

闭环两尺度系统复合LQR控制建模与设计方法

刘文东^{1†}, 范世鹏¹, 李华滨², 包为民³

(1. 北京航天自动控制研究所, 北京 100854; 2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076; 3. 中国航天科技集团公司, 北京 100037)

摘要: 分析了Kokotovic提出的复合LQR控制器设计方法,以复合控制与最优控制的性能指标差异为依据,评判了设计控制器过程中所建立的标准两尺度系统模型是否符合系统内在的时间尺度特性;指出了以开环时间尺度特性分解系统的缺陷,分析了系统参数变化对闭环时间尺度特性的影响;基于闭环时间尺度特性分析,提出了将一般线性动力学方程转换为标准两尺度系统形式的方法,并分析了小参数 μ 在复合控制器设计中的影响.依据该标准两尺度模型设计的控制器能够敏感由系统参数变化或反馈控制变化导致的时间尺度特性的改变,并能够得到满意的控制效果.

关键词: 两时间尺度; 复合LQR控制; 时间尺度特性; 系统建模

中图分类号: O23

文献标志码: A

Modelling and design of composite LQR with close-loop two time scales

LIU Wen-dong^{1†}, FAN Shi-peng¹, LI Hua-bin², BAO Wei-min³

(1. Beijing Aerospace Automatic Control Institute, Beijing 100854, China; 2. Beijing Institute of Aerospace Systems Engineering, Beijing 100076, China; 3. China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100037, China)

Abstract: According to the analysis of the composite LQR design method proposed by Kokotovic, whether the standard two-scale model established during controller design meets the inherent system time scale characteristic is judged based on the difference between the performance index of composite and optimal control. The defect of system decomposition according to open-loop characteristic is presented and the influence of the system parameter change to closed-loop time scale characteristic is also analyzed. A method to convert the general linear dynamic equations to a standard two-scale model is proposed based on the closed-loop time scale characteristic analysis. The influence of the small parameter μ on the composite control design is also analyzed. Finally, according to the standard two-scale model, the controller can be sensitive to the change of the time scale characteristics caused by the change of system parameters or feedback control, and can get satisfactory control effect.

Keywords: two time scale; composite LQR controller; time scale characteristic; system modeling

0 引言

对于两时间尺度系统,普遍认为^[1-3]可以将其分解为快慢两个子系统,复合子系统的解即可得到原系统解的近似解.整个过程不仅降低了计算复杂度,亦能保证近似的精度,因此受到了工程领域^[4-5]的广泛关注.

对于具有标准两尺度系统形式,即高阶微分项前或状态空间形式中微分项前包含小参数的系统,求得复合的近似解并不困难,精度也能够保证^[6].然而,这一切的前提是标准两尺度模型必须符合系统内在时间尺度特性,否则不能满足近似过程的条件^[7],所得

的复合解也没有意义.因此,如何分析系统时间尺度特性以判断其是否为两尺度系统,并将具有两尺度特性的一般动力学系统转换为标准两尺度系统形式的研究至关重要.目前这方面的研究成果较少.

曾有研究者^[8-10]利用无量纲化、强迫奇异摄动等方法得到小参数,进而获得标准两尺度形式,然而此类方法过分依赖于经验和先验知识,且易受突发情况影响,不具有推广性.也有研究者^[7]依据系统开环特征值设计了将线性系统转换为标准两尺度形式的方法,但该方法的控制效果受系统参数变化影响较大.

本文分析了Kokotovic等提出的模态划分方

收稿日期: 2016-03-27; 修回日期: 2016-07-01.

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(61403355).

作者简介: 刘文东(1987—),男,博士生,从事两尺度飞行系统控制的研究; 范世鹏(1986—),男,博士后,从事飞行器制导与控制、半实物仿真的研究

[†]通讯作者. E-mail: liuwendong15@163.com

法^[6,11],并从令该方法失效的一个实例出发,分析了反馈控制对系统时间尺度特性的影响,提出了闭环时间尺度特性的分析方法.以该方法为基础,可以将具有闭环两尺度特性的一般线性动力学系统转换为开环标准两尺度系统形式,由此设计控制器能够得到满意的控制效果.

1 Kokotovic方法及其失效的实例

1.1 标准两尺度系统模型及复合控制器设计

对于线性系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{A_{21}}{\mu} & \frac{A_{22}}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{B_1}{\mu} \\ \frac{B_2}{\mu} \end{bmatrix} u, \\ y = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (1)$$

也可以写为标准两尺度模型形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u, \\ \mu\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u, \\ y = C_1x_1 + C_2x_2. \end{cases} \quad (2)$$

其中: x_1 和 x_2 的维度分别为 $n_1 \times 1$ 和 $n_2 \times 1$; μ 为小于 1 的小参数.若 A_{22} 可逆,则系统可近似分解为两个子系统.慢子系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_s = A_o x_s + B_o u_s, \\ y_s = C_o x_s + D_o u_s. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_s, \bar{y} = y_s, \bar{u} = u_s, \\ A_o = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \\ B_o = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \\ C_o = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}, \\ D_o = -C_2A_{22}^{-1}B_2. \end{cases} \quad (4)$$

快子系统为

$$\begin{cases} \mu\dot{x}_f = A_{22}x_f + B_2u_f, \\ y_f = C_2x_f. \end{cases} \quad (5)$$

假设求原系统的输出调节器问题,性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (y'y + u'Ru)dt, \quad (6)$$

则可对两个子系统分别求解 Riccati 方程

$$\begin{aligned} 0 &= K_s(A_o - B_oR^{-1}D_o'C_o) + \\ &(A_o - B_oR^{-1}D_o'C_o)'K_s - \\ &K_sB_oR^{-1}B_o'K_s + C_o'(I - D_oR^{-1}D_o')C_o, \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 = K_fA_{22} + A_{22}'K_f - K_fB_2R^{-1}B_2'K_f + C_2'C_2. \quad (8)$$

解得子系统的反馈控制 $u_s = G_o x_s, u_f = G_2 x_f$.若能满足 $A_o + B_oG_o$ 稳定、 $A_{22} + B_2G_2$ 稳定,则可得到复合控制器

$$u_c = -R^{-1}B' \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ \mu K_f' & \mu K_f \end{bmatrix} x = -R^{-1}B'M_c x. \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\mu} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\ K_m &= (K_s(B_1R^{-1}B_2'K_f - A_{12}) - (A_{21}'K_f + \\ &C_1'C_2)) \cdot (A_{22} - B_2R^{-1}B_2'K_f)^{-1}. \end{aligned}$$

复合控制的性能指标可以写成 $J_c = \frac{1}{2}x_0'P_c x_0$ 的形式,其中 P_c 满足

$$\begin{aligned} 0 &= P_c(A - BR^{-1}B'M_c) + (A - \\ &BR^{-1}B'M_c)'P_c + M_c'BR^{-1}B'M_c + C'C. \end{aligned} \quad (10)$$

可以证明 J_c 与原系统(1)的最优控制 J_{opt} 相差 $O(\mu^2)$ 量级^[6],即

$$J_c = J_{opt} + O(\mu^2). \quad (11)$$

其中

$$J_{opt} = \frac{1}{2}x_0'Px_0, \quad (12)$$

P 满足

$$0 = PA + A'P - PBR^{-1}B'P + C'C. \quad (13)$$

1.2 实例仿真及分析

采用某三回路姿态驾驶仪系统模型参数,令

$$\mu = 0.1, R = 1,$$

$$A = \begin{bmatrix} -2.74 & 1370 & 0 & 210 \\ -0.10511 & -2.89 & -189.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -40000 & -280 \end{bmatrix},$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 40000]^T,$$

$$C = [0 \ 1 \ 1 \ 1],$$

$$x_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T.$$

最优性能指标定义同式(6).

欲使用两尺度理论简化计算必须先将一般动力学方程转换为标准两尺度系统(2)的形式.标准形式(2)暗含的信息包括快慢子系统的维度及子系统所包含的变量.按照文献[6-7]中的方法,状态变量中包含的姿态角与舵偏角使系统系数矩阵 A 具有明显的两尺度特性,其特征值为 $-2.815 \pm 12i$ 和 $-140 \pm$

142.83 i. 因此可以断定其快慢子系统维度均为二维, 原系统转换为如式(2)的标准形式后各项系数如下:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -2.74 & 1370 \\ -0.10511 & -2.89 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 210 \\ -189.15 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -4000 & -28 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = [0 \ 0]^T, B_2 = [0 \ 4000]^T;$$

$$C_1 = [0 \ 1], C_2 = [1 \ 1].$$

仿真求得其复合控制性能指标 $J_c = 16.4598$, 与原系统最优性能指标 $J_{opt} = 5.6746$ 相差较大, 偏差远大于 $0(\mu^2)$ 量级, 这与1.1节推导的结论矛盾. 因此可以推断前文转换的标准两尺度模型与系统实际时间尺度特性不符.

为了探究系统参数与系统时间尺度特性的关系, 选定 B 阵中 b_{14} 为变量, 将 b_{14} 值从 10^1 放大到 10^5 , 仿真分析复合控制性能 J_c 的变化.

表1 参数 b_{14} 变化对开环特性建模方法的影响

	b_{14}				
	1.00e+1	1.00e+2	1.00e+3	1.00e+4	1.00e+5
J_{opt}	35.3169	34.2691	16.0829	6.4428	5.6058
J_c	35.3169	34.2696	16.2692	13.0585	17.2444
ABG	-2.82	-2.83	-3.47	-5.3	-7
	-2.82	-2.83	-3.47	-5.3	-7
	-140.09	-148.75	-44.55	-12.9	-8
	-140.09	-148.75	-998.18	-9999.9	-100000
$A_o B_o G_o$	-2.8151	-2.8248	-3.6681	-0.4123	-0.1
	-2.8151	-2.8248	-3.6681	-4.1124	-2.0033
$A_{22} B_{22} G_{22}$	-14.009	-14.866	-4.0077	-41.8483	-172.12
	-14.009	-14.866	-99.8396	-999.99	-10000

表1中, ABG 、 $A_o B_o G_o$ 、 $A_{22} B_{22} G_{22}$ 行内分别为闭环系统、慢子系统、快子系统特征值.

B 阵的改变不影响系统开环特征值, 故按照文献[7]中的方法, 系统应当仍旧被分解为两个两维子系统, 而这种分解方法上文实例已证明其不能保证始终符合系统时间尺度特性. 同时也应看到, B 阵的变化改变了系统的闭环特性, 从表1可以看出, 当 b_{14} 的值为 10^4 量级时, 系统的闭环特征值表明当前的闭环系统时间尺度特性为三维慢子系统加一维快子系统. 这说明, 由于反馈控制的引入, 系统的时间尺度特性随之改变, 考虑到对于全状态反馈可以任意配置系统极点, 即全状态反馈能够任意改变系统的时间尺度特性. 故对于开环系数矩阵 A 具有多尺度特性的情

况, 可能通过状态反馈使得闭环系统不具备多尺度的特性或具有不同的分块结构, 从而使基于 A 特征尺度设计的控制器失效. 反之, 即便 A 不具备多尺度的特性, 若闭环系统具备多尺度特性, 也能通过对 A 的分块设计满足精度要求的复合控制器.

在此基础上, 提出基于系统闭环特征值分析的闭环两尺度系统标准形式建模方法.

2 闭环两尺度系统标准开环两尺度形式建模方法及控制性能仿真

对于一般线性系统, 若不考虑控制量, 则可称其为开环形式, 一旦确定了拟加入的控制量, 即可分析闭环系统的时间尺度特性. 对于加入控制量后具有

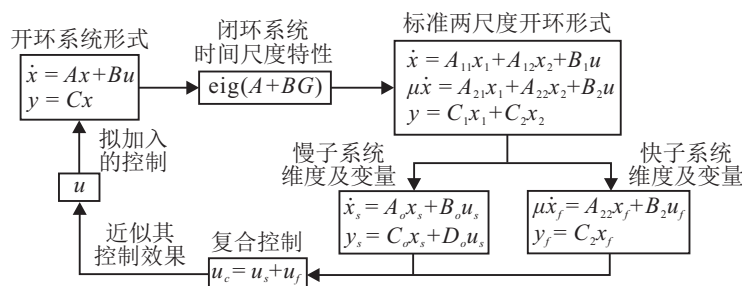


图1 闭环两尺度系统复合控制设计流程

闭环两尺度特性的系统,可将其转换为标准两尺度系统形式,然而该形式仍然是开环系统形式.因为希望利用两尺度理论将该标准形式分解成低阶系统求解,所以并无对应于该标准形式的统一闭环控制量.将标准形式分解为低阶系统后,分别对子系统设计闭环反馈控制,并将其复合为复合控制,最终使复合控制作用于原系统得到的控制性能近似于原系统拟加入控制量的控制性能.具体流程如图1所示.

由上文可知,利用两尺度理论处理线性系统问题的关键在于如何将一般线性动力学系统模型转换为符合系统闭环时间尺度特性的标准两尺度模型,归根到底是需要求得系统参数矩阵 A 、 B 、 C 的分块形式,即 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{21} 、 A_{22} 、 B_1 、 B_2 、 C_1 和 C_2 .

基于闭环时间尺度特性的系统参数矩阵的分块方法如图2所示.若希望利用两尺度理论解决问题,在确定了系统拟加入的反馈控制后,必须确定用于判定多尺度的门限 μ ,即当状态变量变化速率相差 μ 倍时,可以认为系统状态变量划分为快变量和慢变量, μ 必须小于1,且为常值.若系统为闭环两尺度系统,则需依据 μ 判断慢子系统维度 n_1 ,并将 $\binom{n}{n_1}$ 作为循环次数,依此通过行列变换得到闭环系统系数矩阵 $A + BG$ 的左上、右下分块形式,且左上分块维度为 n_1 .计算左上、右下子块的秩、特征值及其各自特征值的分离程度,最终选取同时满足如下条件的分块方法为符合闭环系统时间尺度特性的分块方法,依此得到的

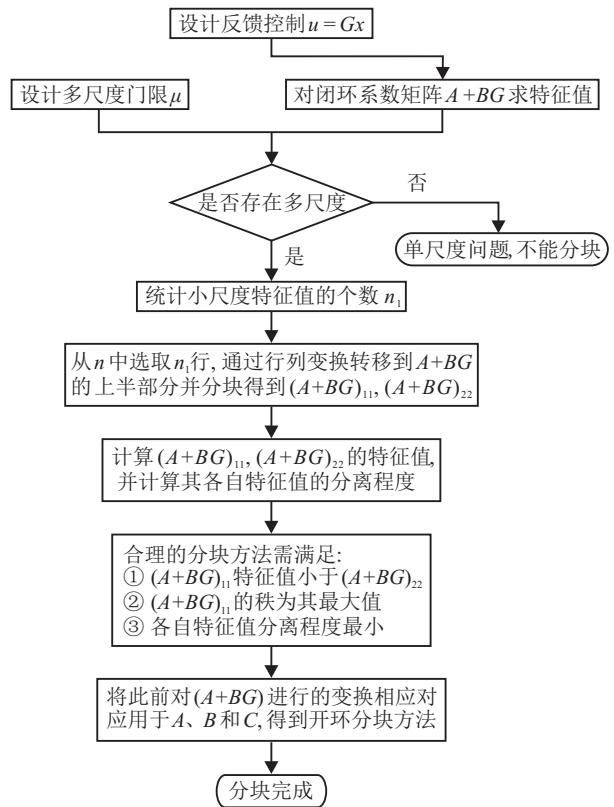


图2 基于闭环特征值的分块流程

标准两尺度开环形式能够保证满意的控制性能:

- 1) 左上子块特征值均小于右下子块特征值;
- 2) 左上子块秩为其可能的最大值;
- 3) 左上、右下子块特征值分离程度最小.

由表1参数,利用依据闭环特性的建模方法得到的仿真结果如表2所示.

表2 参数 b_{14} 变化对闭环特性建模方法的影响

	b_{14}				
	1.00e+1	1.00e+2	1.00e+3	1.00e+4	1.00e+5
J_{opt}	35.3169	34.2691	16.0829	6.4428	5.6058
J_c	35.3169	34.2696	16.0832	6.4428	5.6058
ABG	-2.8151	-2.8251	-3.465	-5.3018	-6.5684
	-2.8151	-2.8251	-3.465	-5.3018	-6.5684
	-140.09	-148.75	-44.546	-12.856	-8.2815
$A_o B_o G_o$	-2.8151	-2.8248	-3.4651	-5.3057	-6.5691
	-2.8151	-2.8248	-3.4651	-5.3057	-6.5691
$A_{22} B_{22} G_{22}$	-14.009	-14.866	-42.781	-12.84	-8.28
	-14.009	-14.866	-103.85	-1000.4	-10000

由表2可知,当 b_{14} 值为 10^4 量级时,闭环系统系数矩阵特征值尺度发生了变化,使用依据闭环时间尺度特性建模的方法后,低维子系统的维度发生了相应

变化.慢子系统维度变为三维,快子系统维度变为一维.因此,复合控制性能得到了显著改善.

仿真结果表明,根据闭环系统特征值的分块方法

能够准确地捕捉到由于系统参数变化或反馈控制量变化导致的时间尺度特性变化,并能调整系统分块得到合理的标准两尺度形式,从而得到满意的复合控制效果.

3 控制器设计、性能指标与 μ 的关系

由式(9)可知,复合控制 u_c 中与 μ 相关的项为 $\mu K_m, \mu K_f$,为了分析 μ 的大小对复合控制的影响,可令 μ 变化为原来的 k 倍,即系统(1)变为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{1}{k\mu}kA_{21} & \frac{1}{k\mu}kA_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \frac{1}{k\mu}kB_2 \end{bmatrix} u. \quad (14)$$

$k\mu$ 对应的 K_f^* 满足

$$0 = K_f^*kA_{22} + kA'_{22}K_f^* - K_f^*kB_2R^{-1}kB'_2K_f^* + C'_2C_2. \quad (15)$$

显然 $K_f^* = \frac{1}{k}K_f$,即 μK_f 与 μ 无关.同理

$$\begin{aligned} K_m^* &= \left(K_s \left(B_1 R^{-1} k B'_2 \frac{1}{k} K_f - A_{12} \right) - \left(k A'_{21} \frac{1}{k} K_f + C'_1 C_2 \right) \right) \times \\ &\quad \left(k A_{22} - k B_2 R^{-1} k B'_2 \frac{1}{k} K_f \right)^{-1} = \\ &\quad \left(K_s (B_1 R^{-1} B'_2 K_f - A_{12}) - (A'_{21} K_f + C'_1 C_2) \right) \times \\ &\quad (A_{22} - B_2 R^{-1} B'_2 K_f)^{-1} k^{-1} = \\ &\quad \frac{1}{k} K_m. \end{aligned} \quad (16)$$

即 μK_m 与 μ 无关.

由于 k 值可以是任意的,这意味着在确定了系统(2)分块结构的情况下, u_c 的设计与 μ 无关,然而其控制性能(11)却与 μ 相关.这看似矛盾,实际上是由于小参数 μ 是判断系统多尺度的门限, μ 的大小影响着系统的分块结构,进而影响复合控制及其控制性能.

4 结 论

通过对两尺度复合LQR控制器的研究,分析了系统参数变化及反馈控制对系统时间尺度特性的影响,提出了以系统闭环时间尺度特性分析为基础的将一般线性动力学方程转换为标准两尺度系统模型

的方法,这为判断一般动力学问题能否使用两尺度理论简化求解提供了依据,同时也为希望系统能够降阶控制的反馈控制器设计提供了参考.

参考文献(References)

[1] 周明儒,林武忠,倪明康,等.奇异摄动导论[M].第1版.北京:科学出版社,2014:57-104.
(Zhou M R, Lin W Z, Ni M K, et al. An introduction to the singular perturbation[M]. 1st ed. Beijing: Science Press, 2014: 57-104.)

[2] Hinch E J. Perturbation Methods[M]. 1st ed. Beijing: Beijing World Publishing Corporation, 2006: 52-74.

[3] Joseph Z Ben-Asher. Optimal control theory with aerospace applications[M]. 1st ed. Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010: 179-199.

[4] Rudrapatna V R. Multiple scales theory and aerospace applications[M]. 1st ed. Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010: 183-547.

[5] 乔清青,陈万春.基于动态逆的空空导弹奇异摄动中制导律[J].北京航空航天大学学报,2011,37(11):1365-1371.
(Qiao Q C, Chen W C. The guidance law for singular perturbation of air to air missile based on dynamic inversion[J]. J of Beihang University, 2011, 37(11): 1365-1371.)

[6] Chow J H, Kokotovic P V. A decomposition of nearoptimum regulators for systems with slow and fast modes[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1976, 21(5): 701-705.

[7] Kokotovic P V, Haddad A H. Controllability and timeoptimal control of systems with slow and fast modes[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1975, 20(1): 111-113.

[8] Calise A J, Markopoulos N, Corban J E. Nondimensional forms for singular perturbation analyses of aircraft energy climbs[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 1994, 17(3): 584-590.

[9] Shinar J. On applications of singular perturbation techniques in nonlinear optimal control[J]. Automatica, 1983, 19(2): 203-211.

[10] Ardema M, Rajan N. Slow and fast state variables for three-dimensional flight dynamics[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 1985, 8(4): 532-535.

[11] Naidu D S, Calise A J. Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: A survey[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(6): 1060-1061.

(责任编辑: 齐 霁)