_{i\in S,S\subset N}\bar{x}_{ik} \leqslant \bar{v}_k(S), \\ (1-\beta)\sum\limits_{i\in S}\underline{x}_{ik} + \beta\sum\limits_{i\in S}\bar{x}_{ik} \geqslant \\ (1-\beta)\underline{v}_k(S) + \beta\bar{v}_k(S), \\ \sum\limits_{i\in N}\bar{x}_{ik} = \bar{v}_k(N), \\ \sum\limits_{i\in N}\underline{x}_{ik} = \underline{v}_k(N), \\ \bar{x}_{ik} \geqslant \underline{x}_{ik},\ i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2\cdots,m, \\ 0\leqslant\beta\leqslant 1.\end{cases} \tag{9}$$

其中:β、$\bar{x}_{ik}$ 和 $\underline{x}_{ik}(i=1,2,\cdots,n, k=1,2,\cdots,m)$ 为决策变量.

受二分法[16]思想的启发,设计出非线性规划模型(9)的求解步骤,将式(9)转化为线性规划问题进行求解,并获得第1阶段模型在可接受的精确度下的全局最优解 $(\beta^*, \hat{x}^*)$. 具体算法及步骤见下文2.4节内容.

第2阶段,在充分考虑现实环境中局中人对不同目标的偏好程度差异的基础上,将局中人的偏好程度转化为目标权重值,并引入目标函数中,可以构建下述数学规划模型:

$$\max\ \Big\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{S\subset N}\omega_k\alpha_{Sk}\Big\};$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{i\in S,S\subset N}\underline{x}_{ik} \geqslant \underline{v}_k(S), \\ \sum\limits_{i\in S,S\subset N}\bar{x}_{ik} \leqslant \bar{v}_k(S), \\ \alpha_{Sk} = \phi\Big(\sum\limits_{i\in S,S\subset N}\hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S)\Big), \\ \alpha_{Sk} \geqslant \beta^*, S\subset N, \\ \sum\limits_{i\in N}\bar{x}_{ik} = \bar{v}_k(N), \\ \sum\limits_{i\in N}\underline{x}_{ik} = \underline{v}_k(N), \\ \bar{x}_{ik} \geqslant \underline{x}_{ik},\ i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{10}$$

其中:α_{Sk}、$\bar{x}_{ik}$ 和 $\underline{x}_{ik}(i=1,2,\cdots,n,\ S\subset N,\ k=1,2,\cdots,m)$ 是决策变量;ω_k 是目标 O_k 的权重值,在实际情境中是给定的,且符合规范化条件,即 $\omega_k \geqslant 0(k=1,2,\cdots,m)$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{m}\omega_k = 1$.

对式(10)进行数学整理,可转化为下述非线性规划模型:

$$\max\ \Big\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{S\subset N}\omega_k\alpha_{Sk}\Big\};$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{i\in S,S\subset N}\underline{x}_{ik} \geqslant \underline{v}_k(S), \\ \sum\limits_{i\in S,S\subset N}\bar{x}_{ik} \leqslant \bar{v}_k(S), \\ (1-\alpha_{Sk})\sum\limits_{i\in S}\underline{x}_{ik} + \alpha_{Sk}\sum\limits_{i\in S}\bar{x}_{ik} = \\ (1-\alpha_{Sk})\underline{v}_k(S) + \alpha_{Sk}\bar{v}_k(S), \\ \sum\limits_{i\in N}\bar{x}_{ik} = \bar{v}_k(N), \\ \sum\limits_{i\in N}\underline{x}_{ik} = \underline{v}_k(N), \\ \alpha_{Sk} \geqslant \beta^*,\ S\subset N, \\ \bar{x}_{ik} \geqslant \underline{x}_{ik},\ i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{11}$$

其中:α_{Sk}、$\bar{x}_{ik}$ 和 $\underline{x}_{ik}(i=1,2,\cdots,n,\ S\subset N,\ k=$

$1,2,\cdots,m)$ 是决策变量.

通过给定目标权重 ω_k 求解式(11), 可获得解 $(\alpha^*_{Sk},\hat{x}^{**})$. 其中 $\hat{x}^{**}$ 表示为区间型多目标合作对策局中人最大满意度 α^*_{Sk} 下的区间值核心 $C(\hat{v})$ 的元素. 显然, 当 $\alpha^*_{Sk}=1$ 时, 可以获得对应目标 O_k 联盟 S 满意度为1的区间值核心 $C(\hat{v})$ 的元素.

2) 类似地, 对于 $\sum\limits_{i\in S}\bar{x}_{ik}<\underline{v}_k(S)$、$\sum\limits_{i\in S}\underline{x}_{ik}<\underline{v}_k(S)\leqslant\sum\limits_{i\in S}\bar{x}_{ik}<\bar{v}_k(S)$、$r\Big(\sum\limits_{i\in S}\hat{x}_{ik}\Big)=r(\hat{v}_k(S))$ 且 $\sum\limits_{i\in S}\underline{x}_{ik}=\underline{v}_k(S)(S\subset N,\ k=1,2,\cdots,m)$ 三种情况, 可做同样探讨.

2.4　二分法求解步骤

受二分法[16] 思想的启发, 在给定的精确度 $\varepsilon\in[0,1]$ 下, 非线性规划问题可以转化为线性规划问题进行求解, 因此设计了式(9)的二分法求解步骤, 进而获得第1阶段式(9)的全局最优解 $(\beta^*,\hat{x}^*)$.

显然, 当 $\beta^*=1$ 时, 若第1阶段式(9)存在可行解, 则目标函数值为1.

二分法的求解过程可归纳为以下几个步骤:

Step 1: 令 $t=0$, 取 $\bar{\beta}_t=1$, 则非线性规划问题(9)可以转化为线性规划问题. 通过LINGO软件求解, 若式(9)存在可行解 $\hat{x}^*_t$, 则 $\beta^*=\bar{\beta}_t=1$ 是式(9)的最优目标函数值, 算法停止; 相反, 如果不存在可行解, 则进行Step 2.

Step 2: 令 $\underline{\beta}_t=0$, 通过LINGO软件求解式(9), 若(9)不存在可行解, 则(9)无解, 算法停止; 相反, 如果式(9)存在可行解 $\hat{x}^*_t$, 则可推断式(9)的最优目标函数值介于 $0\sim1$ 之间, 即 $\beta^*\in[0,1)$, 进行Step 3.

Step 3: 根据二分法的思想, 令 $m(\hat{\beta}_t)$ 取区间数 $\hat{\beta}_t=[\underline{\beta}_t,\bar{\beta}_t]$ 的上限 $\bar{\beta}_t$ 和下限 $\underline{\beta}_t$ 的中间值, 即 $m(\hat{\beta}_t)=(\underline{\beta}_t+\bar{\beta}_t)/2=(0+1)/2=0.5$, 通过LINGO软件求解式(9). 若式(9)不存在可行解, 则可推断式(9)的最优目标函数值介于 $\underline{\beta}_t$ 与 $m(\hat{\beta}_t)$ 之间, 即 $\beta^*\in[\underline{\beta}_t,m(\hat{\beta}_t))=[0,0.5)$, 因此, 区间数 $\hat{\beta}_t$ 的取值范围缩小, 上限 $\bar{\beta}_{t+1}=m(\hat{\beta}_t)=0.5$, 下限 $\underline{\beta}_{t+1}=\underline{\beta}_t=0$, 进行Step 4; 反之, 若式(9)存在可行解, 则可推断式(9)的最优目标函数值介于 $m(\hat{\beta}_t)$ 与 $\bar{\beta}_t$ 之间, 即 $\beta^*\in[m(\hat{\beta}_t),\bar{\beta}_t)=[0.5,1)$, 因此, 区间数 $\hat{\beta}_t$ 的取值范围进一步缩小, 上限 $\bar{\beta}_{t+1}=\bar{\beta}_t=1$, 下限 $\underline{\beta}_{t+1}=m(\hat{\beta}_t)=0.5$, 进行Step 4.

Step 4: 令 $t:=t+1$, 在新区间数 $\hat{\beta}_t=[\underline{\beta}_t,\bar{\beta}_t]$ 中重复Step 3, 反复迭代 m_0 次, 进行Step 5.

Step 5: 当反复 m_0 次迭代后的区间数 $\hat{\beta}_{m_0}=[\underline{\beta}_{m_0},\bar{\beta}_{m_0}]$ 的区间长度小于给定的精确度 ε 时, 令 $\beta^*=(\underline{\beta}_{m_0}+\bar{\beta}_{m_0})/2$ 为区间数 $\hat{\beta}_{m_0}$ 的中间值, 即 β^* 为式(9)在可接受的精确度 ε 下的最优目标函数值.

3　算例分析

某电子产品供应链的3家厂商(即局中人) p_1、p_2 和 p_3 拟合作开发某一新型电子产品. 每个厂商拥有各自不同的优势资源. 所有厂商在合作创新决策时, 不仅考虑短期利润的分配, 而且还会考虑其他诸多因素, 例如技术溢出程度、质量改进、成本节约、生产效率、产品产业化时间等. 为方便考虑, 本例仅考虑两个目标, 短期利润和技术溢出程度. 由于信息的不完全和不确定性, 这3家厂商的管理层经常无法准确预测产品合作创新关于这两个目标的支付函数值. 厂商往往只能估计最乐观和最悲观环境下的数值, 因此, 区间数就用来表示产品合作创新的支付函数值. 3家厂商由于受到资源的束缚, 都难以自行研发生产.

由以上信息知, 可将这个问题视为一个具有联盟支付函数为区间数的两目标三人合作对策问题, 厂商 p_1、p_2 和 p_3 分别表示为合作对策的局中人1、2和3. 假设这一区间型两目标三人合作对策 $\langle\{1,2,3\},\hat{v}\rangle$ 的联盟特征函数表示为

$$\begin{cases}\hat{v}(1,2)=([22,30],[40,60])^{\mathrm{T}},\\ \hat{v}(1,3)=([24,28],[20,30])^{\mathrm{T}},\\ \hat{v}(2,3)=([20,32],[16,44])^{\mathrm{T}},\\ \hat{v}(1,2,3)=([40,44],[61,66])^{\mathrm{T}},\\ \hat{v}(1)=\hat{v}(2)=\hat{v}(3)=([0,0],[0,0])^{\mathrm{T}}.\end{cases}$$

其中 $\hat{v}(1,2)=([22,30],[40,60])^{\mathrm{T}}$ 中的 $\hat{v}_1(1,2)=[22,30]$ 和 $\hat{v}_2(1,2)=[40,60]$ 分别表示为联盟 $\{1,2\}$ 对应目标短期利润和技术溢出程度的特征函数值.

3.1　计算分析

根据式(9)可以构建第1阶段的非线性规划模型. 利用提出的二分法求解步骤, 非线性规划模型可缩小第1阶段目标函数值 β 的取值范围, 即 $\beta^*\in[0.875,\ 0.875\,062\,5)$. 因此, 在可接受的精确度下, 第1阶段式(9)的全局最优解为 $\beta^*=0.875$, $\hat{x}^*_1=([9.5,13.5],[19,24])^{\mathrm{T}}$, $\hat{x}^*_2=([16,16],[36,36])^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{x}^*_3=([14.5,14.5],[6,6])^{\mathrm{T}}$.

根据式(11)可以构建第2阶段的非线性规划模型. 假定这3家厂商 p_1、p_2 和 p_3 一致认为在合作收益分配过程中短期利润比技术溢出程度来的更重要, 并赋予 $\omega_1=0.8$ 和 $\omega_2=0.2$.

利用LINGO软件求解第2阶段非线性规划模型, 可以获得第2阶段的可行解 $(\alpha^*_{Sk},\hat{x}^{**})$. 其中: $\alpha^*_{\{1\}1}=$

$1, \alpha^*_{\{2\}1} = 1, \alpha^*_{\{3\}1} = 1, \alpha^*_{\{1,2\}1} = 0.875,\ \alpha^*_{\{1,3\}1} = 0.875, \alpha^*_{\{2,3\}1} = 0.875, \alpha^*_{\{1\}2} = 1, \alpha^*_{\{2\}2} = 1, \alpha^*_{\{3\}2} = 1, \alpha^*_{\{1,2\}2} = 1, \alpha^*_{\{1,3\}2} = 1, \alpha^*_{\{2,3\}2} = 0.929,\ \hat{x}^{**}_1 = ([12.29, 13.101], [19, 24])^{\mathrm{T}}, \hat{x}^{**}_2 = ([13.21, 16.399], [36, 36])^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{x}^{**}_3 = ([14.5, 14.5], [6, 6])^{\mathrm{T}}$. 即, 可以获得局中人关于短期利润目标最大满意度为α^*_{S1}和关于技术溢出程度目标最大满意度为α^*_{S2}的区间型三人合作对策区间值核心$C(\hat{v})$的元素$\hat{x}^{**}$. 换言之, 如果这3家厂商对区间数不等式$\sum\limits_{i\in S, S\subset N} \hat{x}_{ik} \geqslant_I \hat{v}_k(S)$的满意度不大于$\alpha^*_{Sk}$, 则这个区间型两目标三人合作对策的区间值核心是存在的, 因此这3家厂商极有可能选择合作创新.

当电子产品供应链的这3家厂商对短期利润和技术溢出程度的偏好和态度不同时, 即$\omega_k \in [0, 1](k = 1, 2), \sum\limits_{k=1}^{2} \omega_k = 1$取值不同, 依然可以利用上述非线性规划模型(11)进行区间型两目标三人合作对策的区间值核心求解, 结果如表1所示.

表1 具有不同目标偏好的区间型两目标三人合作对策的区间值核心

(ω_1, ω_2)	$\alpha^*_{\{i\}k}$	$\alpha^*_{\{1,2\}1}$	$\alpha^*_{\{1,3\}1}$	$\alpha^*_{\{2,3\}1}$	$\alpha^*_{\{1,2\}2}$	$\alpha^*_{\{1,3\}2}$	$\alpha^*_{\{2,3\}2}$	$(\hat{x}^{**}_1)^{\mathrm{T}}$	$(\hat{x}^{**}_2)^{\mathrm{T}}$	$(\hat{x}^{**}_3)^{\mathrm{T}}$
(0, 1)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(0.1, 0.9)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(0.2, 0.8)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(0.3, 0.7)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(0.4, 0.6)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(0.5, 0.5)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(0.6, 0.4)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(0.7, 0.3)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(0.8, 0.2)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(0.9, 0.1)	1	0.875	0.875	0.875	1	1	0.929	([12.29, 13.101], [19, 24])	([13.21, 16.399], [36, 36])	([14.5, 14.5], [6, 6])
(1, 0)	1	0.875	0.875	0.875	0.908	0.875	1	([12.29, 13.101], [17, 22])	([13.21, 16.399], [36.625, 36.625])	([14.5, 14.5], [7.375, 7.375])

由表1可知, 在不同的ω_k权重(除$\omega = (1, 0)^{\mathrm{T}}$)取值下, 本例的区间型两目标三人合作对策的单个局中人对应的两个目标的满意度均为1, 且区间值核心解已相对达到约束条件的最优值, 数值上呈现相等的状态, 各联盟的满意度相对较高. 同时, 相较于第1阶段式(9)的全局最优解$(\beta^*, \hat{x}^*), \beta^* = 0.875, \hat{x}^*_1 = ([9.5, 13.5], [19, 24])^{\mathrm{T}}, \hat{x}^*_2 = ([16, 16], [36, 36])^{\mathrm{T}}$和$\hat{x}^*_3 = ([14.5, 14.5], [6, 6])^{\mathrm{T}}$, 不难发现, 受目标权重因素的影响, 厂商$p_1$和$p_2$的短期利润分配的取值发生了变化, 厂商$p_1$分得的短期利润的不确定系数降低了, 而厂商$p_2$的不确定系数增加了. 这说明, 在供应链产品合作创新中, 厂商对多个目标及其目标重要性程度的决策会影响到合作的利润分配.

上述结论与现实环境是吻合的, 厂商们在考虑产品合作创新时不仅仅关心短期利润, 而且会考虑合作创新的效应及不同偏好权重下的技术溢出效应. 由于各厂商越来越重视隐形知识和技术信息, 因此在考虑合作创新决策时, 他们会充分考虑上述因素以确保合作成功.

3.2 与LR方法对比

根据式(3), 可以构建如下不等式组:

$$\begin{cases} \hat{x}_{11} + \hat{x}_{21} \geqslant_I [22, 30], \\ \hat{x}_{11} + \hat{x}_{31} \geqslant_I [24, 28], \\ \hat{x}_{21} + \hat{x}_{31} \geqslant_I [20, 32], \\ \hat{x}_{12} + \hat{x}_{22} \geqslant_I [40, 60], \\ \hat{x}_{12} + \hat{x}_{32} \geqslant_I [20, 30], \\ \hat{x}_{22} + \hat{x}_{32} \geqslant_I [16, 44], \\ \hat{x}_{11} + \hat{x}_{21} + \hat{x}_{31} =_I [40, 44], \\ \hat{x}_{12} + \hat{x}_{22} + \hat{x}_{32} =_I [61, 66], \\ \bar{x}_{ik} \geqslant \underline{x}_{ik},\ i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2, \\ \underline{x}_{ik} \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2, \end{cases} \tag{12}$$

其中$\bar{x}_{ik}$和$\underline{x}_{ik}(i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2)$是决策变量.

利用区间数LR排序方法, 即只有当$\underline{a} \geqslant \underline{b}$和$\bar{a} \geqslant \bar{b}$同时满足时, $\hat{a} \geqslant_I \hat{b}$才成立, 于是式(12)可以转化为

一系列不等式组求解. 研究发现, 无法找到同时满足不等式约束(12)的解, 即利用LR方法, 这3家厂商没有产品合作创新的意愿.

3.3 结果分析

显然, 利用传统的区间数LR排序方法, 该算例无可行解; 相反, 通过引入区间数排序的满意度, 则可以获得可行解. 因此不难得知, 传统的LR区间数排序方法要求比较苛刻, 而本文提出的两阶段非线性规划模型及其求解方法则可以获得供应链企业所能接受的最大满意度及其相应的区间值核心可行解, 而且在区间型支付函数嵌套、重叠和(或)包含关系下, 合作对策局中人依然存在合作的机会, 这可以给决策者提供更为科学合理的建议, 较好地补充了传统的区间数排序方法.

4 结 论

基于复杂不确定环境的两阶段非线性规划模型及其二分法求解方法, 不仅考虑了决策者决策时的多个不同目标及其偏好权重, 获得了相应情境下的区间值核心可行解, 而且较好地解决了区间型支付函数嵌套、重叠和(或)包含关系的问题, 补充了传统的区间数排序方法难以处理的情况, 可以更好地解决实际环境中的问题.

然而, 与经典合作对策一样, 区间型合作对策的区间值核心也可能是空集(即并非所有的满意度ϕ值都存在核心), 也可能存在多个解, 而这还需要采用其他方法(例如特殊情况时的图解法)才能求解区间值核心中的所有元素. 区间数也只是模糊数的表现形式之一, 现实生活中还存在其他表示不确定数的形式, 如三角模糊数和梯形模糊数等. 这些问题都有待进一步深入研究.

参考文献(References)

[1] 李登峰. 模糊多目标多人合作决策与对策[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003: 58-61.
(Li D F. Fuzzy multi-objective many person decision makings and games[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003: 58-61.)

[2] Nishizaki I, Sakawa M. Fuzzy and multiobjective games for conflict resolution[M]. Berlin Heidelberg: Physica-Verlag, 2001: 195-198.

[3] Perez F, Gomez T. Multiobjective project portfolio selection with fuzzy constraints[J]. Annals of Operations Research, 2016, 245(1): 7-29.

[4] Tanino T. Multiobjective cooperative games with restrictions on coalitions[C]. Multiobjective Programming and Goal Programming: Theoretical Results and Practical Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009: 167-174.

[5] 谭春桥, 张强. 具有区间联盟值n人对策的Shapley值[J]. 应用数学学报, 2010, 33(2): 193-203.
(Tan C Q, Zhang Q. Shapley value for n-persons games with interval coalition worth[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2010, 33(2): 193-203.)

[6] Meng F Y, Chen X H, Tan C Q. Cooperative fuzzy games with interval characteristic functions[J]. Int J of Operational Research, 2016, 16(1): 1-24.

[7] Meng F Y, Zhang Q, Wang Y. Cooperative fuzzy games with a coalition structure and interval payoffs[J]. Int J of Computational Intelligence Systems, 2013, 6(3): 548-558.

[8] Moore R. Methods and applications of interval analysis[M]. Philadelphia: SIAM, 1979: 9-11.

[9] Ishihuchi H, Tanaka M. Multiobjective programming in optimization of the interval objective function[J]. European J of Operation Research, 1990, 48(2): 219-225.

[10] Nakahara Y, Sasaki M, Gen M. On the linear programming problems with interval coefficients[J]. Computer and Industrial Engineering, 1992, 23(1-4): 301-304.

[11] Senguta A, Pal T K. On comparing interval numbers[J]. European J of Operation Research, 2000, 127(1): 28-43.

[12] Li D F, Nan J X, Zhang M J. Interval programming models for matrix games with interval payoffs[J]. Optimization Methods and Software, 2012, 27(1): 1-16.

[13] 张全, 樊治平, 潘德惠. 区间数多属性决策中一种带有可能度的排序方法[J]. 控制与决策, 1999, 14(6): 703-706.
(Zhang Q, Fan Z P, Pan D H. A ranking approach with possibilities for multiple attribute decision making problems with intervals[J]. Control and Decision, 1999, 14(6): 703-706.)

[14] Fei G, Xie D Y, Zhang Q. Solutions for generalized interval cooperative games[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2015, 28(4): 1553-1564.

[15] Alparslan-Gök S Z, Branzei R, Tijs S H. Cores and stable sets for interval-valued games[J]. Center for Economic Research, 2008, 1: 1-14.

[16] Sikorski K. Bisection is optimal[J]. Numer Math, 1982, 40(1): 111-117.

（责任编辑：李君玲）