

基于余切函数变换的区间灰数预测模型

叶 璟^{1†}, 党耀国¹, 刘 震²

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016; 2. 江南大学 商学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对区间灰数灰色预测问题, 考虑区间灰数序列可能的4种情形, 运用余切函数变换对不同情形的区间灰数序列分别进行处理, 分别建立区间灰数的灰色预测模型, 从而将灰色数据变换技术的应用范围扩展到区间灰数预测领域. 最后, 通过算例和实例分析验证了新模型的实用性和有效性.

关键词: 区间灰数; 函数变换; 数据变换; 灰色预测

中图分类号: N945.1

文献标志码: A

Grey prediction model of interval grey numbers based on cotangent function transformation

YE Jing^{1†}, DANG Yao-guo¹, LIU Zhen²

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. School of Business, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: Focusing on the prediction accuracy of interval grey numbers, grey prediction models based on function transformation of cotangent are established by investigating four typical trends of interval grey numbers sequences respectively. According to different trends of interval grey numbers sequences, the approaches can be applied to the upper bound and lower bound sequences of interval grey numbers or the kernel and measurement sequences of interval grey numbers variously. By this means, this paper effectively extends function transformation technology to the field of interval grey numbers for grey prediction. Finally, numerical examples and a case are given to illustrate the effectiveness and practicability of the improved model.

Keywords: interval grey number; function transformation; data transformation; grey prediction

0 引言

传统的灰色预测模型主要适用于近似非齐次指数数据序列, 而现实世界中系统数据广泛存在冲击扰动、波动项干扰等, 于是, 数据变换技术应运而生. 早期的数据变换技术主要以初值化、均值化等算子的构造为主^[1-2], 后来出现了以数乘变换、平移变换为代表的空间视角技术^[3-4], 以及目前学者们研究最多的函数变换技术. 其中, 2008年前, 函数变换类论文主要以提高光滑比作为唯一的优化原始数据的验证条件. 陈洁等^[5]提出了幂函数-指数函数复合变换, 并证明了幂函数-指数函数复合变换比幂函数-指数函数开方变换更有效. 李翠凤等^[6]提出运用三角余切函数变换对原始数据进行优化, 但由于三角函数自身

周期性的特点, 在运用该方法时需要进行标准化使数据落入区间 $[0, \pi/2]$ 内, 再进行函数变换和GM(1,1)模型模拟, 但文章并未给出具体的处理方法和原则. 关叶青等^[7]将一般函数与三角函数作了组合, 提出了三角函数-幂函数复合变换, 并将李翠凤等的研究范围进一步扩大. 第2阶段, 从钱吴永等^[8]于2009年提出一系列构造准则起至今, 专家学者们仍在探索数据变换提高序列建模精度的充要条件以及函数变换的新类型. 钱吴永等^[8]完善了对于函数变换方法的验证条件, 主要包括: 是否满足光滑比变小、是否为级比压缩、是否具有保凹凸性以及还原误差是否放大; 并依照构造准则提出了反余切函数变换. 随后, 崔立志等分别进行了对数函数-一次函数变换^[9]以及余割三

收稿日期: 2016-01-07; 修回日期: 2016-03-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071077, 71371098, 71503103); 国家留学基金公派研究生项目(201606830039); 江苏高校哲学社会科学重点研究基地重大项目(2012JDXM005); 江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(KYZZ15_0095); 中央高校基本科研业务费专项资金项目.

作者简介: 叶璟(1988—), 女, 博士生, 从事灰色系统理论的研究; 党耀国(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济等研究.

†通讯作者. E-mail: yejingjessie@163.com

角函数变换^[10]研究,并且运用钱吴永提出的构造准则进行了验证.陈芳等^[11]提出了更具一般意义的非负函数变换,用来提高GM(1,1)模型的预测精度,并验证了以上4个验证条件.郭金海等^[12]讨论了函数变换对灰色模型光滑度和精度的影响,指出在函数变换时应综合考虑光滑度和还原精度,使得总体建模精度达到最优.

对于区间灰数的预测研究,学者们主要通过几何特征、构造算子、组合模型等方法将区间灰数序列转化为实数序列进行灰色预测模型建模,再还原回区间灰数序列的思想进行一系列的尝试探讨.其中,孟伟等^[13]按照灰数的原始定义将灰数标准化后得到白部和灰部;然后分别建立DGM(1,1)模型预测;最终还原成灰色区间数的上下界,得到预测模型.郭晓君等^[14]结合动力系统自忆性原理,构建了基于合成灰数灰度的区间灰数自忆性耦合预测模型.杨德岭等^[15]将Verhulst模型拓展到区间灰数的范围,基于灰度和核序列构建了Verhulst模型,并以信息域不减推论为依据、以核为中心推导区间灰数上(下)界.曾波等^[16]通过标准化离散灰数的核序列及灰单元格面积序列的GM(1,1)模型,实现对离散灰数中的元素的预测,并为避免等可能性取值这一缺陷,构建了标准离散灰数中元素取值可能性序列,以实现离散灰数中元素取值可能性大小的预测.

尽管函数变换技术已被学者们广泛运用于灰色预测模型,但相关研究大多仅限于实数序列.关于区间灰数的预测,当前研究成果也缺乏针对不同数据特征的区间灰数序列的不同处理方法.因此,本文尝试将函数变换技术推广到区间灰数的范畴,进一步拓展数据变换技术的应用范围,并试图通过函数变换提升区间灰数灰色预测模型的精度.具体地,本文选取三角余切函数进行函数变换,因其函数图像在 $[0, \pi/2]$ 上斜率的巨大变化,使得余切函数是一种对数据处理范围更广、对高斜率数据同样适用的函数变换形式,并且在提高原始数据的光滑度方面,比对数函数法及幂函数法更加有效^[6].值得注意的是,考虑到发展趋势的一致性,由于余切函数在 $[0, \pi/2]$ 上是递减的,此函数变换适合对递减序列进行处理.最终,本文将函数变换技术与区间灰数预测相结合,建立基于余切函数的区间灰数预测模型,对递减的区间灰数序列进行优化研究.

1 基本概念及理论

1.1 基本定理、定义

定理1^[17] 设序列 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n)) (k = 1, 2, \dots, n)$ 为一非负递减序列,若有非负函数变换

$y(k) = F(x(k))$,则能提高单调递减序列光滑度的充要条件是 $F(x(k))/x(k)$ 为单调递减函数.

定理2^[8] 设序列 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n)) (k = 1, 2, \dots, n)$ 为一非负递减序列,若非负函数变换 $y(k) = F(x(k))$ 可表示为 $F(x(k)) = x(k)G(x(k))$,则变换后的序列级比小于原始序列的级比,其中函数 $G(x(k))$ 非负且严格单调下降.

定义1 设 $y(k) = F(x(k)) (k = 1, 2, \dots, n)$ 为非负函数,如果其二阶导数在区间上恒大于0,则称该函数在此区间上为严格凹函数.

注1 因GM(1,1)模型是对具有灰指数趋势的数据序列进行模拟预测,故凹序列更适合GM(1,1)模型的建模.在进行数据变换时,应保证变换后序列的非负凹的特性.

定理3^[8] 若非负函数变换 $y(k) = F(x(k)) (k = 1, 2, \dots, n)$ 为一可导函数,且满足 $|F(x(k))'| \geq 1$,则数据变换的还原误差不变或缩小.

定义2^[18] 设灰数 $\otimes \in [a, b], a < b$,在缺乏取值分布信息的情况下,若 \otimes 为连续灰数,则称 $\tilde{\otimes} = (a + b)/2$ 为灰数的核.灰数的核序列记作 $X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}_1, \tilde{\otimes}_2, \dots, \tilde{\otimes}_n)$.

定义3^[18] 设灰数 $\otimes \in [a, b], a < b$,其上界和下界的差值称为区间灰数的测度,记作 $l(\otimes) = b - a$.灰数的测度序列记作 $L(\otimes) = (l(\otimes_1), l(\otimes_2), \dots, l(\otimes_n))$.

1.2 余切函数变换的性质

引理1 对于非负递减序列,余切函数变换能提高非负递减序列的光滑性.

证明 当 $x > 0$ 时,有

$$\left[\frac{\cot x}{x}\right]' = \frac{-x(\csc x)^2 - \cot x}{x^2} < 0, 0 \leq x \leq \pi/2.$$

所以,由定理1可知,在非负递减序列条件下, $y = \cot x (0 \leq x \leq \pi/2)$ 能提高非负递减序列的光滑性.□

引理2 对于非负递减序列,余切函数变换为级比压缩变换.

证明 因为 $y = \cot x = x \cdot \frac{\cot x}{x}$, $\left[\frac{\cot x}{x}\right]' < 0, 0 \leq x \leq \pi/2$,得 $y = \cot x/x$ 为非负单调递减函数.由定理2可知,在非负递减序列条件下, $y = \cot x (0 \leq x \leq \pi/2)$ 为级比压缩变换.□

引理3 对于非负递减序列,余切函数变换能保持序列的非负凹特性.

证明 对于单调递减序列,在区间 $(0, \pi/2)$ 上,有 $(\cot x)'' = [-(\csc x)^2]' = -2(\csc x)^2 \cot x > 0$,故 $y = \cot x (0 \leq x \leq \pi/2)$ 二阶导数恒大于0.所以,由定义1可知,在非负递减序列条件下, $y = \cot x (0 \leq x \leq \pi/2)$ 为严格凹函数.□

引理4 余切函数数据变换能使还原误差不变

或缩小.

证明 因为 $|(\cot x)'| = |-(\csc x)^2| \geq 1, 0 \leq x \leq \pi/2$, 所以由定理3知, 经 $y = \cot x (0 \leq x \leq \pi/2)$ 数据变换后, 还原误差不变或缩小. \square

1.3 余切函数变换的标准化处理原则

根据文献[19], 考虑到数据拟合的精度以及计算的简便, 不同增长率的数据分别被处理到4个数量等级, 以完成数据变换的标准化过程, 具体步骤如下.

设 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 为原始数据序列, 其中 $x^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$, 取前 $(n-m)$ 项进行如下处理.

1) 幂处理. 由

$$x_T^0 = (x^{(0)}(k))^{\frac{1}{T}}, x^{(0)}(k) \geq 0, \\ k = 1, 2, \dots, n-m, \quad (1)$$

得到新的数据序列

$$X_T^{(0)} = (x_T^{(0)}(1), x_T^{(0)}(2), \dots, x_T^{(0)}(n-m)), \\ x_T^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n-m.$$

分别取 $T = 1, T = 2, \dots$, 直至当 $T = t$ 时, 若得到数据序列中 $|x_t^{(0)}(n-m) - x_t^{(0)}(1)| \leq 0.1$, 则停止该步运算.

2) 均值化. 当 $T = t$ 时, 得到

$$X_t^{(0)} = (x_t^{(0)}(1), x_t^{(0)}(2), \dots, x_t^{(0)}(n-m)), \\ x_t^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n-m.$$

令

$$p = \frac{1}{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} x_t^{(0)}(k),$$

$$x_t^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n-m. \quad (2)$$

将 $X_t^{(0)} = (x_t^{(0)}(1), x_t^{(0)}(2), \dots, x_t^{(0)}(n-m)), x_t^{(0)}(k) \geq 0 (k = 1, 2, \dots, n-m)$ 中各数据分别除以 p , 得到新的数据序列

$$X_{tp}^{(0)} = (x_{tp}^{(0)}(1), x_{tp}^{(0)}(2), \dots, x_{tp}^{(0)}(n-m)), \\ x_{tp}^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n-m,$$

其中

$$x_{tp}^{(0)}(k) = \frac{x_t^{(0)}(k)}{p}. \quad (3)$$

3) 数据处理强度的等级设计. 数据序列 $X_{tp}^{(0)}$ 中的数据均处于1左右, 选取相应的调节系数 q 进一步将数据序列分别处理为0.1左右、0.5左右、1.0左右以及接近 $\pi/2$ 的4个数量强度等级 (数量等级记为 $i, i = 1, 2, 3, 4$).

将数据序列处理为0.1左右的数量等级时, 取

$q = 10$, 由 $X_{tp}^{(0)}$ 除以 q , 得数据序列

$$X_{F1}^{(0)} = (x_{F1}^{(0)}(1), x_{F1}^{(0)}(2), \dots, x_{F1}^{(0)}(n-m)), \\ x_{F1}^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n-m,$$

其中

$$x_{F1}^{(0)}(k) = \frac{x_{tp}^{(0)}(k)}{10}. \quad (4)$$

同理, 当数量等级为0.5左右时, 取 $q = 2$, 得到

$$X_{F2}^{(0)} = (x_{F2}^{(0)}(1), x_{F2}^{(0)}(2), \dots, x_{F2}^{(0)}(n-m)), \\ x_{F2}^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n-m,$$

其中

$$x_{F2}^{(0)}(k) = \frac{x_{tp}^{(0)}(k)}{2}; \quad (5)$$

当数量等级为1左右时, 取 $q = 1$, 得到

$$X_{F3}^{(0)} = (x_{F3}^{(0)}(1), x_{F3}^{(0)}(2), \dots, x_{F3}^{(0)}(n-m)), \\ x_{F3}^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n-m,$$

其中

$$x_{F3}^{(0)}(k) = \frac{x_{tp}^{(0)}(k)}{1}; \quad (6)$$

当数量等级为接近 $\pi/2$ 时, 取 $q = 2/3$, 得到

$$X_{F4}^{(0)} = (x_{F4}^{(0)}(1), x_{F4}^{(0)}(2), \dots, x_{F4}^{(0)}(n-m)), \\ x_{F4}^{(0)}(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n-m,$$

其中

$$x_{F4}^{(0)}(k) = \frac{3x_{tp}^{(0)}(k)}{2}. \quad (7)$$

由此, 产生的4个数量等级的新数据序列记为 $X_{Fi}^{(0)} (i = 1, 2, 3, 4)$.

根据原始数据的增长率, 参考函数变换 $y = \cot x (0 \leq x \leq \pi/2)$ 的变化率, 选择在区间 $(0, \pi/2)$ 上产生0.1, 0.5, 1或 $\pi/2$ 数量等级的新数据序列. 对于非负递减序列, 下降率大的数据 (下降率 $> 10\%$), 更适合将原始数据处理到0.1左右及0.5左右的数量等级, 这里函数斜率较大适于拟合高下降率数据; 低下降率数据 (下降率 $< 10\%$), 则更适合将原始数据处理到1或 $\pi/2$ 数量等级, 这里函数斜率较小适于拟合低下降率数据.

2 基于余切函数的区间灰数数据变换

对于区间灰数的灰色预测, 要同时考虑到数据序列的上界和下界的发展趋势, 以及区间灰数信息的充分利用原则, 并避免直接进行灰色预测建模可能导致的上下界交错的情形. 设有区间灰数非负递减序列

$$X^{(0)}(\otimes) = (\otimes^{(0)}(1), \otimes^{(0)}(2), \dots, \otimes^{(0)}(n)),$$

$$\otimes^{(0)}(k) \in [a^{(0)}(k), b^{(0)}(k)], k = 1, 2, \dots, n,$$

其上下界序列分别为

$$B^{(0)} = (b^{(0)}(1), b^{(0)}(2), \dots, b^{(0)}(n)),$$

$$A^{(0)} = (a^{(0)}(1), a^{(0)}(2), \dots, a^{(0)}(n)).$$

针对其不同情形,有以下4种情况分别进行函数变换灰色预测建模.

2.1 区间灰数上界减速慢、下界减速快的情形

对于此类区间函数的灰色预测,考虑到上下界差距较大(见图1),无需顾及上下界交错的情形,可分别根据上下界数据序列的增长率分别建模.具体过程如下:

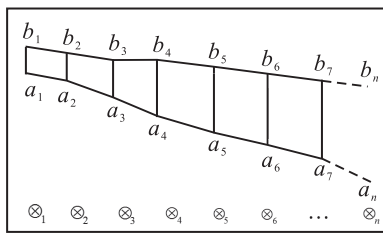


图1 区间灰数上界减速慢、下界减速快的情形

1) 分别计算上下界序列

$$B^{(0)} = (b^{(0)}(1), b^{(0)}(2), \dots, b^{(0)}(n)),$$

$$A^{(0)} = (a^{(0)}(1), a^{(0)}(2), \dots, a^{(0)}(n))$$

的下降率.

2) 根据上下界数据序列的下降率,参照1.3节的处理原则,分别得到标准化数据处理后的

$$B_i^{(0)} = (b_i^{(0)}(1), b_i^{(0)}(2), \dots, b_i^{(0)}(n)),$$

$$A_i^{(0)} = (a_i^{(0)}(1), a_i^{(0)}(2), \dots, a_i^{(0)}(n)),$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4$, 表示数据标准化处理的数据等级.

3) 对标准化处理后的

$$B_i^{(0)} = (b_i^{(0)}(1), b_i^{(0)}(2), \dots, b_i^{(0)}(n)),$$

$$A_i^{(0)} = (a_i^{(0)}(1), a_i^{(0)}(2), \dots, a_i^{(0)}(n))$$

进行函数 $y = \cot x (0 \leq x \leq \pi/2)$ 的变换处理,得到建模序列

$$Y_{bi}^{(0)} = (y_{bi}^{(0)}(1), y_{bi}^{(0)}(2), \dots, y_{bi}^{(0)}(n)),$$

$$Y_{ai}^{(0)} = (y_{ai}^{(0)}(1), y_{ai}^{(0)}(2), \dots, y_{ai}^{(0)}(n)).$$

4) 对建模序列取前 $(n - m)$ 项,分别进行GM(1,1)模型建模,后 m 项作为对 m 步预测值预测精度的验证数据,即分别将 $Y_{bi}^{(0)} = (y_{bi}^{(0)}(1), y_{bi}^{(0)}(2), \dots, y_{bi}^{(0)}(n - m)), Y_{ai}^{(0)} = (y_{ai}^{(0)}(1), y_{ai}^{(0)}(2), \dots, y_{ai}^{(0)}(n - m))$ 作为GM(1,1)模型的模拟数据,得到如下时间响应式,即最终的预测模型:

$$\hat{y}_{bi}^{(0)}(k + 1) = (1 - e^a) \left(y_{bi}^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak}, \quad (8)$$

$$\hat{y}_{ai}^{(0)}(k + 1) = (1 - e^a) \left(y_{ai}^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak}, \quad (9)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n - m$.

分别得到灰色预测模型关于上界序列和下界序列的 m 步预测值 $\hat{y}_{bi}(n - m + 1), \dots, \hat{y}_{bi}(n); \hat{y}_{ai}(n - m + 1), \dots, \hat{y}_{ai}(n)$.

5) 分别将 $\hat{y}_{bi}(n - m + 1), \dots, \hat{y}_{bi}(n); \hat{y}_{ai}(n - m + 1), \dots, \hat{y}_{ai}(n)$ 作还原处理(数据标准化处理的逆运算),有

$$y'_{bi}(k) = \operatorname{arccot}(\hat{y}_{bi}(k)), \quad (10)$$

$$y'_{ai}(k) = \operatorname{arccot}(\hat{y}_{ai}(k)), \quad (11)$$

$$x_{bi}(k) = [y'_{bi}(k) pq]^t, \quad (12)$$

$$x_{ai}(k) = [y'_{ai}(k) pq]^t, \quad (13)$$

其中 $k = n - m + 1, \dots, n$.

得到原始数据的 m 步预测值 $x_{bi}(n - m + 1), \dots, x_{bi}(n); x_{ai}(n - m + 1), \dots, x_{ai}(n)$.

2.2 区间灰数上界减速快、下界减速慢的情形

对于此类数据,在考虑灰色预测建模时尤其要注意分别进行上下界建模可能产生的上下界交叉的问题(见图2).对此,引入区间灰数的核与测度的概念,在充分利用区间灰数信息的基础上,将上下界序列转化为区间灰数的核与测度序列,再进行数据变换建模.具体过程如下:

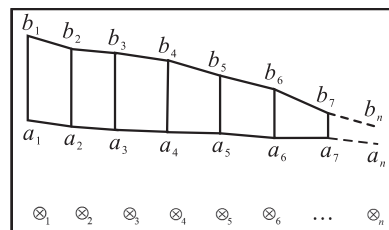


图2 区间灰数上界减速快、下界减速慢的情形

1) 根据定义2和定义3,分别计算区间灰数序列的核序列和测度序列,分别得到

$$X^{(0)}(\tilde{\otimes}) = (x^{(0)}\tilde{\otimes}(1), x^{(0)}\tilde{\otimes}(2), \dots, x^{(0)}\tilde{\otimes}(n)),$$

$$L^{(0)}(\otimes) = (l^{(0)}\otimes(1), l^{(0)}\otimes(2), \dots, l^{(0)}\otimes(n)).$$

2) 分别计算区间灰数的核序列和测度序列的下降率,有

$$X^{(0)}(\tilde{\otimes}) = (x^{(0)}\tilde{\otimes}(1), x^{(0)}\tilde{\otimes}(2), \dots, x^{(0)}\tilde{\otimes}(n)),$$

$$L^{(0)}(\otimes) = (l^{(0)}\otimes_1, l^{(0)}\otimes_2, \dots, l^{(0)}\otimes_n).$$

3) 根据核序列和测度序列的下降率,参照1.3节的处理原则,分别得到标准化数据处理后的

$$X_i^{(0)}(\tilde{\otimes}) = (x_i^{(0)}\tilde{\otimes}(1), x_i^{(0)}\tilde{\otimes}(2), \dots, x_i^{(0)}\tilde{\otimes}(n)),$$

$$L_i^{(0)}(\otimes) = (l_i^{(0)}\otimes(1), l_i^{(0)}\otimes(2), \dots, l_i^{(0)}\otimes(n)),$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4$, 表示数据标准化处理的数据等级.

4) 对标准化处理后的数据

$$X_i^{(0)}(\otimes) = (x_i^{(0)}(\otimes)(1), x_i^{(0)}(\otimes)(2), \dots, x_i^{(0)}(\otimes)(n)),$$

$$L_i^{(0)}(\otimes) = (l_i^{(0)}(\otimes)(1), l_i^{(0)}(\otimes)(2), \dots, l_i^{(0)}(\otimes)(n))$$

进行函数 $y = \cot x (0 \leq x \leq \pi/2)$ 的变换处理, 得到建模序列

$$Y_{\otimes i}^{(0)} = (y_{\otimes i}^{(0)}(1), y_{\otimes i}^{(0)}(2), \dots, y_{\otimes i}^{(0)}(n)),$$

$$Y_{li}^{(0)} = (y_{li}^{(0)}(1), y_{li}^{(0)}(2), \dots, y_{li}^{(0)}(n)).$$

5) 对建模序列取前 $(n - m)$ 项, 分别进行 GM(1,1) 模型建模, 后 m 项作为对 m 步预测值预测精度的验证数据, 即分别将

$$Y_{\otimes i}^{(0)} = (y_{\otimes i}^{(0)}(1), y_{\otimes i}^{(0)}(2), \dots, y_{\otimes i}^{(0)}(n - m)),$$

$$Y_{li}^{(0)} = (y_{li}^{(0)}(1), y_{li}^{(0)}(2), \dots, y_{li}^{(0)}(n - m))$$

作为 GM(1,1) 模型的模拟数据, 分别得到最终的预测模型

$$\hat{y}_{\otimes i}^{(0)}(k + 1) = (1 - e^a) \left(y_{\otimes i}^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak}, \quad (14)$$

$$\hat{y}_{li}^{(0)}(k + 1) = (1 - e^a) \left(y_{li}^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak}, \quad (15)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n - m$.

分别得到灰色预测模型关于区间灰数的核序列和测度序列 m 步的预测值 $\hat{y}_{\otimes i}(n - m + 1), \dots, \hat{y}_{\otimes i}(n)$ 和 $\hat{y}_{li}(n - m + 1), \dots, \hat{y}_{li}(n)$.

6) 分别将 $\hat{y}_{\otimes i}(n - m + 1), \dots, \hat{y}_{\otimes i}(n)$ 和 $\hat{y}_{li}(n - m + 1), \dots, \hat{y}_{li}(n)$ 作还原处理(数据标准化处理的逆运算), 有

$$y'_{\otimes i}(k) = \operatorname{arccot}(\hat{y}_{\otimes i}(k)), \quad (16)$$

$$y'_{li}(k) = \operatorname{arccot}(\hat{y}_{li}(k)), \quad (17)$$

$$x_i \otimes(k) = [y'_{\otimes i}(k) pq]^t, \quad (18)$$

$$l_i \otimes(k) = [y'_{li}(k) pq]^t, \quad (19)$$

$$x_{\bar{b}i}(k) = \frac{2x_i \otimes(k) + x_i \otimes(k)}{2}, \quad (20)$$

$$x_{\bar{a}i}(k) = \frac{2x_i \otimes(k) - l_i \otimes(k)}{2}, \quad (21)$$

其中 $k = n - m + 1, \dots, n$.

得到原始数据序列的 m 步预测值 $x_{\bar{b}i}(n - m + 1), \dots, x_{\bar{b}i}(n)$ 和 $x_{\bar{a}i}(n - m + 1), \dots, x_{\bar{a}i}(n)$.

2.3 区间灰数上下界减速相当且上下界差足够大的情形

上下界差足够大是指上界在预测时期, 远无法达到下界的情形. 这种情况下, 不存在建模后上下界交叉的情况(见图3), 故可采用类似2.1节的处理方法对其建模.

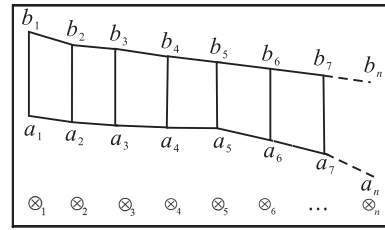


图3 区间灰数上下界减速相当且上下界差足够大的情形

2.4 区间灰数上下界减速相当且上下界差不足的情形

上下界差不足是指上界在预测时期, 可能达到下界的情形. 这种情况下, 可能存在建模后上下界交叉的情况(见图4), 故可采用类似2.2节的处理方法对其建模.

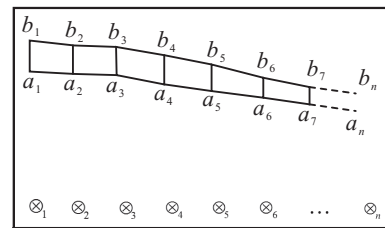


图4 区间灰数上下界减速相当且上下界差不足的情形

3 算例分析

设有4组原始区间灰数数据序列(见表1)分别对应以上4种情形, 选取各序列前4项为模拟数据, 最后1项作为预测数据进行对预测结果的验证. 另外, 为与本模型的结果进行对比, 选用区间灰数建模中基本的两种处理方法: 直接建模法(以下均记为方法1)和基于区间灰数核与测度的建模方法(以下均记为方法2). 其中, 直接建模法分别用 GM(1,1) 模型拟合区间灰数上下界序列, 预测上下界发展情况; 基于区间灰数核与测度的建模方法需要首先确定区间灰数的核与测度, 进行分别建模, 之后再作相应的还原处理, 得到上下界的预测值. 下面通过第2节各情形的建模处理方法所得到的结果, 对比直接建模法和基于区间灰数核与测度的建模方法的预测结果, 见表2.

表1 区间灰数建模序列

序列	建模数据				
$X_1(\otimes)$	[18.57,21.9]	[16,20.1]	[13.41,18.5]	[11.54,17.22]	[9.8,15.6]
$X_2(\otimes)$	[5.44,17]	[4.07,12.41]	[3.15,9.81]	[2.67,7]	[2.11,5]
$X_3(\otimes)$	[20.74,45.5]	[17.63,43.96]	[14.86,41.89]	[12.67,39.11]	[10.8,35.7]
$X_4(\otimes)$	[20.1,27]	[17.63,23.41]	[14.86,20.23]	[12.2,17]	[10.51,14.4]

由表2结果可看出, 4组原始区间灰数序列通过本文方法处理得到的预测误差普遍好于直接建模法和基于区间灰数核与测度的建模方法. 其中, 对于第1种情形, 本文方法得到的上下界平均预测误差为

表2 3种方法对4种区间灰数序列的模拟预测结果与预测误差

方法	$X_1(\hat{\otimes})$		$X_2(\hat{\otimes})$		$X_3(\hat{\otimes})$		$X_4(\hat{\otimes})$	
	预测结果	预测误差/%	预测结果	预测误差/%	预测结果	预测误差/%	预测结果	预测误差/%
方法1	9.72	-0.83	2.10	-0.50	10.70	-0.97	10.22	-2.78
	15.89	1.88	5.46	9.23	37.04	3.75	14.59	1.30
方法2	9.41	-3.99	2.08	-1.63	10.43	-3.46	10.19	-3.01
	16.12	3.35	5.47	9.39	37.14	4.02	14.61	1.42
本文方法	9.76	-0.37	2.11	0.11	10.70	-0.90	10.33	-1.75
	15.36	-1.56	5.33	6.62	35.93	0.64	14.41	0.09

0.97%, 低于另两种模型的 1.36% 和 3.67%。对于第 2 种情形, 本文模型得到的下界预测误差 6.62% 明显低于前两种方法的 9.23% 与 9.39%; 本文得到的上界误差依然最小。对于第 3 种情形, 本文方法得到的预测精度明显好于另外两个, 均小于 1%。对于第 4 种情形, 本文方法相较于另外两种方法仍保持了较高的预测精度, 对于上界, 新模型得到的预测误差 -1.75% 绝对值小于 -2.78% 和 -3.01%; 下界误差 0.09% 也同样低于 1.30% 和 1.42%。纵观 3 种方法, 本文方法在处理多种情形的区间灰数上取得了优于其他两种模型的结果, 适用范围较大, 精度较高。

4 实例验证

选取 2005~2014 年长江三角洲地区 (包括上海市、江苏省和浙江省) 人均工业废水排放量 (吨/人) 的区间数据作为实例验证本文模型。因为 2010 年数据出现明显波动, 故采取均值化方法 (即用 2009 年与 2011 年数据的均值) 替换 2010 年的实际值, 由此得到表 3 所示数据序列。根据数据序列上下界值判断, 此数据序列与第 3 种情形相符, 采取 2.1 节中的建模方法。其中, 以 2005~2012 年数据为拟合数据建立预测模型, 用 2013 和 2014 年数据验证预测模型的精度。

表3 2005~2014年长江三角洲地区人均工业废水排放量

年份	人均工业废水排放量	年份	人均工业废水排放量
2005	[27.03, 39.05]	2010	[18.82, 35.98]
2006	[24.61, 39.35]	2011	[19.00, 33.39]
2007	[23.05, 39.03]	2012	[20.04, 32.03]
2008	[20.60, 38.46]	2013	[18.80, 29.77]
2009	[18.64, 38.56]	2014	[18.10, 27.12]

表3的数据来源于《上海统计年鉴》、《江苏统计年鉴》、《浙江统计年鉴》(2006~2015) 中工业排放量和常住人口数 (单位: t/人)。

表4中的平均误差显示, 本文方法对长江三角洲地区人均工业废水排放量的预测结果明显优于前两种方法。从预测各年份上下界预测值的误差来看, 本文方法的误差绝对值保持在 12% 以下, 而前两种方

法最高误差值均接近 14%。从平均预测误差来看, 在第 1 步预测时, 本文方法的平均误差为 5.22%, 而另两种方法均在 7% 以上; 第 2 步预测时, 本文方法的平均误差仍低于另两种传统模型。由此, 表明了本文方法的实用性。

表4 3种方法对长江三角洲地区人均工业废水排放量的预测误差 %

方法	2013		2014	
	预测误差	平均误差	预测误差	平均误差
方法1	-7.72	7.50	-8.18	11.00
	7.29		13.82	
方法2	-7.46	7.33	-7.89	10.80
	7.20		13.72	
本文方法	-6.17	5.22	-6.22	8.87
	-4.27		-11.51	

5 结论

区间灰数的灰色预测领域一直是学者们致力研究的热点之一, 本文将灰色生成技术中函数变换运用于区间灰数的灰色建模中, 有效地提高了区间灰数序列的数据光滑比、级比、还原误差, 保证了数据序列的“凹”特性, 从而提高了建模精度。另外, 通过对区间灰数 4 种情形的讨论, 直观地给出了不同情形下的建模方法, 对实际运用具有较好的指导作用。最后, 通过算例分析和实例验证, 显示了本文所提出方法的现实意义。因区间灰数序列中内部灰色信息分布不明确, 所以, 通过数据变换对区间灰数序列的行为特征加以处理与解释, 是未来值得并有待于学者们深入研究的一个方向。

参考文献 (References)

- [1] 蔡琼, 陈萍. 灰色 GM(1,1) 模型及其在电力负荷预测中的应用 [J]. 自动化技术与应用, 2006, 25(3): 24-26. (Cai Q, Chen P. GM(1,1) model and its application in the power load prediction [J]. Techniques of Automation & Applications, 2006, 25(3): 24-26.)
- [2] 李俊峰, 戴文战. GM(1,1) 改进模型的研究及在上海市发电量建模中的应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(3): 140-144.

- (Li J F, Dai W Z. Research on the ameliorating GM(1,1) model and its application in the power quantity modeling of Shanghai city[J]. System Engineering—Theory & Practice, 2005, 25(3): 140-144.)
- [3] 谢乃明,刘思峰. GM(n, h)模型建模序列数据数乘变换特性研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(9): 1294-1299.
(Xie N M, Liu S F. Research on property of GM(n, h) model under data multiple transformation[J]. Control and Decision, 2009, 24(9): 1294-1299.)
- [4] 崔杰,刘思峰,曾波,等. 灰色 Verhulst 预测模型的数乘特性[J]. 控制与决策, 2013, 28(4): 605-608.
(Cui J, Liu S F, Zeng B, et al. Parameters characteristics of grey Verhulst prediction model under multiple transformation[J]. Control and Decision, 2013, 28(4): 605-608.)
- [5] 陈洁,许长新. 灰色预测模型的改进[J]. 辽宁师范大学学报:自然科学版, 2005, 28(3): 262-264.
(Chen J, Xu C X. An improvement of grey forecasting model[J]. J of Liaoning Normal University: Natural Science Edition, 2005, 28(3): 262-264.)
- [6] 李翠凤,戴文战. 基于函数 $\cot x$ 变换的灰色建模方法[J]. 系统工程, 2005, 23(3): 110-114.
(Li C F, Dai W Z. An approach of the grey modelling based on $\cot x$ transformation[J]. Systems Engineering, 2005, 23(3): 110-114.)
- [7] 关叶青,刘思峰. 基于函数 $\cot x$ 变换的灰色 GM(1,1) 建模方法[J]. 系统工程, 2008, 26(9): 89-93.
(Guan Y Q, Liu S F. An approach to grey modeling based on $\cot x$ transformation[J]. Systems Engineering, 2008, 26(9): 89-93.)
- [8] 钱吴永,党耀国. 一种新型数据变换技术及其在 GM(1,1) 模型中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(12): 2879-2881.
(Qian W Y, Dang Y G. New type of data transformation and its application in GM(1,1) model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(12): 2879-2881.)
- [9] 崔立志,刘思峰. 基于数据变换技术的灰色预测模型[J]. 系统工程, 2010, 28(5): 104-107.
(Cui L Z, Liu S F. Grey forecasting model based on data transformation technology[J]. Systems Engineering, 2010, 28(5): 104-107.)
- [10] 崔立志,刘思峰. 基于三角函数 $\csc x$ 的数据变换技术预测模型[C]. 第19届全国灰色系统学术会议论文集. 北京, 2010: 225-229.
(Cui L Z, Liu S F. Data transformation technique for grey forecasting model based on trigonometric function[C]. Proc of the 19th National Symposium on Grey, Systems, Beijing, 2010: 225-229.)
- [11] 陈芳,魏勇. 一类新的数据变换及其对提高灰预测精度的有效性研究[J]. 统计与信息论坛, 2012, 27(4): 27-30.
(Chen F, Wei Y. Study on transformation of a new class of data and its validity to improve the grey prediction accuracy[J]. Statistics and Information Forum, 2012, 27(4): 27-30.)
- [12] 郭金海,肖新平,杨锦伟. 函数变换对灰色模型光滑度和精度的影响[J]. 控制与决策, 2015, 30(7): 1251-1256.
(Guo J H, Xiao X P, Yang J W. Effect on grey model's smoothness and accuracy by using function transformation[J]. Control and Decision, 2015, 30(7): 1251-1256.)
- [13] 孟伟,刘思峰,曾波. 区间灰数的标准化及其预测模型的构建与应用研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 773-776.
(Meng W, Liu S F, Zeng B. Standardization of interval grey number and research on its prediction modeling and application[J]. Control and Decision, 2012, 27(5): 773-776.)
- [14] 郭晓君,刘思峰,方志耕. 基于合成灰数灰度的区间灰数自忆性预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(6): 1124-1129.
(Guo X J, Liu S F, Fang Z G. Self-memory prediction model of interval grey number based on grey degree of compound grey number[J]. System Engineering and Electronics, 2014, 36(6): 1124-1129.)
- [15] 杨德岭,刘思峰,曾波. 基于核和信息域的区间灰数 Verhulst 模型[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 264-268.
(Yang D L, Liu S F, Zeng B. Verhulst model of interval grey number based on kernel and information field[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 264-268.)
- [16] 曾波,刘思峰,孟伟,等. 具有主观取值倾向的离散灰数预测模型及其应用[J]. 控制与决策, 2012, 27(9): 1359-1364.
(Zeng B, Liu S F, Meng W, et al. Prediction model of discrete grey number with subjective valued orientation and its application[J]. Control and Decision, 2012, 27(9): 1359-1364.)
- [17] Wei Y, Zhang Y. A criterion of comparing the function transformations to raise the smooth degree of grey modeling data[J]. J of Grey System, 2007, 19(1): 91-98.
- [18] 刘思峰,方志耕,谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 313-316.
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the kernel and the degree of greyiness of grey numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(2): 313-316.)
- [19] Ye J, Li B J, Liu F. GM(1,1) forecast under function $\cot x$ transformation[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2013, 3(3): 236-249.

(责任编辑: 孙艺红)