文章编号: 1001-0920(2017)04-0763-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0314

改进的优势度决策法及其排序方法

孙金辉[1†], 林志明[2], 李 东[1]

(1. 东南大学 经济管理学院, 南京 210096；2. 福州大学 至诚学院, 福州 350002)

摘 要: 基于方案比较视角,提出解决混合测度问题的优势度决策方法;给出一组优势相关定义,改进其计算公式,并证明优势度矩阵具有良好的互补性和一致性;分别从排序向量、优势向量、比较向量3方面研究方案优劣的排序方法及其特点,并与线性加权法及理想点法进行对比分析. 实例结果表明,所提出的方法计算量小、精确性高且通用性好.

关键词: 混合测度；方案比较；优势度矩阵；一致性；比较向量

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

An approach of decision making with improved dominance degree and its sorting

SUN Jin-hui[1†], *LIN Zhi-ming*[2], *LI Dong*[1]

(1. School of Economic and Management，Southeast University，Nanjing 210096，China；2. Zhicheng College，Fuzhou University，Fuzhou 350002，China)

Abstract: A dominance method is proposed to solve mixed-measure decision problems based on the comparison alternative approaches. A group of dominances is defined and certain some dominance formulas are improved. The complementarily and consistency of the dominance matrix are validated. Then, a sorting method is investigated from the perspectives of sorting vector, dominance vector and comparing vector, respectively. A comparison is donducted between the proposed method and linear weighting methods and ideal point methods. Finally, numerical example illustrates that the proposed method has advantages such as low complexity, high precision and good versatility.

Keywords: mixed measure；alternatives comparison；dominance matrix；consistency；comparing vector

0 引 言

多属性决策问题一直是决策科学和系统工程等领域的研究热点,其研究成果在投资决策、效益评价、双边匹配、站点选址、项目评估等领域得到了广泛且成功的运用[1-4]. 但是,解决这些问题的模型一般都要求决策矩阵具有单一的数据测度,或能够变换为统一的测度形式,直接基于混合测度决策矩阵的决策在理论方法和具体应用上并不多见.

现有文献中介绍的基于方案比较思想的决策方法分为定向和定量两大类,前者如基于级别不劣关系的偏好排序Promethee法和ELECTRE法等[5],它们刚开始只是提炼出粗糙、初始、不完全的偏好关系,进一步利用已知的决策数据,将偏好关系细化、具体化、完全化,最后形成一个偏好关系有序图,达到方案排序的目的. 这类定向方法只确定优劣方向,不关心优劣幅度,且方案比较关系混乱,既不是两两比较,也不是全比较,容易导致决策信息遗漏或重复,影响决策的科学性与严谨性,故真正使用这类方法进行决策的也不多见. 定量方法则是利用方案优劣的倍数关系构造互反判断矩阵,利用定和关系(和为1)构造互补判断矩阵[6-10],前者以倍数关系,后者以距离关系反映一方案对另一方案的优劣程度,同时涵盖了优劣方向和优劣幅度信息. 文献[11]针对属性数据集结后以三角模糊数呈现的方案评价信息,确立一种可能度公式来衡量两方案的相对优劣,进而构造可能度互补判断矩阵对方案排序,但公式的计算结果对一些特殊点的分辨有误[12],且方案比较时,点靠后影响决策结果的准确性;文献[13-15]提出了另一种衡量方案间相对优劣的计算公式,但该公式仅以优势指标的个数作为方案优劣比较的依据,放弃了对优势指标优势幅

收稿日期: 2016-03-17；**修回日期:** 2016-06-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(91372196).

作者简介: 孙金辉(1973−), 男, 副教授, 博士, 从事商业模式的创新与理论决策的研究；林志明(1976−), 男, 讲师, 博士, 从事信息化管理与信息服务的研究.

†通讯作者. E-mail: 13755013345@163.com

度的度量和指标重要性的考量,决策结果缺乏理论上的严谨性和可靠性.

针对上述问题,也是基于方案比较思路,本文对缩小问题规模到2个方案单个属性单实值的比选排序思想进行拓展,并运用于多个方案多属性混合测度数据的优选问题,从原始属性数据的比较扩展到方案比较,重新定义优势度的相关概念,并提出优势度计算的新公式,证明优势度矩阵的互补性和一致性,并分别从排序向量、优势向量、比较向量3个方面研究方案优劣的排序方法及其特点,最后分析了排序方法的划分本质并总结了决策步骤.

1 预备知识

定义1[10] 令判断矩阵$B=(b_{ij})_{m\times m}$,令$M=\{1,2,\cdots,m\}$,$i,j\in M$,若满足$0\leqslant b_{ij}\leqslant 1$,$b_{ij}+b_{ji}=1$,$b_{ii}=0.5$,则称$B$是实数互补判断矩阵.

定义2[16] 若实数互补判断矩阵$B=(b_{ij})_{m\times m}$,$\forall i,j,k\in M$,均有$b_{ij}=b_{ik}-b_{jk}+0.5$成立,则称矩阵B为加性一致性矩阵(互补判断矩阵).

根据上述定义, 可得到如下结论.

定理1 对一致性互补判断矩阵$B=(b_{ij})_{m\times m}$,若$\exists i,j,k\in M$,则:

1) 若有$b_{ki}>b_{kj}$,则$b_{ji}>0.5$,即$b_{ij}<0.5$;

2) 若有$b_{ik}>b_{jk}$,则$b_{ij}>0.5$,即$b_{ji}<0.5$;

3) 若有$b_{ik}=b_{jk}$,则$b_{ij}=0.5$,即$b_{ji}=0.5$;

4) 若有$b_{ki}=b_{kj}$,则$b_{ij}=0.5$,即$b_{ji}=0.5$.

2 主要结果

为了便于说明,记$M=\{1,2,\cdots,m\}$,$N=\{1,2,\cdots,n\}$. 设备选方案组成方案集$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,属性集记为$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,决策者对方案x_i的指标u_j的评价值(或测得的属性值)为a_{ij},a_{ij}可以是实数、有序语言变量、区间数、三角模糊数等数据,所构成的决策矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$. 记规范化矩阵$R=(r_{ij})_{m\times n}$,对于精确数[1],有

$$r_{ij}=\frac{a_{ij}}{\max\limits_{j}\{a_{ij}\}},\ i\in M,j\in N;$$

对于三角模糊数[11],有

$$\begin{cases} r_{ij}^L=a_{ij}^L\Big/\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n(a_{ij}^U)^2},\\ r_{ij}^M=a_{ij}^M\Big/\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n(a_{ij}^M)^2},\\ r_{ij}^U=a_{ij}^U\Big/\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n(a_{ij}^L)^2},\\ \quad i\in M,j\in N.\end{cases}$$

设属性权重向量为$W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$. 本节将研究基于优势度的不同排序方法,并总结各自的特点和决策步骤.

2.1 优势度的计算

定义3 称$J_{pq1}=\{u_j|r_{pj}\succ r_{qj},\ p,q\in M,j\in N\}$为方案$x_p$对方案$x_q$的优势指标集. 优势指标集反映了方案$x_p$与方案$x_q$进行优劣比较时,前者比后者优势指标的内容. 对规范化后的清晰数(实数和语言变量)可直接按大小或级别比较,对模糊数(三角模糊数和区间数)可按照可能度大小以0.5为优劣分界点进行属性优劣比较. 同理,可定义劣势指标集和等势指标集.

定义4 称$J_{pq2}=\{u_j|r_{pj}\prec r_{qj},p,q\in M,j\in N\}$为方案$x_p$对方案$x_q$的劣势指标集.

定义5 称$J_{pq3}=\{u_j|r_{pj}\equiv r_{qj},p,q\in M,j\in N\}$为方案$x_p$对方案$x_q$的等势指标集.

由上述定义易证下列结论均成立.

定理2

1) $U=J_{pq1}\bigcup J_{pq2}\bigcup J_{pq3}$;

2) $J_{pq1}=J_{qp2}$;

3) $J_{pq2}=J_{qp1}$;

4) $J_{pq3}=J_{qp3}$;

5) $J_{pp1}=J_{pp2}=\varnothing$.

定义6 称$d_{pqk}^+=|r_{pk}-r_{qk}|(p,q\in M,u_k\in J_{pq1})$为方案$x_p$对方案$x_q$在$k$点的优势距离. 若规范化后的$r$值为清晰数,则可直接按绝对距离取;若为模糊数,则可根据文献[17]提出的区间数距离公式或文献[18]提出的三角模糊数距离公式求出,下述定义相同.

定义7 称$d_{pqk}^-=|r_{qk}-r_{pk}|(p,q\in M,u_k\in J_{pq2})$为方案$x_p$对方案$x_q$在$k$点的劣势距离.

由于r_{pk}、r_{qk}均已规范化,结合定义及相应的距离公式易证下列结论均成立.

定理3

1) $0\leqslant d_{pqk}^+\leqslant 1$;

2) $0\leqslant d_{pqk}^-\leqslant 1$;

3) $d_{pqk}^+=d_{qpk}^-$.

定义8 称$wd_{pq}^+=\sum\limits_{u_k\in J_{pq1}}d_{pqk}^+w_k\ (p,q\in M)$为方案$x_p$对方案$x_q$的带权优势量. 该定义反映了某一方案对另一方案在优势指标上经规范化后的绝对优势幅度.

定义9 称$wd_{pq}^-=\sum\limits_{u_k\in J_{pq2}}d_{pqk}^-w_k\ (p,q\in M)$为方案$x_p$对方案$x_q$的带权劣势量. 该定义反映了某一方案对另一方案在劣势指标上经规范化后的绝对劣势幅度.

根据上述定义, 结合定理3, 易证如下结论.

定理4

1) $0 \leqslant wd_{pq}^{+} \leqslant 1$;

2) $0 \leqslant wd_{pq}^{-} \leqslant 1$;

3) $wd_{pq}^{+} = wd_{qp}^{-}$.

定义10　方案间优势度定义为两方案进行优劣比较时的相对优势幅度,可按如下优势度公式计算:

$$v_{pq} = 0.5 + \frac{wd_{pq}^{+} - wd_{qp}^{+}}{2} = 0.5 + \frac{wd_{pq}^{+} - wd_{pq}^{-}}{2},\quad p, q \in M. \tag{1}$$

该优势度反映了方案进行比较时的相对优势大小,以0.5为分界点. 若$v_{pq} = 0.5$,则方案x_p和方案x_q优势等同,即互无优势和劣势,在评价结果上是无异的;若$v_{pq} > 0.5$,即$wd_{pq}^{+} > wd_{qp}^{+}$,则由定义知,在优劣方向上,方案$x_p$优于$x_q$,在优劣幅度上,该值越大(越接近1)优势越明显;反之,若$v_{pq} < 0.5$,则方案x_p是劣于x_q的(即x_q优于x_p),该值越小(越接近0),劣势越明显,即方案x_q对x_p的优势越明显.

2.2　排序方法探讨

2.2.1　基于排序向量的排序方法

定义11　称由所有的方案两两比较得到的优势度构成的矩阵$V = (v_{pq})_{m\times m}$为优势度矩阵.

定理5　优势度矩阵一定是互补判断矩阵.

证明　由定理4可知

$$0 \leqslant 0.5 + \frac{wd_{pq}^{+} - wd_{pq}^{-}}{2} \leqslant 1,$$

即$0 \leqslant v_{pq} \leqslant 1$成立. 又

$$v_{pq} + v_{qp} = \left(0.5 + \frac{wd_{pq}^{+} - wd_{pq}^{-}}{2}\right) + \left(0.5 + \frac{wd_{qp}^{+} - wd_{qp}^{-}}{2}\right) = 1,$$

因为$wd_{pp}^{+} = wd_{pp}^{-} = 0$,根据定义10有 $v_{pp} = (0.5 + 0) = 0.5$.

由定义1可知,V是互补判断矩阵. 可根据文献[19]提出的排序向量公式$v = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^{\mathrm{T}}$对各分量降序排列得到方案排序结果. v_p计算如下:

$$v_p = \frac{\sum\limits_{q=1}^{m} v_{pq} + \dfrac{m}{2} - 1}{m(m-1)},\ p = 1, 2, \cdots, m. \tag{2}$$

2.2.2　基于优势向量的排序方法

在排序向量方法中,由于任意两方案间都要计算优势度,存在大量冗余信息和重复运算,所以优势度矩阵的计算工作量较大. 为减少计算,进一步研究优势度矩阵的一致性问题.

定理6　优势度矩阵是一致性的互补判断矩阵.

证明　对互补判断矩阵$V = (v_{pq})_{m\times m}, \forall p, q, h \in M, k \in N$,计算

$$\begin{aligned}
&v_{ph} - v_{qh} + 0.5 = \\
&\left(0.5 + \frac{wd_{ph}^{+} - wd_{ph}^{-}}{2}\right) - \left(0.5 + \frac{wd_{qh}^{+} - wd_{qh}^{-}}{2}\right) + 0.5 = \\
&\frac{\sum\limits_{u_k\in J_{ph1}} d_{phk}^{+} w_k - \sum\limits_{u_k\in J_{ph2}} d_{phk}^{-} w_k}{2} - \frac{\sum\limits_{u_k\in J_{qh1}} d_{qhk}^{+} w_k - \sum\limits_{u_k\in J_{qh2}} d_{qhk}^{-} w_k}{2} + 0.5 = \\
&\frac{\sum\limits_{u_k\in J_{ph1}} |r_{pk} - r_{hk}| w_k - \sum\limits_{u_k\in J_{ph2}} |r_{hk} - r_{pk}| w_k}{2} - \frac{\sum\limits_{u_k\in J_{qh1}} |r_{qk} - r_{hk}| w_k - \sum\limits_{u_k\in J_{qh2}} |r_{hk} - r_{qk}| w_k}{2} + 0.5 = \\
&\frac{\sum\limits_{u_k\in U} (r_{pk} - r_{hk}) w_k - \sum\limits_{u_k\in U} (r_{qk} - r_{hk}) w_k}{2} + 0.5 = \\
&\frac{\sum\limits_{u_k\in U} (r_{pk} - r_{qk}) w_k}{2} + 0.5 = \\
&0.5 + \frac{\sum\limits_{u_k\in J_{pq1}} d_{pqk}^{+} w_k - \sum\limits_{u_k\in J_{pq2}} d_{pqk}^{-} w_k}{2} = \\
&0.5 + \frac{wd_{pq}^{+} - wd_{pq}^{-}}{2} = v_{pq}.
\end{aligned}$$

对$\forall p, q, h \in M$,有$v_{ph} - v_{qh} + 0.5 = v_{pq}$恒成立,由定义2可知,该优势度矩阵是一致性的互补判断矩阵. 优势度体现了良好的一致性,既反映了方案间比较时的优劣方向,又包含了优劣的相对幅度,所以不需要方案间两两比较,而只需要以某一方案为参照方案完成一次全比较就可得到排序结果,大大减少了计算工作量,且排序结果与式(2)排序向量方法的排序结果保持一致. □

定义12　称以方案x_k对所有方案作全比较时得到的优势度构成的向量为基于x_k的高点一致性优势向量,记为$\bar{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, \cdots, v_{km})^{\mathrm{T}}, k \in M$.

定义13　称所有方案对方案x_k作全比较时得到的优势度构成的向量为基于x_k的低点一致性优势向量,记为$\underline{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \cdots, v_{mk})^{\mathrm{T}}, k \in M$,则优势度矩阵

$$V = (v_{pq})_{m\times m} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_m)^{\mathrm{T}} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_m) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mm} \end{bmatrix}.$$

因为优势度矩阵具有一致性的良好特性,其行向

量$\bar{v}_k$和列向量$\underline{v}_k$同样也保持着一致性. 根据定理1的结论,对高点优势向量$\bar{v}_k$按其分量升序排列,对低点优势向量$\underline{v}_k$按其分量降序排列,得到方案排序结果依然与式(2)排序向量方法的排序结果是一致的.

2.2.3 基于比较向量的排序方法

优势向量排序方法计算量小,但选取不同的基点方案x_k和不同基点方向时,得到的一组优势度值(即优势向量)和归一化后的向量也均不相同,尽管保持排序结果不变. 为了去掉因基点方案和基点方向产生的差异, 统一成归一化后的向量形式, 现对优势向量$\bar{v}_k$或$\underline{v}_k$施以相应的数学变换.

对高点优势向量$\bar{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, \cdots, v_{km})^{\mathrm{T}}$,利用互补判断矩阵的性质$v_{ki} + v_{ik} = 1$,求得相应的$v_{ik}$,把$\bar{v}_k$转化为了低点优势向量$\underline{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \cdots, v_{mk})^{\mathrm{T}}$. 再令$v_{gk} = \min\limits_{j\in M} v_{jk}, \sigma_{kg} = v_{kk} - v_{gk}$,对低点优势向量$\underline{v}_k$作平移变换:

$$\underline{v}'_k = (v'_{1k}, v'_{2k}, \cdots, v'_{mk})^{\mathrm{T}} = (v_{1k+}\sigma_{kg}, v_{2k+}\sigma_{kg}, \cdots, v_{mk+}\sigma_{kg})^{\mathrm{T}},$$

使其各分量相对大小依然保持不变,从而不影响排序结果.

定义 14 称向量$v' = (v'_1, v'_2, \cdots, v'_m)^{\mathrm{T}}$为一致性比较向量,其中$v'_p$按如下归一化公式计算:

$$v'_p = \frac{v_{pk} + \sigma_{kg}}{\sum\limits_{q=1}^{m}(v_{qk} + \sigma_{kg})} = \frac{v_{pk} + \sigma_{kg}}{\sum\limits_{q=1}^{m} v_{qk} + m\sigma_{kg}},$$

$$p, q \in M. \tag{3}$$

最后根据一致性比较向量v'的各分量降序排列得到方案排序结果,这与前述的排序结果都是一致的. 由于优势度矩阵的一致性性质,注意到

$$v'_{pk} = v_{pk} + \sigma_{kg} = v_{pk} + v_{kk} - v_{gk} = v_{pk} - v_{gk} + 0.5 = v_{pg}.$$

所以$v'_k = (v'_{1k}, v'_{2k}, \cdots, v'_{mk})^{\mathrm{T}} = (v_{1g}, v_{2g}, \cdots, v_{mg})^{\mathrm{T}}$,这种平移变换,即是将$x_k$作基点比较方案统一转化为以最劣方案$x_g$作基点方案,并置于下基点方向,测试其他方案对$x_g$相对优势幅度并归一化,结合一致性原理作出的方案排序,无论选取何种基点方案和基点方向,所求得的一致性比较向量都是相同的.

2.2.4 排序方法的本质分析

不管采用何种向量($\bar{v}_k$、$\underline{v}_k$和v')排序方案,实际上都是以基点方案x_k作为标准对全体方案作出一个划分,比x_k优的都排在其前面,优的幅度越大排得越靠前,比x_k劣的都排在其后面,劣的幅度越大排得越靠后,所以最劣方案排在最后面,最优方案排在最前面. x_k作为参照点方案,可以任意选取,选取不同,划分时所处位置也相应不同,甚至可以虚拟出一个最劣方案x_{m+1}作为基点方案,其各属性值经规范后均为0(含清晰数或模糊数),此时的优势度决策法就蜕化为简单的线性加权法,经其划分后其他方案都排在其前面;也可虚拟出一个最优方案x_{m+1}作为基点方案,其各属性值经规范化后均为1(含清晰数或模糊数),此时的优势度决策法就蜕化为只考虑绝对贴近度的理想点法,经其划分后其他方案都排在其后面. 线性加权法以最劣方案为参考点并置其于下基点方向,绝对理想点法以最优方案为参考点并置其于上基点方向,而优势度法以任意方案为参考点,上下基点方向均可,最后得到的一致性比较向量却是相同的,排序结果也是一致的.

2.3 决策方法

基于改进的方案比较优势度及排序方法的相关讨论,给出如下决策步骤:

Step 1: 将决策矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$转化为规范化的矩阵$R = (r_{ij})_{m\times n}$;

Step 2: 选取任意基点方案x_k与其他所有方案作全比较,按式(1)分别计算优势度并组成优势向量$\bar{v}_k$或$\underline{v}_k$;

Step 3: 按式(3)对优势向量计算一致性比较向量v';

Step 4: 对一致性比较向量$v' = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_m)^{\mathrm{T}}$,按其分量大小降序排列,得到最终方案优劣排序结果,v'_p值最大者即为最优方案.

3 算例分析

现代大都市由于小汽车保有量迅速增加致使停车困难,建立停车诱导系统(PGIS)是解决该问题的基本对策之一. 本节以如何确定各诱导小区规划建设PGIS的合理顺序为问题原型,阐述所提决策方法的具体实现与应用过程. 表1为根据某市拟申请建设PGIS的6个诱导小区的实际数据所确定的决策数据;u_1、u_2、u_3、u_4、u_5是反映停车难度的5项考核指标(属性). 其中:u_1为土地开发强度(用容积率定量测算),u_2为泊位供应比(用每百平米建筑面积公共车位供应量测算),u_3为停车设施分布合理性,u_4为交通结构合理性,u_5为路网密集程度. 前2项通过定量测算得到,后3项采用专家打分再统计处理以三角模糊数形式给出,中间3项属于成本型指标,另2项属于效益型指标. 决策专家综合意见后给出的属性权重向量为$w = (0.30, 0.20, 0.25, 0.15, 0.10)^{\mathrm{T}}$. 现用所提方法对6个诱导小区停车困难程度进行排序,确定停车最困难的诱导小区.

表 1 拟建PGIS的各诱导小区停车难度相关指标属性值

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.985	0.967	(0.90, 0.92, 0.95)	(0.91, 0.94, 0.95)	(0.93, 0.96,0.99)
x_3	1.225	0.857	(0.84, 0.86, 0.90)	(0.91, 0.94, 0.97)	(0.91, 0.94, 0.96)
x_4	1.029	1.092	(0.91, 0.93, 0.95)	(0.85, 0.88, 0.90)	(0.86, 0.89, 0.93)
x_5	0.863	0.758	(0.90, 0.92, 0.95)	(0.90, 0.95, 0.97)	(0.91, 0.93, 0.95)
x_6	1.215	1.205	(0.88,0.91, 0.95)	(0.86, 0.89, 0.92)	(0.91, 0.92, 0.94)

将原始决策数据建立混合决策矩阵,并将清晰数和模糊数分别规范化,建立规范化的混合决策矩阵

$$\boldsymbol{R}=\left[\begin{matrix}0.804 & 0.784 & (0.381,0.402,0.425)\\ 0.787 & 0.678 & (0.389,0.411,0.430)\\ 1.000 & 0.884 & (0.402,0.430,0.456)\\ 0.840 & 0.694 & (0.381,0.398,0.421)\\ 0.704 & 1.000 & (0.381,0.402,0.425)\\ 0.992 & 0.629 & (0.381,0.406,0.435)\end{matrix}\right. \rightarrow$$

$$\leftarrow \left.\begin{matrix}(0.381,0.399,0.423) & (0.398,0.423,0.447)\\ (0.381,0.408,0.427) & (0.385,0.405,0.429)\\ (0.373,0.399,0.423) & (0.390,0.414,0.434)\\ (0.403,0.426,0.453) & (0.368,0.392,0.420)\\ (0.373,0.395,0.427) & (0.390,0.410,0.429)\\ (0.394,0.421,0.447) & (0.390,0.405,0.425)\end{matrix}\right].$$

随机选择方案x_5作基点方案并置于上基点方向,与所有方案作全比较,分别计算优势度,如计算v_{51}.

对指标u_1,因$0.704 < 0.804$,故$u_1 \in J_{512}$,劣势距离$d_{511}^- = 0.100$;

对指标u_2,因$1.000 > 0.784$,故$u_2 \in J_{511}$,优势距离$d_{512}^+ = 0.216$;

对指标u_3,计算可能度$P(x_5 \geqslant x_1) = 0.500$,故$u_3 \in J_{513}$;

对指标u_4,计算可能度$P(x_5 \geqslant x_1) = 0.425 < 0.500$,故$u_4 \in J_{512}$,进一步根据三角模糊数距离计算公式[18]

$$d(r_1,r_2)=\sqrt{\frac{1}{3}[(r_1^L-r_2^L)^2+(r_1^M-r_2^M)^2+(r_1^U-r_2^U)^2]},$$

计算劣势距离为$d_{514}^- = 0.006$;

对指标u_5,计算可能度$P(x_5 \geqslant x_1) = 0.201 < 0.500$,故$u_5 \in J_{512}$,进一步计算劣势距离为$d_{515}^- = 0.014$.

因此,$J_{511} = \{u_2\}, J_{512} = \{u_1,u_4,u_5\}, J_{513} = \{u_3\}$,再按定义8和定义9计算带权优势量和带权劣势量

$$wd_{51}^+ = 0.216 \times 0.20 = 0.043\,2,$$

$$wd_{51}^- = 0.100 \times 0.30 + 0.006 \times 0.15 + 0.014 \times 0.10 = 0.030\,2.$$

由式(1)计算$v_{51} = 0.5 + (0.043\,2 - 0.030\,2)/2 = 0.506$.

同理计算其他优势度:$v_{52} = 0.518, v_{53} = 0.463, v_{54} = 0.509, v_{55} = 0.500, v_{56} = 0.492$,则得到基于$x_5$的高点一致性优势向量$\bar{v}_5 = (0.506,0.518,0.463,0.509,0.500,0.492)^{\mathrm{T}}$. 进一步转换为低点一致性优势向量$v_5 = (0.494,0.482,0.537,0.491,0.500,0.508)^{\mathrm{T}}$, $v_{g5} = 0.482, \sigma_{5g} = v_{55} - v_{g5} = 0.5 - 0.482 = 0.018$. 按照式(3)计算,得到一致性比较向量$v' = (0.164,0.160,0.178,0.163,0.166,0.169)^{\mathrm{T}}$,对其各分量降序排列,得到方案排序结果为$x_3 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$. 据此可知,拟建的第3诱导小区为停车最困难的小区,应该优先考虑建设. 这种方法实际是以x_5为参考方案对所有方案按照优劣作出一个划分,比其优的方案有x_3和x_6,均排在前面,剩下方案均比其劣,故排在后面,且x_3对x_5的优势比x_6对x_5的优势大,故排在最前面,成为最优方案,即是停车最困难的小区.

以下对排序结果作进一步讨论. 按照上述方法求出其他的优势度和优势向量,最后的优势度、优势向量和优势度矩阵直观如表2所示.

表 2 优势度矩阵

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\bar{v}_1$	0.500	0.513	0.458	0.504	0.494	0.486
$\bar{v}_2$	0.487	0.500	0.445	0.491	0.482	0.474
$\bar{v}_3$	0.542	0.555	0.500	0.546	0.537	0.528
$\bar{v}_4$	0.496	0.509	0.454	0.500	0.491	0.482
$\bar{v}_5$	0.506	0.518	0.463	0.509	0.500	0.492
$\bar{v}_6$	0.514	0.526	0.472	0.518	0.508	0.500

对优势度矩阵V而言,若按照式(2)计算排序向量为$v = (0.165,0.163,0.174,0.164,0.166,0.168)$,虽然与$v'$有所差异,但降序排列结果不受影响,依然是$x_3 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$,只是计算量要大得多. 对任意高点优势向量(即任一行)升序排列和对任意低点优势向量(即任一列)降序排列,得到的排序结果依然是$x_3 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$,只是向量大小不一,归一化后的结果也不相同,但相对大小及其先后顺序保持不变. 为便于理解,若选取最佳方案x_3为基点方案,则根据2.3节阐述的方法步骤,先与其他方案各个指标分别作比较,依次得到优(劣)势距离,然后计算带权优(劣)势量分别为

$$wd_{31}^+ = 0.085\,6,\ wd_{31}^- = 0.001\,7,$$
$$wd_{32}^+ = 0.110\,8,\ wd_{32}^- = 0.001\,1,$$
$$wd_{34}^+ = 0.095\,5,\ wd_{34}^- = 0.004\,4,$$
$$wd_{35}^+ = 0.096\,4,\ wd_{35}^- = 0.002\,3,$$
$$wd_{36}^+ = 0.059\,6,\ wd_{36}^- = 0.003\,4.$$

进而得到各优势度为:$v_{31} = 0.541\,9, v_{32} = 0.554\,8, v_{33} = 0.50, v_{34} = 0.545\,6, v_{35} = 0.547\,0, v_{36} = 0.528\,1$,

即低点一致性优势向量$v_3 = (0.458\,1, 0.445\,2, 0.5, 0.454\,5, 0.453, 0.471\,9)^{\mathrm{T}}$. 由$v_3$可知, $v_{g3} = 0.445\,2$, $\sigma_{3g} = v_{33} - v_{g3} = 0.5 - 0.445\,2 = 0.054\,8$. 对$v_3$作平移变换,并根据式(3)求得$v' = (0.164\,3, 0.160, 0.177\,9, 0.162\,8, 0.166\,4, 0.169\,3)^{\mathrm{T}}$.

实际上,对任意基点方案的优势向量,统一转化为低点优势向量后,再作相应的平移变换,使得变换后的向量均为(0.513,0.500,0.555,0.509, 0.518, 0.526),归一化后都统一为$v' = (0.164, 0.160, 0.178, 0.163, 0.166, 0.169)^{\mathrm{T}}$. 不但降序排列结果保持不变,根据任意基点方案和基点方向求得的一致性比较向量也保持不变,统一了结果形式.

4 结 论

针对任意测度或混合测度的离散型多属性决策问题,提出了一种新的优势度计算公式. 借助优势度矩阵良好的一致性性质,研究了方案间的优劣排序问题. 理论分析和算例结果表明:排序结果都是一致的,但排序向量方法决策过程信息冗余多,计算量大;优势向量方法计算量小,但决策结果数据不统一;比较向量方法则统一了最终结果数据,且计算量小,借助计算机很容易实现. 该改进的优势度决策法因为在早期就利用原始决策数据进行属性比较和优劣距离的度量,不会因为数据测度的转换和强制统一以及模糊数和清晰数之间的多次转换而带来和放大决策误差,精确性更高;且只要方案间在属性上能比较优劣、可算距离大小,而不管测度指标值是模糊数、清晰数,还是兼而有之的混合类型,均是适用的,故通用性更好;该方法具有原理简单、步骤简明、计算复杂度低、容易实现等优势,对多属性决策理论和方法的发展具有重要的意义.

参考文献(References)

[1] Hwang C L, Yoon K. Multiple attribute decision making[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981: 309-321.

[2] 林杨, 王应明. 考虑直觉模糊偏好关系的双边稳定匹配及应用[J]. 控制与决策, 2015, 30(12): 2212-2218.
(Lin Y, Wang Y M. Bilateral stable matching considering intuitionistic fuzzy preference relations and their application[J]. Control and Decision, 2015, 30(12): 2212-2218.)

[3] Xu Y, Herrera F, Wang H. A distance-based framework to deal with ordinal and additive inconsistencies for fuzzy reciprocal preference relations[J]. Information Sciences, 2016, 328(C): 189-205.

[4] Zhu J. Optimization of power system operation[M]. New York: John Wiley & Sons, 2015: 215-252.

[5] Corrente S, Greco S, Słowiński R. Multiple criteria hierarchy process with electre and promethee[J]. Omega, 2013, 41(5): 820-846.

[6] Chiclana F, Herrera F, Herrera V E. A classification method of alternatives for multiple preference ordering criteria based on fuzzy majority[J]. Fuzzy Mathematics, 1996, 4(4): 128-143.

[7] Saaty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York, McGraw Hill, 1980: 68-81.

[8] Xu Z. A survey of preference relations[J]. Int J of General Systems, 2007, 36(2): 179-203.

[9] Xu Z, Xia M. Induced generalized intuitionistic fuzzy operators[J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(2): 197-209.

[10] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision-making[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1984, 12(2): 117-131.

[11] 徐泽水. 对方案有偏好的三角模糊数型多属性决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(8): 9-12.
(Xu Z S. Study on method for triangular fuzzy number-based multi-attribute decision making with preference information on alternatives[J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(8): 9-12.)

[12] 王艳杰, 钱伟懿. 三角模糊数的可能度排序方法与应用[J]. 三峡大学学报: 自然科学版, 2010, 32(3): 96-99.
(Wang Y J, Qian W Y. Possibility degree method for ranking triangular fuzzy numbers and its application[J]. J Of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2010, 32(3): 96-99.)

[13] Feng B, Fan Z P, Ma J. A multiattribute decision making method: Using individual and collaborative attributes[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 179(20): 3603-3618.

[14] Wu L, Liu S, Yang Y, et al. Multi-variable weakening buffer operator and its application[J]. Information Sciences, 2016, 339: 98-107.

[15] Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F, et al. Some issues on consistency of fuzzy preference relations[J]. European J of Operational Research, 2004, 154(1): 98-109.

[16] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1978, 1(3): 155-167.

[17] 李霞, 张绍林, 张淼. 基于新距离测度的区间数排序[J]. 西华大学学报: 自然科学版, 2008, 27(1): 87-91.
(Li X, Zhang S L, Zhang M. Rank of Interval Numbers Based on a New Distance Measure[J]. J Of Xihua University: Natural Science Edition, 2008, 27(1): 87-91.)

[18] Li D F, Yang J B. Fuzzy linear programming technique for multiattribute group decision making in fuzzy environments[J]. Information Sciences, 2004, 158(1): 263-275.

[19] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311-314.
(Xu Z S. Algorithm for priority of fuzzy complementary judgement matrix[J]. J of Systems Engineering, 2001, 16(4): 311-314.)

[20] Zhu B, Xu Z. A fuzzy linear programming method for group decision making with additive reciprocal fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2014, 246(4): 19-33.

（责任编辑：齐 霁）