文章编号: 1001-0920(2017)04-0734-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.0203

基于结构元理论的正规Type-2模糊集的质心

郭嗣琮[1], 任 燕[1,2†], 杨 洋[1]

(1. 辽宁工程技术大学 理学院，辽宁 阜新 123000；2. 河南理工大学 数信学院，河南 焦作 454000)

摘 要: 定义正规Type-2模糊集,并利用结构元理论给出正规Type-2模糊集的结构元表示和正规Type-2模糊集质心计算的确切步骤,得出正规Type-2模糊集质心的精确解. 在正规Type-2模糊集的次隶属函数可以通过结构元线性表示时,给出其质心计算的近似结果. 实例比较结果表明,所提出的方法计算简便,适用范围广,且在一定条件下近似解与精确解的拟合较好.

关键词: Type-2模糊集；正规Type-2模糊集；质心；解模糊

中图分类号: O159 **文献标志码:** A

Centroid of norm Type-2 fuzzy sets based on structured element

GUO Si-cong[1], *REN Yan*[1,2†], *YANG Yang*[1]

(1. Faculty of Science，Liaoning Technical University，Fuxin 123000，China；2. School of Mathematics and Information Science，He'nan Polytechnic University，Jiaozuo 454000，China)

Abstract: The norm Type-2 fuzzy set is defined and its representation based on the structured element is introduced, and an exact computation method is provided for the centroid of the norm Type-2 fuzzy set. When the secondary membership function can be expressed by the linear representation of structured element, an approximation method is provided for the centroid of the norm Type-2 fuzzy set. The examples of comparing the exact computational results with the approximate results are given, which show that the proposed methods are computationally simple and have a wide rang of applications, and under certain conditions, the approximation solution and the exact solution fit well.

Keywords: Type-2 fuzzy sets；norm Type-2 fuzzy sets；centroid；defuzzification

0 引 言

Zadeh[1] 建立的模糊集理论能有效处理模糊的,特别是与语言相关的不确定性. 但是,在实际应用中,语言(词)往往对不同的人有不同的涵义. 模糊集确定的隶属度使其本质上是精确的,并不足以抓住比如好、重要、一般等认知语言的复杂不确定性. 为了克服模糊集用精确值表达语言变量的局限性,Zadeh[2] 提出了Type-2模糊集(T2FSs),并把之前的模糊集称为Type-1模糊集. Type-2模糊集的隶属函数是三维的,提供了更多的自由度,可以直接掌控多重的模糊不确定性信息,产生更精确和鲁棒的结果,被广泛应用在许多领域,比如工业、控制、分类、模式识别、决策等. 但是,由于Type-2模糊集本身表述和计算的复杂性,这些应用基本都限制在区间Type-2模糊集上. 正如Starczewski[3] 认为的那样: Type-1模糊系统的结果太乐观,其隶属函数没有不确定性,即仅仅利用了Type-2中的首隶属函数的信息;区间Type-2模糊集的结果又太悲观,其只使用了边界信息. 最好的结果是使用整个区间,包括边界、中心、分布等信息. 因此,所有的这些应用系统都将面临着由区间Type-2模糊集向一般Type-2模糊集的扩张问题. 次隶属函数是模糊数的Type-2模糊集(正规Type-2模糊集),是区间Type-2模糊集和一般Type-2模糊集的过渡形式,对其进行的各种研究显然具有理论意义和实际的应用价值.

在Type-1模糊集参与的一型模糊系统(Type-1 FLSs)中,为了得到精确输出,需对Type-1模糊集进行解模糊化. 而Type-2模糊集因其自身的特点,解模糊化分为两步: 1) 降型,将Type-2模糊集转化为Type-1模糊集; 2) 解模糊化,将Type-1模糊集转化精确值. 降型是解模糊的第1步,实质是求Type-2模糊集的质心. 降型运算是Type-2模糊系统的关键步骤,因Type-

收稿日期: 2016-02-26；**修回日期:** 2016-08-04.
基金项目: 国家自然科学基金项目(61350003).
作者简介: 郭嗣琮(1951−), 男, 教授, 博士生导师, 从事模糊分析学、模糊预测与决策等研究；任燕(1976−), 女, 副教授, 博士生, 从事模糊预测与决策的研究.
†通讯作者. E-mail: renyan@hpu.edu.cn

2模糊集计算上的困难,已成为Type-2模糊逻辑系统应用的瓶颈. 在实际系统的应用中, 也仅有计算比较简单的区间Type-2模糊逻辑系统得到广泛的使用. 区间Type-2模糊集的质心计算的基本方法是KM(Karnik-Mendel)算法[4-5]. 近些年, 许多学者致力于KM算法的改进. Wu等[6]给出了非常有效的降型策略; Sepulveda等[7]降低了KM算法的计算复杂性; Wu等[8]改进KM算法,提出了EKM(Enhanced Karnik-Mendel)算法, 降低了降型计算或质心计算的成本; 王建辉等[9]对EKM算法进行了改进,提出了一种新的改进EKM算法,减少了迭代时间,降低了计算量.

对于一般的Type-2模糊集的质心(或降型), Liu[10]利用α-截集将Type-2模糊集分解为区间Type-2模糊集,通过多次使用KM算法将Type-2模糊集进行降型; Lucas等[11]计算了Type-2模糊集每个垂直切片的质心,并将计算所得的质心集合相结合,形成降型集; Starczewski[12]给出了离散型论域上次隶属函数是三角和高斯型模糊集的Type-2模糊集的质心计算结果. 这些方法得到的Type-2模糊集的质心或者不再是扩张原理意义下的质心,或者对模糊集的具体形式具有较大的限制. 本文借助模糊数的结构元理论,对于定义在离散型论域(连续型论域可以先离散化)上的正规Type-2模糊集,给出其质心计算的精确结果和近似结果.

为了区别方便, 本文用$A, B, C, \cdots$ 表示Type-1模糊集,而Type-2模糊集记为$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \cdots$. 对于论域$X$,利用$F(X)$表示论域$X$上的全体Type-1模糊集, $N(X)$为X上的全体模糊数集合.

1 Type-2模糊集的基本概念

本节简单介绍Type-2模糊集的相关概念,有关详细内容可查阅参考文献[13-14]等.

$\tilde{A}$为论域X上的Type-2模糊集,若$\forall x \in X$,则其隶属度是$[0,1]$上的取值为$[0,1]$的函数,即$\mu_{\tilde{A}}: X \to [0,1]^{[0,1]}$, $[0,1]^{[0,1]}$表示$[0,1]$上的全体Type-1模糊集.

一般地,论域X上的Type-2模糊集(T2FSs)$\tilde{A}$可以通过Type-2隶属函数(T2FM)$\mu_{\tilde{A}}(x,u)$表示,即

$$\tilde{A} = \{(x,u), \mu_{\tilde{A}}(x,u) | x \in X, u \in [0,1], 0 \leqslant \mu_{\tilde{A}}(x,u) \leqslant 1\}.$$

其中:称x为$\tilde{A}$的主变元, u为$\tilde{A}$的次变元.

定义1 对于Type-2模糊集$\tilde{A}$的论域中任一点$x' \in X$, Type-2隶属函数$\mu_{\tilde{A}}(x,u)$与平面$x = x'$的交集$\mu_{\tilde{A}}(x',u)$称为次隶属函数(Secondary MF),记为$\mu_{\tilde{A}(x')}(u)$或$\mu_{\tilde{A}_{x'}}(u)$,简记为$\mu_{\tilde{A}(x')}$或$\mu_{\tilde{A}_{x'}}$.

定义2 称次隶属函数的定义域$J_x = \{(x,u) | u \in [0,1], \mu_{\tilde{A}}(x,u) > 0\}$为Type-2模糊数$\tilde{A}$在$x$的主隶属度.

次隶属函数$\mu_{\tilde{A}(x)}$为Type-1模糊集,且有$\mu_{\tilde{A}(x)} = \int_{(x,u)\in J_x} \mu_{\tilde{A}(x)}(u)/u$. Type-2模糊集可以表示为所有次隶属函数的并,即

$$\tilde{A} = \int_{x\in X} \int_{(x,u)\in J_x} \mu_{\tilde{A}(x)}(u)/(x,u).$$

Type-2模糊集给出了元素隶属度的模糊程度,其隶属函数是三维的,比Type-1模糊集多了一维,这意味着多了一维描述与处理不确定性的自由度,因此增强了集合处理不确定性的能力,同时也增强了集合复杂性.

定义3 若$\forall x \in X, (x,u) \in J_x, \mu_{\tilde{A}_x}(u) \equiv 1$,则称$\tilde{A}$为区间Type-2模糊集(IT2FSs).

定义4 Type-2模糊集的首隶属函数(Principal MF)记为$\mu_{\tilde{A}}^{\text{prin}}(x)$,且有$\mu_{\tilde{A}}^{\text{prin}}(x) = \int_{x\in X} u/x, \forall x \in X, (x,u) \in J_x, \mu_{\tilde{A}_x}(u) = 1$.

定义5 对于论域X上的Type-2模糊集$\tilde{A}$,若$\forall x \in X$,次隶属函数$\mu_{\tilde{A}(x)}$为$[0,1]$上的Type-1模糊数,则称$\tilde{A}$为正规Type-2模糊集.

2 结构元基本理论及正规Type-2模糊集的结构元表示

2.1 结构元基本理论

本节简单介绍结构元基本理论,具体内容可查阅参考文献[15-17]等.

定义6 设E为实数域R上的模糊集,隶属函数记为$E(x), x \in R$. 如果$E(x)$满足下述性质,则称模糊集E为R上的模糊结构元: 1) $E(0) = 1$; 2) 在区间$[-1,0)$上$E(x)$为单增右连续函数,在区间$(0,1]$上$E(x)$为单减左连续函数; 3) 当$-\infty < x < -1$或者$1 < x < +\infty$时, $E(x) = 0$.

设E为R上的模糊结构元,如果满足: 1) $\forall x \in (-1,1), E(x) > 0$; 2) 在$[-1,0)$上$E(x)$为连续且严格单增函数,在$(0,1]$上$E(x)$为连续且严格单减函数. 则称$E$为模糊正则结构元. 若$E(x) = E(-x)$,则称$E$为模糊对称结构元.

引理1 (局部映射原理) 设E为R上的模糊结构元,具有隶属函数$E(x)$,又设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上是单调有界的, $\hat{f}(x)$为$f(x)$的延拓集值函数,则$\hat{f}(E)$为R上有界闭模糊数,且$\hat{f}(E)$的隶属函数为$E(f^{-1}(x))$,这里$f^{-1}(x)$为$f(x)$关于变量x和y的轮换对称函数(若$f(x)$是连续严格单调的,则$f^{-1}(x)$为$f(x)$的反函数). 在不引起混淆的情况下,记$\hat{f}(x)$为$f(x)$, $\hat{f}(E)$为$f(E)$.

引理2 (模糊结构元表现定理) 对于给定的正

则结构元E和任意的有界闭模糊数A,总存在一个$[-1,1]$上的单调有界函数$f(x)$,使得$A=f(E)$.

称函数$f(x)$为有界闭模糊数A的单调变换函数.

2.2 正规Type-2模糊集的结构元表示

函数是数集到数集的映射,将实数集到模糊数集上的映射称为模糊值函数.

定义7 [15] 设X,Y为实数集的两个子集,$\tilde{f}$为X到$N(Y)$上的映射,即$\forall x\in X$,存在唯一的模糊数$y\in N(Y)$与之对应,记为$y=\tilde{f}(x)$,则称$\tilde{f}$为X上的模糊值函数.

如果对于所有的$x\in D(\tilde{f})$, $\tilde{f}(x)$都是有界闭模糊数,则称模糊值函数$\tilde{f}$是有界的.

引理3 [15] 设X为实数集,对于给定的正则结构元E和X上的任意有界模糊值函数$\tilde{f}(x)$,总存在$X\times[-1,1]$上的二元函数$g(x,y)$,且对于任意确定的$x\in X$, $g(x,y)$是关于y在$[-1,1]$上的单调函数,使得$\tilde{f}(x)=g(x,E)$.

正规Type-2模糊集的次隶属函数$\mu_{\tilde{A}(x)}$是论域X、值域为$[0,1]$上模糊数的模糊值函数. 根据引理3,存在$X\times[-1,1]$上的二元函数$g(x,t)$,使得$\mu_{\tilde{A}(x)}=g(x,E)$,其中$E$为正则结构元. 对于任意确定的$x\in X$, $g(x,t)$为关于t在$[-1,1]$上的单调有界函数,且$0\leqslant g(x,t)\leqslant 1$,称$g(x,t)$为正规Type-2模糊集$\tilde{A}$次隶属函数的单调变换函数.

正规Type-2模糊集$\tilde{A}$可以通过其次隶属函数的单调变换函数表示. 比如X是有限论域,不妨设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, X上的Type-2模糊集$\tilde{A}$可以表示为$\tilde{A}=\dfrac{g(x_1,E)}{x_1}+\dfrac{g(x_2,E)}{x_2}+\cdots+\dfrac{g(x_n,E)}{x_n}$,或记为$\tilde{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{g(x_i,E)}{x_i}$.

3 正规Type-2模糊集的质心

离散论域$X(X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\})$上的Type-1模糊集$A$的去模糊化方法(或称为质心)一般采用的计算式为

$$C_A=\sum_{i=1}^{n}x_i\mu_A(x_i)\Big/\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i), \tag{1}$$

其中$\mu_A(x_i)$为实数. 类似地,对于离散论域X上的正规Type-2模糊集$\tilde{A}$,论域中的每个x_i都对应一个Type-1模糊数$\mu_{\tilde{A}(x_i)}$,这样正规Type-2模糊集$\tilde{A}$的质心的计算式为

$$C_{\tilde{A}}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mu_{\tilde{A}(x_i)}\Big/\sum_{i=1}^{n}\mu_{\tilde{A}(x_i)}, \tag{2}$$

其中$\mu_{\tilde{A}(x_i)}$为模糊数. 如果把式(1)看成$x_1,x_2,\cdots,x_n$的加权平均,则式(2)就是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的模糊加权平均,即式(2)是(1)的模糊扩张.

3.1 多元函数的模糊扩张

扩张原理是模糊集理论的基本概念,是模糊集上所有运算的基础.

定义8 多元映射$f:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y$. 由$f$可诱导映射$f:F(X_1)\times F(X_2)\times\cdots\times F(X_n)\to F(Y)$; $(A_1,A_2,\cdots,A_n)\to f(A_1,A_2,\cdots,A_n)$, $\forall y\in Y$,隶属函数

$$\mu_{f(A_1,A_2,\cdots,A_n)}(y)=\bigvee_{y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}[\bigwedge_{k=1,2,\cdots,n}\mu_{A_k}(x_k)].$$

利用函数单调性和模糊扩张不难证明下面结论.

定理1 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$[-1,1]^n$上的有界函数,且函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于自变量$x_i(i=1,2,\cdots,n)$均具有单调性. 不妨设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于$x_1,x_2,\cdots,x_k(k<n)$单调增,关于$x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n$单调减,则对于给定的正则对称结构元$E$,有

$$f(E,E,\cdots,E)=f(\underbrace{t,\cdots,t}_{k},\underbrace{-t,\cdots,-t}_{n-k})|_{t=E}.$$

定理2 (多元函数模糊扩张的结构元表示) 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$X_1\times\cdots\times X_n$上的有界函数,且函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于自变量$x_i$均具有单调性$(i=1,2,\cdots,n)$. 不妨设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于$x_1,x_2,\cdots,x_k(k<n)$单调增,关于$x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n$单调减,对任意有界模糊数$A_i$, $A_i=g_i(E)$, E为给定的正则对称结构元, $g_i(t)$为t的单调增函数,则有$f(A_1,A_2,\cdots,A_n)=f(g_1,\cdots,g_k,g_{k+1}^{\tau},\cdots,g_n^{\tau})(x)|_{t=E}$,这里$g^{\tau}(x)=g(-x)$.

文献[18]给出了当$n=2$时,定理1和定理2的证明, $n>2$时,证明方法类似.

3.2 正规Type-2模糊集质心的计算

$\tilde{A}$是离散论域$X(X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,不妨设$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$,若$X$是连续型,则可以先进行离散化)上的正规Type-2模糊集,那么$\forall x_i$, $\mu_{\tilde{A}(x_i)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$为取值在$[0,1]$上的模糊数, E为给定的正则对称结构元, $\mu_{\tilde{A}(x_i)}=g(x_i,t)|_{t=E}\triangleq g_i(t)|_{t=E}$. 其中: $g_i(t)$均为关于t在$[-1,1]$上的单调有界增函数. 则正规Type-2模糊集$\tilde{A}$的质心$C_{\tilde{A}}$可以看成函数$\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$(式(3))的模糊扩张,即

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\Big/\sum_{i=1}^{n}u_i. \tag{3}$$

其中$\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$关于$u_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$的偏导数为

$$\frac{\partial\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\partial u_k}=\frac{\partial}{\partial u_k}\Big[\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\Big/\sum_{i=1}^{n}u_i\Big]=$$

$$[x_k-\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)]\Big/\sum_{i=1}^{n}u_i.$$

由Type-2模糊集的性质可知, $\sum_{i=1}^{n} u_i > 0$ 总成立,故

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\partial u_k} \geqslant 0,\ x_k \geqslant \varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n); \\ \dfrac{\partial \varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\partial u_k} < 0,\ x_k < \varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n). \end{cases}$$

于是,当 $x_k > \varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 时, $\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 关于 u_k 单增;当 $x_k < \varphi(u_1,u_2\cdots,u_n)$ 时, $\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 关于 u_k 单减.

当 $(x_i,u_i) \in J_{x_i}, i = 1,2,\cdots,n$ 时, $\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 的最大值和最小值分别记为 $c_{\max}, c_{\min}$,易知 $[c_{\min},c_{\max}] \subseteq [x_1,x_n]$. 函数 $\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 的最大值和最小值的计算可以通过遗传算法等优化算法得到,也可以使用KM算法.

找到 $L,R(L,R \in \{1,2,\cdots,n-1\}$,且 $L \leqslant R)$,使得 $x_L \leqslant c_{\min} \leqslant x_{L+1} \leqslant \cdots \leqslant x_R \leqslant c_{\max} \leqslant x_{R+1}$,则 $\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 关于 u_i 的单调性表示为: 当 $c_{\min} \leqslant \varphi < x_{L+1}$ 时, φ 关于 $u_1,u_2,\cdots,u_L$ 单减, $u_{L+1},u_{L+2},\cdots,u_n$ 单增;当 $x_{L+1} \leqslant \varphi < x_{L+2}$ 时, φ 关于 $u_1,u_2,\cdots,u_{L+1}$ 单减, $u_{L+2},u_{L+3},\cdots,u_n$ 单增; $\cdots$;当 $x_R \leqslant \varphi \leqslant c_{\max}$ 时, φ 关于 $u_1,u_2,\cdots,u_R$ 单减, $u_{R+1},u_{R+2},\cdots,u_n$ 单增.

由定理2可知, $\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 的模糊扩张为 $\varphi(g_1(E),g_2(E),\cdots,g_n(E)) = \varphi(t)|_{t=E}$,其中

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(g_1^\tau,\cdots,g_L^\tau,g_{L+1},\cdots,g_n)(t),\ c_{\min}\leqslant\varphi<x_{L+1}; \\ \varphi(g_1^\tau,\cdots,g_{L+1}^\tau,g_{L+2},\cdots,g_n)(t),\ x_{L+1}\leqslant\varphi<x_{L+2}; \\ \vdots \\ \varphi(g_1^\tau,\cdots,g_R^\tau,g_{R+1},\cdots,g_n)(t),\ x_R\leqslant\varphi\leqslant c_{\max}. \end{cases} \tag{4}$$

这里 $g^\tau(t) = g(-t)$. 于是Type-2模糊集 $\tilde{A}$ 的质心 $C_{\tilde{A}} = \varphi(E)$.

综上可知,对于离散型论域的正规Type-2模糊集,质心的计算步骤如下.

Step 1: 计算函数 $\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 的最大值和最小值 $c_{\max},c_{\min}$,这里 $(x_i,u_i) \in J_{x_i}, i = 1,2,\cdots,n$;

Step 2: 找到 $L,R(L,R \in \{1,2,\cdots,n-1\})$,满足 $x_L \leqslant c_{\min} \leqslant x_{L+1} \leqslant \cdots \leqslant x_R \leqslant c_{\max} \leqslant x_{R+1}$;

Step 3: 根据式(4)得到函数 $\varphi(t)$ 并化简,Type-2模糊集 $\tilde{A}$ 的质心 $C_{\tilde{A}} = \varphi(E)$.

例1　E 为任一正则对称结构元,离散型论域 $X = \{0,1,2\}$ 上的正规Type-2模糊集 $\tilde{A}$ 的结构元表示为

$$\tilde{A} = \frac{g_1(E)}{0} + \frac{g_2(E)}{1} + \frac{g_3(E)}{2},$$

其中

$$g_1(t) = \begin{cases} 0.1+0.1t,\ -1 \leqslant t < 0; \\ 0.1+0.7t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} 0.2+0.1t,\ -1 \leqslant t < 0; \\ 0.2+0.7t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

$$g_3(t) = \begin{cases} 0.5+0.3t\ -1 \leqslant t < 0; \\ 0.5+0.4t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

$\tilde{A}$ 质心的求解过程如下.

Step 1: $u_1 \in [0,0.8], u_2 \in [0.1,0.9], u_3 \in [0.2,0.9]$,利用KM算法计算函数 $\varphi(u_1,u_2,u_3)$ 的最大值和最小值,可得 $c_{\max} = 1.9, c_{\min} = 5/11$.

Step 2: 由于 $0 < \dfrac{5}{11} < 1 < 1.9 < 2$,由式(4)可得

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(g_1^\tau,g_2,g_3)(t),\ \dfrac{5}{11} \leqslant \varphi < 1; \\ \varphi(g_1^\tau,g_2^\tau,g_3)(t),\ 1 \leqslant \varphi \leqslant 1.9; \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{g_2(t)+2g_3(t)}{g_1(-t)+g_2(t)+g_3(t)},\ \dfrac{5}{11} \leqslant \varphi < 1; \\ \dfrac{g_2(-t)+2g_3(t)}{g_1(-t)+g_2(-t)+g_3(t)},\ 1 \leqslant \varphi \leqslant 1.9. \end{cases}$$

Step 3: 化简可得 $\tilde{A}$ 的质心的变换函数 $\varphi(t)$,如图1所示.

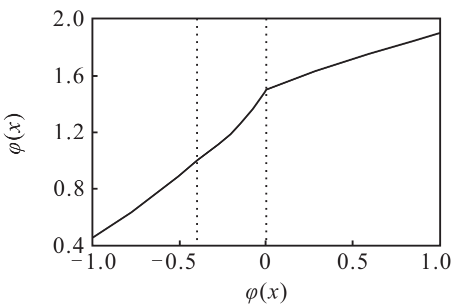

图1　$\varphi(x)$ 图像

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1.2+0.7t}{0.8-0.3t},\ -1 \leqslant t < -0.4; \\ \dfrac{1.2-0.1t}{0.8-1.1t},\ -0.4 \leqslant t < 0; \\ \dfrac{1.2+0.7t}{0.8+0.2t},\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

当 E 是三角结构元时,Type-2模糊集 $\tilde{A}$ 的质心的隶属函数为

$$\mu_{C_{\tilde{A}}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1.1x-0.5}{0.3x+0.7},\ \dfrac{5}{11} \leqslant x < 1; \\ \dfrac{1.9x-1.3}{1.1x-0.1},\ 1 \leqslant x < \dfrac{3}{2}; \\ \dfrac{x-1.9}{0.2x-0.7},\ \dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 1.9. \end{cases}$$

其图像如图2所示.

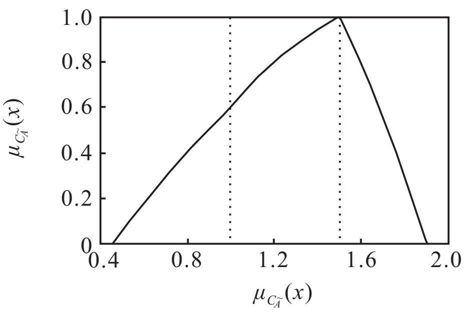

图2　隶属函数图像

说明　当E取三角结构元时, Type-2模糊集$\tilde{A}$在各点处的次隶属函数都是三角模糊数, 例1与文献[12]中的例6等价, 且两者的结果完全相同. 这也说明了本文所用方法的有效性. 而本文求Type-2模糊集质心方法的优越性还体现在: 1)计算的简单性, 这可通过与文献[12]的方法比较直观得到; 2)适用的广泛性, 本文的方法不仅仅适用于次隶属函数是三角模糊数的情形, 当E取不同的结构元时, 次隶属函数对应不同的有界闭模糊数, 本文的方法都适用.

3.3　正规Type-2模糊集质心的近似计算

文献[19]证明了对于任意给定的对称模糊数A, 一定存在一个对称正则结构元E, 使得模糊数A可以通过结构元E线性表示, 即$A=a+bE$, 其中$a, b\,(\geqslant 0)$为实数.

对于给定的正则对称结构元E, 离散型论域X上的正规Type-2模糊集$\tilde{A}$, $\forall x_i\in X$, 次隶属函数$\mu_{\tilde{A}(x_i)}$均可通过结构元E线性表示, 即$\mu_{\tilde{A}(x_i)}=a_i+b_iE$, $i=1,2,\cdots,n$, 其中$0<a_i\leqslant 1$, $b_i\geqslant 0$, 且$0\leqslant a_i+b_iE\leqslant 1$, 则$C_{\tilde{A}}$可以看成函数$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$的模糊扩张, 这里有

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i(a_i+b_it_i)\Big/\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_it_i)=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ia_i+\sum_{i=1}^{n}x_ib_it_i\Big)\Big/\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_it_i\Big).\tag{5}$$

本节中给出式(5)的近似函数, 从而得到其模糊扩张的近似结果.

定理3　当条件$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\ll 1$满足时, 式(5)的近似函数为

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)\approx C^*+\sum_{i=1}^{n}b_i(x_i-C^*)t_i\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i,\tag{6}$$

其中$C^*=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ia_i\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

定理4　设$\tilde{A}$为离散型论域$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的正规Type-2模糊集, $\forall x_i\in X$, 次隶属函数$\mu_{\tilde{A}(x_i)}$均可通过给定的正则对称结构元E线性表示, 即$\mu_{\tilde{A}(x_i)}=a_i+b_iE$, 其中$0<a_i\leqslant 1$, $b_i\geqslant 0$, 且$0\leqslant a_i+b_iE\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$, 则当$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\ll 1$满足时, $\tilde{A}$的质心$C_{\tilde{A}}$的近似值为

$$C_{\tilde{A}}=\varphi(E)\approx C^*+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i|x_i-C^*|}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}t\Big|_{t=E},\tag{7}$$

其中$C^*=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ia_i\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

下面将对定理3和定理4同时证明.

证明　对于式(5)的分母, 当$\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}b_it_i\Big|\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\ll 1$满足时, 有

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}b_it_i}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\left(\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}b_it_i\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\right)\approx\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\Big(1-\sum_{i=1}^{n}b_it_i\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i\Big),\tag{8}$$

而$\dfrac{\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}b_it_i\Big|}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i|t_i|}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$, 于是可知, 当条件$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\ll 1$满足时, 式(8)成立, 这样有

$$\begin{aligned}C_{\tilde{A}}&=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)\approx\\&\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ia_i+\sum\limits_{i=1}^{n}x_ib_it_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\Big(1-\sum_{i=1}^{n}b_it_i\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)=\\&\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ib_it_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-\\&\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_it_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ib_it_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_it_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}.\end{aligned}\tag{9}$$

因为

$$\frac{\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}x_ib_it_i\Big|}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_ib_it_i|}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\leqslant x^*\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i},$$

其中$x^* = \max\limits_i |x_i|$,所以式(9)的最后一项

$$\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i b_i t_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i t_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}\right| \leqslant$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n |x_i b_i t_i|}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^n |b_i t_i|}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} \leqslant x^* \frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}.$$

当条件$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n b_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} \ll 1$满足时,$x^* \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n b_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} \cdot \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n b_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}$将是一个非常接近于0的正数,于是忽略式(9)的最后一项,可得

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n) \approx$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} + \frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i b_i t_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} - \frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} \frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i t_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}. \tag{10}$$

令$C^* = \sum\limits_{i=1}^n x_i a_i \Big/ \sum\limits_{i=1}^n a_i$,式(10)为

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n) \approx$$

$$C^* + \sum_{i=1}^n x_i b_i t_i \Big/ \sum_{i=1}^n a_i - C^* \sum_{i=1}^n b_i t_i \Big/ \sum_{i=1}^n a_i,$$

整理得式(6),定理3得证.

由式(6)可知,函数$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$的近似表示对每一个$t_i (i = 1, 2, \cdots, n)$都具有单调性:当$x_i > C^*$时,$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$关于$t_i$单增;当$x_i < C^*$时,$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$关于$t_i$单减.根据定理(1),函数$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$在各$t_i = E$的模糊扩张近似结果为

$$\varphi(E, E, \cdots, E) \triangleq$$

$$\varphi(E) \approx C^* + \frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i |x_i - C^*|}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} t\Big|_{t=E},$$

定理4得证. □

定理4关于离散型论域上的正规Type-2模糊集质心的计算结果可以比较方便地推广到连续论域上.

定理5　设$\tilde{A}$是连续型论域X上的正规Type-2模糊集,$\forall x \in X$,次隶属函数$\mu_{\tilde{A}(x)}$可以通过给定的正则对称结构元E线性表示,即

$$\mu_{\tilde{A}(x)} = a(x) + b(x)E.$$

其中: $0 < a(x) \leqslant 1, b(x) \geqslant 0, 0 \leqslant a(x) + b(x)E \leqslant 1, \forall x \in X$.那么当条件$\dfrac{\int_X b(x)\mathrm{d}x}{\int_X a(x)\mathrm{d}x} \ll 1$满足时,$\tilde{A}$的质心$C_{\tilde{A}}$的近似值为

$$C_{\tilde{A}} \approx C^* + \frac{\int_X b(x)|x - C^*|\mathrm{d}x}{\int_X a(x)\mathrm{d}x} t\Big|_{t=E}, \tag{11}$$

其中$C^* = \dfrac{\int_X x a(x)\mathrm{d}x}{\int_X a(x)\mathrm{d}x}$.

例2　E为任一正则对称结构元,离散型论域$X = \{1, 3, 5, 7\}$上的正规Type-2模糊集$\tilde{A}, \tilde{B}$的结构元表示分别为

$$\tilde{A} = \frac{0.1 + 0.02E}{1} + \frac{0.8 + 0.16E}{3} + \frac{0.6 + 0.12E}{5} + \frac{0.1 + 0.02E}{7},$$

$$\tilde{B} = \frac{0.1 + 0.05E}{1} + \frac{0.8 + 0.2E}{3} + \frac{0.6 + 0.3E}{5} + \frac{0.1 + 0.05E}{7}.$$

根据式(4),$\tilde{A}, \tilde{B}$质心的单调变换函数分别为

$$\varphi_{\tilde{A}}(t) = \frac{6.2 + 0.24t}{1.6 - 0.04t}, \ -1 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$\varphi_{\tilde{B}}(t) = \frac{6.2 + 1.2t}{1.6 + 0.1t}, \ -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

当E为三角结构元时,$\tilde{A}, \tilde{B}$质心的隶属函数分别为

$$\mu_{C_{\tilde{A}}}(x) = 1 - \left|\frac{1.6x - 6.2}{0.04x + 0.24}\right|, \ 3.63 \leqslant x \leqslant 4.13;$$

$$\mu_{C_{\tilde{B}}}(x) = 1 - \left|\frac{1.6x - 6.2}{1.2 - 0.1x}\right|, \ 3.33 \leqslant x \leqslant 4.35.$$

由定理4可知,$\tilde{A}, \tilde{B}$质心的近似单调变换为

$$C^*_{\tilde{A}}(t) = 3.875 + 0.247t, \ -1 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$C^*_{\tilde{B}}(t) = 3.875 + 0.508t, \ -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

当E为三角结构元时,$\tilde{A}, \tilde{B}$质心的近似隶属函数分别为

$$\mu^*_{C_{\tilde{A}}}(x) = 1 - \left|\frac{x - 3.875}{0.247}\right|, \ 3.63 \leqslant x \leqslant 4.12;$$

$$\mu^*_{C_{\tilde{B}}}(x) = 1 - \left|\frac{x - 3.875}{0.508}\right|, \ 3.37 \leqslant x \leqslant 4.38.$$

$\tilde{A}, \tilde{B}$质心与近似质心的图像比较如图3和图4所示.

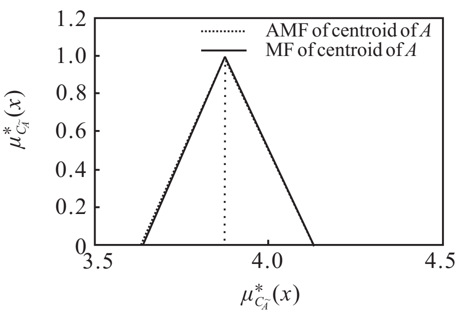

图3　$\tilde{A}$的质心和近似质心

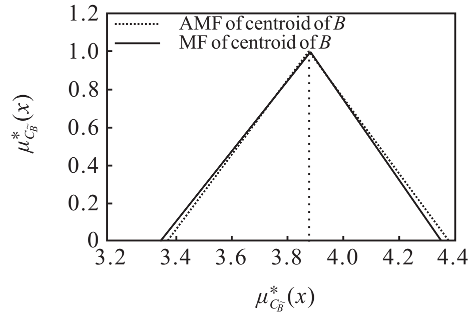

图 4 $\tilde{B}$的质心和近似质心

因为Type-2模糊集$\tilde{A}$, $\tilde{B}$都满足$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \ll 1$,所以它们的近似质心与其真实质心的拟合都比较好, 但是,Type-2模糊集$\tilde{A}$中$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0.2$小于$\tilde{B}$的$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0.375$, Type-2模糊集$\tilde{A}$的近似质心与其真实质心的拟合比$\tilde{B}$更好一些,这从图3和图4中也可以直观看出.

4 结 论

本文定义了正规Type-2模糊集,利用模糊数的结构元理论给出了正规Type-2模糊集的结构元表示. 同时,作为Type-1模糊集的解模糊的扩张,给出了正规Type-2模糊集质心的单调变换函数的求解过程,从而得到正规Type-2模糊集质心的精确结果. 由此可知,Type-2模糊集质心的计算可以归结为实数的模糊加权平均,因而3.2节的求解过程也可以看成模糊加权平均的求解步骤,

当正规Type-2模糊集次隶属函数可通过正则对称结构元E线性表示时,给出了其质心的单调变换函数的近似结果,从而得到其质心的近似表示. 该近似结果的计算简单,且与其次隶属函数的模糊数类型一致. 遗憾的是,对质心的精确结果与近似结果之间的偏差没有给出一个统一的刻画.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.

[3] Starczewski J T. A triangular type-2 fuzzy logic system[C]. 2006 IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Vancouver: IEEE, 2006: 1460-1467.

[4] Liang Q, Mendel J M. Interval type-2 fuzzy logic systems: Theory and design[J]. IEEE Trans of Fuzzy Systems, 2000, 8(5): 535-550.

[5] Karnik N N, Mendel J M. Centroid of a type-2 fuzzy set[J]. Information Sciences, 2001, 132(2): 195-220.

[6] Wu D, Tan W. Computationally efficient type-reduction strategies for a type-2 fuzzy logic controller[C]. Proc of IEEE Fuzzy Conf. Reno: IEEE, 2005: 353-358.

[7] Sepulveda R, Castillo O, Melin P, et al. An efficient computational method to implement type-2 fuzzy logic in control applications[M]. 1st ed. Analysis and Design of Intelligent Systems Using Soft Computing Techniques. Heidelberg: Springer-Verlag, 2007: 45-52.

[8] Wu D, Mendel J M. Enhanced karnik-mendel algorithms[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17(4): 923-934.

[9] 王建辉, 纪雯, 方晓柯, 等. 对区间二型模糊集的EKM降型法的改进[J]. 控制与决策, 2013, 28(8): 1165-1172.
(Wang J H, Ji W, Fang X K, et al. Improvement of enhanced Karnik-Mendel algorithm for interval type-2 fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2013, 28(8): 1165-1172.)

[10] Liu F. An efficient centroid type-reduction strategy for general type-2 fuzzy logic system[J]. Information Sciences, 2008, 178(9): 2224-2236.

[11] Lucas L, Centeno T, Delgado M. General type-2 fuzzy inference systems: Analysis, design and computational aspects[C]. Proc of IEEE Int Conf On Fuzzy Systems. London: IEEE, 2007: 1-6.

[12] Starczewski J T. Centroid of triangular and Gaussian type-2 fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2014, 280(10): 289-306.

[13] Mendel J M, John R I B. Type-2 fuzzy sets made simple[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, 10(2): 117-127.

[14] Mendel J M, Rajati M R, Sussner P. On clarifying some definitions and notations used for type-2 fuzzy sets as well as some recommended changes[J]. Information Sciences, 2016, 340(5): 337-345.

[15] Guo S C. Method of structuring element in fuzzy analysis(I)[J]. J of Liaoning Technical University, 2002, 21(5): 670-673.

[16] Guo S C. Method of structuring element in fuzzy analysis(II)[J]. J of Liaoning Technical University, 2002, 21(6): 808-810.

[17] Guo S C. Principle of fuzzy mathematical analysis based on structured element[M]. Shengyang: Northeastern University Press, 2004: 53-96.

[18] 岳立柱, 马卫民, 郭永升. 求解模糊排队性状指标隶属函数的通用方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(4): 925-935.
(Yue L Z, Ma W M, Guo Y S. General method for solving membership function of characters index for fuzzy queueing[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(4): 925-935.)

[19] Guo S C. Linear representation of fuzzy number and fuzzy-valued function using fuzzy structued element[J]. J of Liaoning Technical University, 2006, 25(3): 475-477.

（责任编辑：闫 妍）