第32卷 第5期
2017年 5月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.32 No.5
May 2017

文章编号: 1001-0920(2017)05-0769-11 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.1104

多准则决策中的鲁棒有序回归方法综述

张宏军, 尹成祥†, 綦秀利, 程 恺, 张 睿, 康兴挡

(解放军理工大学 指挥信息系统学院，南京 210007)

摘 要: 根据决策者提供的偏好信息推断决策模型的参数时,通常会有不止一组参数满足条件. 针对传统有序回归方法在处理此类问题上存在的不足,鲁棒有序回归可提供一种新的考虑所有可行解的解决方案. 为此,总结了鲁棒有序回归在排序和有序分类问题中的应用;分析了"必然"和"可能"偏好关系在不同决策问题和不同决策模型中的定义和求解方法;介绍了随机多准则可接受性分析理论与鲁棒有序回归的结合;归纳了不同应用背景下的最具代表性模型的选择方法;最后,展望了鲁棒有序回归在多准则决策中的未来研究方向.

关键词: 多准则决策；鲁棒有序回归；"必然"偏好关系；"可能"偏好关系；随机多准则可接受性分析；模型选择

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Introduction to robust ordinal regression methods in multi-criteria decision making

ZHANG Hong-jun, YIN Cheng-xiang†, QI Xiu-li, CHENG Kai, ZHANG Rui, KANG Xing-dang

(Institute of Command and Information System，PLA University of Science Technology，Nanjing 210007，China)

Abstract: It is common that there are more than one solutions when inferring model parameters according to preference information provided by decision makers. As there are some drawbacks when dealing with such situation by traditional ordinal regression methods, robust ordinal regression(ROR) provides another solution taking into consideration all compatible parameters. The applications of ROR methods in ranking and sorting problems are summarized and the necessary and possible preference relations accompanied by their computation methods are analyzed. Then, the combination of ROR and the stochastic multicriteria acceptability analysis is introduced, and the methods for the selection of the most representative model in various circumstances are described. Finally, some conclusions are drawn and the future research directions of ROR in multi-criteria decision making are envisaged.

Keywords: multi-criteria decision making；robust ordinal regression；necessary preference relation；possible preference relation；stochastic multi-criteria acceptability analysis；model selection

0 引 言

在多准则决策问题中,决策者(DM)需要在m个备选方案$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$上针对n个准则$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$作出决策. 可将每个准则$g_j:A\to\mathcal{I}_j\subseteq\boldsymbol{R}$看作一个函数, $g_j(a)$表示备选方案a在准则g_j上的表现. 不失一般性,假设$g_j(a)$的取值越大,a在准则g_j上的表现越好. 多准则决策问题包含3种类型:排序问题、选择问题和有序分类问题[1]. 排序问题要求根据DM的偏好给出A中所有备选方案的排序;选择问题需要从A中选择部分好的备选方案;而有序分类问题的关注点则在于将A中的备选方案分配到预先定义好的类别中.

在DM不提供任何偏好信息的前提下,决策分析者(DA)仅能够从备选方案在准则上的表现得到占优关系. 备选方案a占优于b当且仅当在所有准则上b都不优于a,且至少在一个准则上a优于b. 在实际中,占优关系是非常有限的,因此,为了更好地对问题进行分析,需要DM提供额外的偏好信息. DM可以提供直接和间接两种形式的偏好信息,直接偏好信息是指DM直接为决策模型中的参数(效用理论中的边际效用函数、级别优先关系中的各种阈值和准则权重等)赋值,而间接偏好信息指的是准则之间以及备选方案之间的成对比较信息. 通常情况下,由于DM难以提供可靠的直接偏好信息,间接偏好信息成为更常

收稿日期: 2016-08-29；**修回日期:** 2016-12-26.

基金项目: 江苏省自然科学基金项目(BK20150720).

作者简介: 张宏军(1963−), 男, 教授, 博士生导师, 从事多准则决策、数据与知识工程等研究；尹成祥(1989−), 男, 博士生, 从事多准则决策的研究.

†通讯作者. E-mail: 425850693@qq.com

见的方式.

从DM提供的间接偏好信息中去推断决策模型的方法称为disaggregation方法[2-3]. 有序回归是一种常见的disaggregation方法,它旨在从DM提供的参考集中去推断决策模型的参数[4].

在传统的有序回归方法中, DA仅从与参考集一致的模型参数(通常不止一组)中选择一组来构建决策模型. 这种方式一方面会造成信息的浪费,另一方面选择过程的随机性会使所得到的决策模型不具备鲁棒性. 为了解决这个问题, Greco等[5]于2008年提出了鲁棒有序回归(ROR)方法. ROR综合考虑所有与参考集一致的模型参数,从"必然"和"可能"[6-9]两个角度衡量备选方案之间的优先关系. DM可以依据ROR提供的"必然"和"可能"偏好关系为DA提供新的偏好信息,通过DA与DM的不断交互,得到更加鲁棒、更加科学的决策结果.

表1从文章所关注的主要问题的角度,对ROR相关文献进行了分类汇总. 下文主要从ROR在排序和有序分类问题中的应用、ROR与SMAA的结合以及最具代表性决策模型的选择等4个方面对ROR理论进行阐述.

表 1 ROR文献分类汇总

关注问题		文献
综述、概述		[7], [8]
排序问题	基于加性效用函数	[5], [10], [11]
	基于非加性效用函数	[12], [13], [14], [15], [16], [17]
	基于级别优先关系	[18], [19], [20], [21], [22]
有序分类问题		[23], [24], [25], [26]
与SMAA结合		[27], [28], [29], [30]
模型选择问题		[31], [32], [33], [34], [35]
其他		[36], [37], [38]

自Greco等[5]提出$\mathrm{UTA}^{\mathrm{GMS}}$以来, ROR的研究便受到众多学者关注. GRIP[10]对$\mathrm{UTA}^{\mathrm{GMS}}$进行了扩展,不仅考虑了备选方案之间偏好关系,还考虑了偏好关系的强度; $\mathrm{UTADIS}^{\mathrm{GMS}}$[23]将ROR推广到有序分类问题中; $\mathrm{ELECTRE}^{\mathrm{GKMS}}$[18]、$\mathrm{PROMETHEE}^{\mathrm{GMS}}$[19]将ROR应用到了基于级别优先关系的决策模型中. Angilella等[12]提出了基于非加性效用函数的ROR方法,将Choquet积分与ROR相结合处理准则之间存在关联的情况. 文献[27-28]将ROR与随机多准则可接受性分析(SMAA)理论相结合,对与参考集一致的模型参数空间进行了更加深入的探讨. 文献[11, 13, 20, 24]将ROR应用到了多准则层次过程[11](MCHP)中,使DA能够从各个层次的所有准则上为DM提供建议. 文献[36-37]将ROR得到的"必然"和"可能"偏好关系用在优势粗糙集上,得到了相应的决策规则. 除了得到"必然"和"可能"两种备选方案之间的偏好关系以外,文献[31-34]还探讨了如何基于这两种关系选择最具代表性的决策模型.

1 ROR在排序问题中的应用

1.1 基于多准则效用理论的决策模型

多准则效用理论的主要思想是通过效用函数$U: X \rightarrow \boldsymbol{R}$将备选方案在多个准则上的表现映射成一个效用值,然后通过效用值的比较判断备选方案之间的优劣关系. 其中

$$X=\prod_{i=1}^{n} X_i,$$

$X_i=\{x_j \in \boldsymbol{R} | g_i(a_j)=x_j, a_j \in A\}$表示$A$中所有备选方案在准则$g_i$上取值的集合. 效用函数$U(a)=U(g_1(a), g_2(a), \cdots, g_n(a))$有多种表现形式, 常见的有加性效用函数和非加性效用函数,下文分这两种情况进行讨论.

1.1.1 基于加性效用函数的决策模型

加性效用函数的计算公式为

$$U(a)=\sum_{i=1}^{n} u_i(g_i(a)),$$

$u_i(g_i(a))$为备选方案a在准则g_i上的边际效用函数,是非单调递减函数,但并不要求是线性的.

Greco等[5]总结了传统的基于效用理论的有序回归方法存在的几点不足:

1) 当存在多个与参考集一致的效用函数时,传统方法的处理方式是从中选择一组,而这种选择[39-40]要么带有随机性,要么需要DM来完成;

2) UTA[4]方法采用的边际效用函数是分段线性的,这些线性函数的确定需要依赖特征点,而特征点的数目是难以确定的;

3) 传统方法要求DM一次性给出所有的偏好信息,难以实现交互式增量信息的提供.

针对这些问题, Greco提出了$\mathrm{UTA}^{\mathrm{GMS}}$[5]算法.

$\mathrm{UTA}^{\mathrm{GMS}}$[5]假设DM提供了一个参考集$A^R \subset A$,在$A^R$中DM提供了备选方案之间的两两比较关系. $\forall c, d \in A^R$, 这两个备选方案之间可能存在以下3种关系:

1) c优先于d,记作$c \succ d$;

2) d优先于c,记作$d \succ c$;

3) c与d之间没有区别,记作$c \sim d$.

由边际效用函数的单调性和DM提供的偏好信息,有以下约束条件:

$$(E_1^{A^R})\begin{cases}\begin{cases}U(c)\geqslant U(d)+\varepsilon,\ c\succ d;\\ U(c)=U(d),\ c\sim d;\end{cases}\quad \forall c,d\in A^R.\\ u_j(x_j^i)-u_j(x_j^{i-1})\geqslant 0,\\ \quad i=1,2,\cdots,m_j,\ j=1,2,\cdots,n.\\ u_j(x_j^0)=0,\ j=1,2,\cdots,n.\\ \sum\limits_{i=1}^{n}u_j(x_j^{m_j})=1.\end{cases}$$

其中: $x_j^1\leqslant x_j^2\leqslant\cdots\leqslant x_j^{m_j}$ 表示 A^R 中所有备选方案在准则 g_j 上的取值按从小到大顺序的排列, m_j 表示参考集 A^R 中的备选方案在准则 g_j 上的不同取值的数目, $m_j\leqslant m$, ε 是松弛变量.

效用函数 U 与参考集 A^R 是一致的, 当且仅当 $E_1^{A^R}$ 是可行的, 并且 $\varepsilon^*=\max\varepsilon$, s.t. $E_1^{A^R}$, $\varepsilon^*>0$. 令 $\mathcal{U}$ 为所有与参考集 A^R 一致的效用函数的集合, "必然" 和 "可能" 偏好关系定义如下:

"必然" 偏好关系 对于备选方案 $a,b\in A$, 若在所有与参考集 A^R 一致的效用函数上都有 $a\succeq b$ ($\succeq=\succ\bigcup\sim$), 则 a 必然至少与 b 一样优, 记作 $a\succeq^N b$, 即

$$a\succeq^N b\Leftrightarrow\forall U\in\mathcal{U},\ U(a)\geqslant U(b).$$

"可能" 偏好关系 对于备选方案 $a,b\in A$, 若存在一个与参考集 A^R 一致的效用函数使得 $a\succeq b$, 则 a 可能至少与 b 一样优, 记作 $a\succeq^P b$, 即

$$a\succeq^P b\Leftrightarrow\exists U\in\mathcal{U},\ U(a)\geqslant U(b).$$

"必然" 和 "可能" 偏好关系存在如下性质:

性质 1 $\succeq^N\subseteq\succeq^P$;

性质 2 $\forall a,b\in A, a\succeq^N b\bigvee b\succeq^P a$;

性质 3 $\succeq^N$ 是自反的, 即 $\forall a, a\succeq^N a$, 同时还是传递的, 即 $\forall a,b,c\in A, a\succeq^N b\bigwedge b\succeq^N c\Rightarrow a\succeq^N c$;

性质 4 $\succeq^P$ 是强完备的, 即 $\forall a,b\in A, a\succeq^P b\bigvee b\succeq^P a$, 同时还是反传递的, 即 $\forall a,b,c\in A, \neg(a\succeq^P b)\bigwedge\neg(b\succeq^P c)\Rightarrow\neg(a\succeq^P c)$.

Greco 还给出了确定两个备选方案 $a,b\in A\backslash A^R$ 之间是否存在偏好关系 $\succeq^N$ 和 $\succeq^P$ 的方法.

方法 1 若

$$(E_1^N)\begin{cases}E(a,b),\\ U(a)-U(b)+\varepsilon\leqslant 0\end{cases}$$

不可行, 或 ($\varepsilon^*=\max\ \varepsilon$, s.t. E_1^N) <0, 则 $a\succeq^N b$;

方法 2 若

$$(E_1^P)\begin{cases}E(a,b),\\ U(a)-U(b)\geqslant 0\end{cases}$$

可行, 且 ($\varepsilon^*=\max\varepsilon$, s.t. E_1^P) >0, 则 $a\succeq^P b$.

因为 $a,b\in A\backslash A^R$ 在某些准则上的取值可能不包含在 $x_j^1\leqslant x_j^2\leqslant\cdots\leqslant x_j^{m_j}$ 中, 这样便会得到一个新的取值序列 $x_j^1\leqslant x_j^2\leqslant\cdots\leqslant x_j^{m_j'}$, $m_j'\geqslant m_j$, $E(a,b)$ 表示的就是 E^{A^R} 在其第 3 个约束条件中考虑 $x_j^1\leqslant x_j^2\leqslant\cdots\leqslant x_j^{m_j'}$ 的情况.

由 ROR 计算得到的偏好关系 $\succeq^N$ 和 $\succeq^P$ 可以反馈给 DM, 在这些信息的基础上, DM 可以加深对决策问题的理解, 进而与 DA 进行沟通, 以便进一步提供新的偏好信息. 这种交互式的决策过程有利于决策的鲁棒性和科学性.

UTA$^{\text{GMS}}$ 还提供了两种处理 $E_1^{A^R}$ 不可行的方法: 一种是接受这种不一致, 对某些条件进行松弛, 进而求取 $\succeq^N$ 和 $\succeq^P$ 关系; 另一种是提供一个规划模型, 找到引发不一致的最小约束条件集合, 反馈给 DM.

UTA$^{\text{GMS}}$ 给出了第一个完整的 ROR 框架, GRIP[10] 对 UTA$^{\text{GMS}}$ 进行了扩展, 考虑了更多 DM 提供的偏好信息. 在 GRIP 中, DM 提供的偏好信息不仅包括备选方案之间的偏好关系, 还包括了备选方案在特定准则上的偏好关系以及偏好关系的强度. 这样, 可以得到以下约束条件:

$$(E_2^{A^R})\begin{cases}E_1^{A^R};\\ U(a)-U(b)\geqslant U(c)-U(d)+\varepsilon,\\ \quad (a,b)\succ(c,d);\\ U(a)-U(b)=U(c)-U(d),\ (a,b)\sim(c,d);\\ u_j(g_j(a))-u_j(g_j(b))\geqslant\varepsilon,\ a\succ_j b;\\ u_j(g_j(a))=u_j(g_j(b)),\ a\sim_j b;\\ u_j(g_j(a))-u_j(g_j(b))\geqslant\\ u_j(g_j(c))-u_j(g_j(d))+\varepsilon,\ (a,b)\succ_j(c,d);\\ u_j(g_j(a))-u_j(g_j(b))=\\ u_j(g_j(c))-u_j(g_j(d)),\ (a,b)\sim_j(c,d).\end{cases}$$

其中: $(a,b)\succ(c,d)$ 表示备选方案 a 优先于 b 的程度强于备选方案 c 优先于 d 的程度; $(a,b)\sim(c,d)$ 表示备选方案 a 优先于 b 的程度等于备选方案 c 优先于 d 的程度; $a\succ_j b$ 表示备选方案 a 在准则 g_j 上优先于 b; $a\sim_j b$ 表示备选方案 a 在准则 g_j 上与 b 没有区别; $(a,b)\succ_j(c,d)$ 表示在准则 g_j 上备选方案 a 优先于 b 的程度强于备选方案 c 优先于 d 的程度; $(a,b)\sim_j(c,d)$ 表示在准则 g_j 上备选方案 a 优先于 b 的程度等于备选方案 c 优先于 d 的程度.

除了备选方案之间的 "必然" 和 "可能" 偏好关系, GRIP 还定义了 "必然" 和 "可能" 偏好强度关系 $\succeq^{*N}$ 和 $\succeq^{*P}$, 以及 "必然" 和 "可能" 边际偏好强度关系 $\succeq_i^{*N}$ 和 $\succeq_i^{*P}$.

$$(x,y) \succeq^{*N} (w,z) \Leftrightarrow$$
$$\forall U \in \mathcal{U}, (U(x)-U(y))-(U(w)-U(z)) \geqslant 0;$$
$$(x,y) \succeq^{*P} (w,z) \Leftrightarrow$$
$$\exists U \in \mathcal{U}, (U(x)-U(y))-(U(w)-U(z)) \geqslant 0;$$
$$(x,y) \succeq_i^{*N} (w,z) \Leftrightarrow$$
$$\forall U \in \mathcal{U}, (u_i(x)-u_i(y))-(u_i(w)-u_i(z)) \geqslant 0;$$
$$(x,y) \succeq_i^{*P} (w,z) \Leftrightarrow$$
$$\exists U \in \mathcal{U}, (u_i(x)-u_i(y))-(u_i(w)-u_i(z)) \geqslant 0.$$

文献[11]将基于加性效用函数的ROR应用到了MCHP中. MCHP采用层次化的准则结构, DM可以在任意中间层次和总体层次上提供偏好信息, ROR既可以定义全局意义上的"必然"和"可能"偏好关系,也可以在中间层次准则上定义"必然"和"可能"偏好关系,这些结果都将辅助DM提供新的偏好信息,作出更科学的决策. 根据文献[19]提出的极限排序分析(ERA)理论,可以得到每个备选方案a的排序区间$[P^*(a), P_*(a)]$. 其中: $P^*(a)$为最优排序, $P_*(a)$为最差排序, $P^*(a) \leqslant P_*(a)$.

1.1.2 基于非加性效用函数的决策模型

加性效用函数要求准则之间必须是相互独立的,但在很多情况下准则之间是存在关联的,因此很多学者提出使用非加性效用函数进行准则的聚合[12, 41-42]. 模糊积分是最常见的非加性效用函数,文献[41-42]研究了基于Choquet积分的有序回归问题,文献[12]将他们的研究推广到了ROR理论中.

模糊测度和模糊积分的基本概念和应用可以参见文献[43-45],这里仅给出2-additive条件下的Choquet积分、Shapley值以及关联系数的定义.

备选方案a在模糊测度μ上的Choquet积分的计算公式为

$$C_\mu(a) = \sum_{g_i \in G} m(\{g_i\}) g_i(a) + \sum_{\{g_i, g_j\} \subseteq G} m(\{g_i, g_j\}) \times \min\{g_i(a), g_j(a)\},$$

$m(\cdot)$是$\mu(\cdot)$的Möbius表示[44]. Choquet积分可以作为非加性效用函数使用,即$\forall c, d \in A, c \succ d \Rightarrow C_\mu(c) > C_\mu(d)$.

准则g_i的Shapley值为

$$\varphi(\{g_i\}) = m(\{g_i\}) + \frac{1}{2} \sum_{g_j \in G \setminus \{g_i\}} m(\{g_i, g_j\}).$$

Shapley值反映的是准则的重要程度.

准则g_i和g_j的关联系数为

$$\varphi(\{g_i, g_j\}) = m(\{g_i, g_j\}).$$

$\varphi(\{g_i, g_j\})$可以为正也可以为负, $|\varphi(\{g_i, g_j\})|$越大,表示准则g_i与g_j的关联程度越高.

当采用Choquet积分作为非加性效用函数时,决策模型共有$(n^2+n)/2$个参数(n个$m(\{g_i\})$, $(n(n-1))/2$个$m(\{g_i, g_j\})$)需要确定. 文献[12]假设DM可以提供3类偏好信息:备选方案之间的优先关系及强度信息;准则之间的重要性对比及强度信息;准则之间的关联性对比及强度信息. 这3类信息分别对应一组约束条件,在这些约束条件下, ROR可以构建相应的"必然"和"可能"偏好关系.

$$(E_{3a}^{A^R})\begin{cases} C_\mu(a) - C_\mu(b) \geqslant \varepsilon,\ a \succ b; \\ C_\mu(a) - C_\mu(b) = 0,\ a \sim b; \\ C_\mu(a) - C_\mu(b) \geqslant C_\mu(c) - C_\mu(d) + \varepsilon, \\ \quad (a,b) \succ (c,d); \\ C_\mu(a) - C_\mu(b) = C_\mu(c) - C_\mu(d), \\ \quad (a,b) \sim (c,d). \end{cases}$$

$$(E_{3c}^{A^R})\begin{cases} \varphi(\{g_i\}) - \varphi(\{g_j\}) \geqslant \varepsilon,\ g_i \succ_c g_j; \\ \varphi(\{g_i\}) - \varphi(\{g_j\}) = 0,\ g_i \sim_c g_j; \\ \varphi(\{g_i\}) - \varphi(\{g_j\}) \geqslant \varphi(\{g_k\}) - \varphi(\{g_l\}) + \varepsilon, \\ \quad (g_i, g_j) \succ_c (g_k, g_l); \\ \varphi(\{g_i\}) - \varphi(\{g_j\}) \geqslant \varphi(\{g_k\}) - \varphi(\{g_l\}) + \varepsilon, \\ \quad (g_i, g_j) \sim_c (g_k, g_l). \end{cases}$$

$$(E_{3i}^{A^R})\begin{cases} m(\{g_i, g_j\}) - \varepsilon \geqslant 0,\ \varphi(\{g_i, g_j\}) > 0; \\ m(\{g_i, g_j\}) + \varepsilon \leqslant 0,\ \varphi(\{g_i, g_j\}) < 0; \\ m(\{g_i, g_j\}) = 0,\ \varphi(\{g_i, g_j\}) = 0; \\ |m(\{g_i, g_j\})| - |m(\{g_k, g_l\})| \geqslant \varepsilon, \\ \quad (g_i, g_j) \succ_i (g_k, g_l); \\ |m(\{g_i, g_j\})| - |m(\{g_k, g_l\})| = 0, \\ \quad (g_i, g_j) \sim_i (g_k, g_l); \\ |m(\{g_i, g_j\})| - |m(\{g_k, g_l\})| \geqslant \\ |m(\{g_r, g_s\})| - |m(\{g_t, g_w\})| + \varepsilon, \\ \quad [(g_i, g_j), (g_k, g_l)] \succ_i [(g_r, g_s), (g_t, g_w)]; \\ |m(\{g_i, g_j\})| - |m(\{g_k, g_l\})| = \\ |m(\{g_r, g_s\})| - |m(\{g_t, g_w\})|, \\ \quad [(g_i, g_j), (g_k, g_l)] \sim_i [(g_r, g_s), (g_t, g_w)]. \end{cases}$$

$E_{3a}^{A^R}$ 对应的是由备选方案之间的优先关系及强度信息得到的约束条件,4种偏好关系的含义与前文一致,这里不再赘述.

$E_{3c}^{A^R}$ 对应的是由准则之间的重要性对比及其强度信息得到的约束条件. 其中: $g_i \succ_c g_j$ 表示准则 g_i 比 g_j 重要; $g_i \sim_c g_j$ 表示准则 g_i 与 g_j 同等重要; $(g_i, g_j) \succ_c (g_k, g_l)$ 表示准则 g_i 比 g_j 重要的程度大于准则 g_k 比 g_l 重要的程度; $(g_i, g_j) \sim_c (g_k, g_l)$ 表示准则 g_i 比 g_j 重要的程度等于准则 g_k 比 g_l 重要的程度.

$E_{3i}^{A^R}$ 表示由准则之间的关联性对比及其强度信息得到的约束条件. 其中: $\varphi(\{g_i, g_j\}) > 0$ 表示准则 g_i 与 g_j 之间存在正关联; $\varphi(\{g_i, g_j\}) < 0$ 表示准则 g_i 与 g_j 之间存在负关联; $\varphi(\{g_i, g_j\}) = 0$ 表示准则 g_i 与 g_j 之间相互独立; $(g_i, g_j) \succ_i (g_k, g_l)$ 表示准则 g_i 与 g_j 之间的关联度大于准则 g_k 与 g_l 之间的关联度; $(g_i, g_j) \sim_i (g_k, g_l)$ 表示准则 g_i 与 g_j 之间的关联度等于准则 g_k 与 g_l 之间的关联度; $[(g_i, g_j), (g_k, g_l)] \succ_i [(g_r, g_s), (g_t, g_w)]$ 表示准则 $g_i g_j$ 与准则 $g_k g_l$ 之间的关联度之差大于准则 $g_r g_s$ 与准则 $g_t g_w$ 之间的关联度之差; $[(g_i, g_j), (g_k, g_l)] \sim_i [(g_r, g_s), (g_t, g_w)]$ 表示准则 $g_i g_j$ 与准则 $g_k g_l$ 之间的关联度之差等于准则 $g_r g_s$ 与准则 $g_t g_w$ 之间的关联度之差.

除了上述约束以外, 模糊测度本身还需要满足以下性质:

$$(E_{3m}^{A^R})\begin{cases} m(\varnothing) = 0; \\ m(g_i) \geqslant 0; \\ m(g_i) + \displaystyle\sum_{g_j \in G \setminus \{g_i\}} m(\{g_i, g_j\}) \geqslant 0; \\ \displaystyle\sum_{g_i \in G} m(g_i) + \sum_{\{g_i, g_j\} \subset G} m(\{g_i, g_j\}) = 1. \end{cases}$$

令 $E_3^{A^R} = E_{3a}^{A^R} \bigcup E_{3c}^{A^R} \bigcup E_{3i}^{A^R} \bigcup E_{3m}^{A^R}$. 若 $E_3^{A^R}$ 可行, 且 $\varepsilon^* = \max \varepsilon$, s.t. $E_3^{A^R}, \varepsilon^* > 0$, 则至少存在一组模型参数与DM提供的偏好信息一致. 这样, 可以采用与加性效用函数相同的方案定义并求解备选方案之间的“必然”和“可能”偏好关系, 并将结果反馈给DM, 进行交互式决策.

文献[14]将上述理论应用于垃圾填埋地的选址问题, 取得了较好的效果. 文献[15]将上述理论推广到了Choquet积分的两种扩展形式: Bipolar Choquet积分[46]和Level-dependent Choquet积分[47]. 文献[13]将Choquet积分的相关概念推广到MCHP理论框架下, 在层次化的准则结构上, 将ROR与扩展的Choquet积分相结合进行决策分析. Choquet积分的一个局限在于不同准则的取值必须具有可比性[42], 为了解决这个问题, 文献[16]提出首先使用层次分析法[48]将每个准则的取值都规范化为[0,1]之间的数, 然后再使用ROR进行决策分析.

除了使用模糊积分来表示准则之间的关联关系, 文献[17]还提出使用在普通加性效用函数中增加“奖励项”(标识正关联关系)和“惩罚项”(标识负关联关系)的方式来考虑关联关系带来的影响. 在新的效用函数的基础上, 基于ROR提出了UTA$^{\text{GMS}}$-INT算法.

1.2 基于级别优先关系的决策模型

级别优先关系[49]是区别于多准则效用理论的另一类常用决策模型. 常见的基于级别优先关系的算法有ELECTRE[50-51]算法系列和PROMETHEE[52]算法系列. ROR的研究已经延伸到了基于级别优先关系的决策模型中, 比较典型的算法有ELECTRE$^{\text{GKMS}}$[18]和PROMETHEE$^{\text{GMS}}$[19].

有关ELECTRE方法的基本理论可以参见文献[53], 这里只给出要用到的基本概念. S为备选方案集 A 上的二元关系, $a\,\mathrm{S}\,b$ 表示“a 至少与 b 一样好”.

$a\,\mathrm{S}\,b$ 的一致性指数为

$$C(a, b) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi_i(a, b) \times k_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k_i}.$$

其中: k_i 表示准则 g_i 的重要性, 而

$$\phi_i(a, b) =$$

$$\begin{cases} 1, \ g_i(a) \geqslant g_i(b) - q_i; \\ \dfrac{g_i(a) - [g_i(b) - p_i]}{p_i - q_i}, \ -p_i \leqslant g_i(a) - g_i(b) < -q_i; \\ 0, \ g_i(a) < g_i(b) - p_i \end{cases}$$

表示准则 g_i 对 $a\,\mathrm{S}\,b$ 的支持程度. $\phi_i(a, b)$ 中的 q_i 称为准则 g_i 上的无差别阈值, p_i 称为偏好阈值. $a\,\mathrm{S}\,b$ 成立当且仅当 $C(a, b) \geqslant \lambda$ 且 $g_i(b) - g_i(a) < v_i$. λ 是一致性指数阈值, $0.5 \leqslant \lambda \leqslant 1$, v_i 为否决阈值, $q_i \leqslant p_i \leqslant v_i$.

从上述的相关概念可以得到ELECTRE方法中有 k_i、q_i、p_i、v_i 和 λ 共5类参数. 若所有参数都是完全未知的, 则ROR对应的约束条件将是非线性的, 问题将难以用解析方法进行求解. 为此, ELECTRE$^{\text{GKMS}}$ 要求DM提供 p_i 和 q_i 的取值范围 $[p_{i,*}, p_i^*]$ 和 $[q_{i,*}, q_i^*]$, 并将 $C(a, b)$ 重新表示为

$$C(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(a, b).$$

这样, 根据DM提供的偏好信息, 可以得到如下约束

条件:

$$
(E_4^{A^R})\begin{cases}\begin{cases}C(a,b)\geqslant\lambda,\\ g_i(b)-g_i(a)+\varepsilon\leqslant v_i,\end{cases} a\,\mathrm{S}_{\mathrm{DM}}\,b;\\ \begin{cases}C(a,b)+\varepsilon\leqslant\lambda+M_0(a,b),\\ g_i(b)-g_i(a)\geqslant v_i-\delta M_i(a,b),\\ M_i(a,b)\in\{0,1\},\\ \sum M_i(a,b)\leqslant n,\end{cases} a\,\mathrm{S}_{\mathrm{DM}}^C\,b;\\ v_i\geqslant g_i(b)-g_i(a)+\varepsilon,\ a\sim_i b;\\ \psi_i(a,b)=\psi_i(b,a),\ a\sim_i b;\\ \psi_i(a,b)=0,\ b\succ_i a;\\ \quad\vdots\end{cases}
$$

其中: $a\,\mathrm{S}_{\mathrm{DM}}\,b$表示DM认为$a\,\mathrm{S}\,b$成立, $a\,\mathrm{S}_{\mathrm{DM}}^C\,b$表示DM认为$a\,\mathrm{S}\,b$不成立,省略号是指ELECTRE方法中参数之间存在的固有约束条件; $\sum M_i(a,b)\leqslant n$表示$a\,\mathrm{S}_{\mathrm{DM}}^C\,b$的条件是$C(a,b)<\lambda$或者至少在一个准则上触发了否决阈值.

若$E_4^{A^R}$可行,且

$$
\varepsilon^*=\max\varepsilon;\\ \text{s.t. } E_4^{A^R},\ \varepsilon^*>0.
$$

则存在模型参数与DM提供的偏好信息一致. 在ELECTRE[GKMS]中定义的并不是$\succeq^N$和$\succeq^P$关系,而是S^N和S^P关系. $a\,\mathrm{S}^N\,b$表示在所有与参考集一致的模型参数上都有$a\,\mathrm{S}\,b$, $a\,\mathrm{S}^P\,b$表示至少有一组与参考集一致的模型参数满足$a\,\mathrm{S}\,b$. S^N和S^P关系的求解思路与1.1.1节一致.

PROMETHEE[GMS]的思想与ELECTRE[GKMS]是一致的,只是在构建备选方案之间的关系时存在不同. PROMETHEE[GMS]和ELECTRE[GKMS]都未考虑准则之间存在关联关系的情况,为解决该问题,文献[21-22]将Bipolar Choquet积分与PROMETHEE方法相结合,并用ROR方法进行决策分析. 文献[20]将MCHP与ELECTRE和PROMETHEE方法相结合,在任意中间层次的准则上都可以定义级别优先关系,分别讨论了参数完全未知和部分未知情况下的ROR方法.

2 ROR在有序分类问题中的应用

UTADIS[GMS][23]最先将ROR应用到有序分类问题中. UTADIS[GMS]使用效用理论作为决策模型分别讨论了基于边界值和基于分类样例两种情况的有序分类问题.

设$C_1,C_2,\cdots,C_p$表示p个有序类别(C_1表示最差的类别,C_p表示最优的类别),有序分类的任务就是将备选方案分配到这些类别中. 基于边界值的有序分类方法假设类别通过边界效用值$b_0<b_1<\cdots<b_p$进行定义. b_{h-1}表示第h个类别的下界, b_h表示第h个类别的上界. 备选方案a被分配到类别$C_h(a\to C_h)$的充要条件是$b_{h-1}\leqslant U(a)<b_h$. 基于分类样例进行有序分类的方法是将待分类方案与样例进行比较,通过分析它们之间的偏好关系得到分类结果. 在UTADIS[GMS]中, DM提供一个参考集A^R, A^R中的每个备选方案a被DM分配一个类别区间$[C_{L^{\mathrm{DM}}(a)},C_{R^{\mathrm{DM}}(a)}]$, $L^{\mathrm{DM}}(a)\leqslant R^{\mathrm{DM}}(a)$. 效用函数$U$与参考集$A^R$是一致的,当且仅当$\forall a,b\in A^R$,若$U(a)\geqslant U(b)$,则$R^{\mathrm{DM}}(a)\geqslant L^{\mathrm{DM}}(b)$. 效用函数$U$以$A^R$为参考,根据$a$与$A^R$中所有方案之间的偏好关系可以将备选方案$a$分到类别区间$\left[C_{L^U(a)},C_{R^U(a)}\right]$中. 其中

$$
L^U(a)=\\ \max(\{1\}\bigcup\{L^{\mathrm{DM}}(a^*):U(a^*)\leqslant U(a),a^*\in A^R\}),\\ R^U(a)=\\ \min(\{p\}\bigcup\{R^{\mathrm{DM}}(a^*):U(a^*)\geqslant U(a),a^*\in A^R\}).
$$

根据A^R,基于边界值的方法和基于分类样例的方法分别可以得到约束条件$E_{5T}^{A^R}$和$E_{5E}^{A^R}$,即

$$
(E_{5T}^{A^R})\begin{cases}u_j(x_j^i)-u_j(x_j^{i-1})\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m_j;\\ u_j(x_j^0)=0;\\ \sum_{i=1}^n u_j(x_j^{m_j})=1;\\ \begin{cases}U(a)\geqslant b_{L^{\mathrm{DM}}(a)-1},\\ U(a)+\varepsilon\leqslant b_{R^{\mathrm{DM}}(a)},\end{cases}\forall a\in A^R;\\ b_1\geqslant\varepsilon;\\ b_{p-1}\leqslant 1-\varepsilon;\\ b_h-b_{h-1}\geqslant\varepsilon,\ h=2,3,\cdots,p-1.\end{cases}
$$

$$
(E_{5E}^{A^R})\begin{cases}u_j(x_j^i)-u_j(x_j^{i-1})\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m_j;\\ u_j(x_j^0)=0;\\ U(a)\geqslant U(b)+\varepsilon,\ L^{\mathrm{DM}}(a)>R^{\mathrm{DM}}(b);\\ \sum_{i=1}^n u_j(x_j^{m_j})=1.\end{cases}
$$

令$\mathcal{U}$为所有与参考集A^R一致的效用函数的集合,在$\mathcal{U}$上除了可以定义偏好关系$\succeq^N$和$\succeq^P$以外,还可以定义备选方案的“必然”类别$C_N(a)$和“可能”类别$C_P(a)$,即

$$
C_N(a)=\{h\in H:\forall U\in\mathcal{U},h\in[L^U(a),R^U(a)]\},\\ C_P(a)=\{h\in H:\exists U\in\mathcal{U},h\in[L^U(a),R^U(a)]\}.
$$

借助$\succeq^N$和$\succeq^P$, 可以给出$C_N(a)$的边界$[L_N^{\mathcal{U}}(a),R_N^{\mathcal{U}}(a)]$以及$C_P(a)$的边界$[L_P^{\mathcal{U}}(a),R_P^{\mathcal{U}}(a)]$,即

$L_N^{\mathcal{U}}(a) =$
$\max(\{1\} \bigcup \{L^{\mathrm{DM}}(a^*) : a \succeq^P a^*, a^* \in A^R\}),$
$R_N^{\mathcal{U}}(a) =$
$\min(\{p\} \bigcup \{R^{\mathrm{DM}}(a^*) : a^* \succeq^P a, a^* \in A^R\});$
$L_P^{\mathcal{U}}(a) =$
$\max(\{1\} \bigcup \{L^{\mathrm{DM}}(a^*) : a \succeq^N a^*, a^* \in A^R\}),$
$R_P^{\mathcal{U}}(a) =$
$\min(\{p\} \bigcup \{R^{\mathrm{DM}}(a^*) : a^* \succeq^N a, a^* \in A^R\}).$

偏好关系$\succeq^N$和$\succeq^P$的计算方法与1.1.1节中一致. DA将得到的偏好关系$\succeq^N$和$\succeq^P$以及“必然”类别$C_N(a)$和“可能”类别$C_P(a)$反馈给DM,以便DM提供新的参考信息,进行交互式决策.

文献[25]对UTADIS[GMS]进行了扩展,考虑了4类额外的偏好信息. 文献[26]则将ROR与ELECTRE Tri-C算法相结合,在级别优先关系模型中完成有序分类工作. 文献[24]在MCHP框架下讨论了ROR在有序分类问题中的应用,在每个中间层次的准则上都可以进行有序分类操作.

3 ROR与SMAA的结合

3.1 SMAA算法概述

SMAA[54-56]算法由Lahdelma等[54]最早提出,主要用于处理偏好信息缺乏或不准确的多准则决策问题. SMAA基于对权重空间W和准则取值空间X的搜索计算备选方案a_j的排序值,有

$$\mathrm{rank}(j,\xi,w) = 1 + \sum_{k\neq j} \rho(u(\xi_k,w) > u(\xi_j,w)).$$

其中: $\xi \in X$; $w \in W$; $\rho(\cdot)$是一个指示函数,括号内的条件为真时取1,否则取0.

设f_W, f_X分别为权重空间W和准则取值空间X上的随机变量,那么备选方案a_j排在第r位的可接受指数为

$$b_j^r = \int_{\xi\in X} f_X(\xi) \int_{w\in W_j^r(\xi)} f_W(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}\xi,$$

其中$W_j^r(\xi) = \{w \in W \,|\mathrm{rank}(j,\xi,w) = r\}$.

在权重向量取w_j^c的前提下,备选方案a_j排在第1位的置信系数为

$$p_j^c = \int_{\xi\in X: u(\xi_j,w_j^c)\geqslant u(\xi_k,w_j^c), \forall k=1,2,\cdots,m} f_X(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

备选方案a_j的排序优于备选方案a_k的概率为

$$p_{jk} = \int_{\xi\in X: u(\xi_j,w)\geqslant u(\xi_k,w)} f_X(\xi) \int_{w\in W} f_W(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}\xi.$$

在计算上述各个指数时,通常采用蒙特卡洛方法对多维积分进行估计,例如Hit-and-Run算法[57-58].

3.2 ROR与SMAA的结合

将ROR与SMAA结合起来使用可以为DM提供更好的建议,因为这两个方法是互相促进、互为补充的: 一方面,在ROR的结果上进行SMAA,可以缩小随机空间,得到更加有针对性的结果; 另一方面, SMAA的结果可以对ROR的结果进行更深入的分析. 文献[29]将ROR、SMAA以及ERA[19]相结合,不仅给出了备选方案之间的“必然”和“可能”偏好关系,还给出了每个“可能”偏好关系的出现概率;不仅确定了每个备选方案的可能排序范围,还分析了排序的分布情况. 文献[29]还总结了三者得到的结果之间的关系:

1) $\forall a_j \in A,\ \sum_{r=P^*(a_j)}^{P_*(a_j)} b_j^r = 1;$

2) $\forall a_j, a_k \in A,\ a_j \succeq^N a_k \Rightarrow p_{jk} = 1;$

3) $\forall a_j, a_k \in A,\ a_j \succeq^P a_k \Rightarrow p_{jk} > 0;$

4) $\forall a_j, a_k \in A,\ \neg(a_j \succeq^P a_k) \Rightarrow p_{jk} = 0;$

5) $\forall a_j \in A,\ b_j^r > 0 \Rightarrow P_*(a_j) \geqslant r \geqslant P^*(a_j);$

6) $\forall a_j \in A,\ r \in [1, P^*(a_j)) \bigcup (P_*(a_j), n] \Rightarrow b_j^r = 0.$

文献[30]在有序分类问题中将ROR与SMAA进行整合,除了“必然”和“可能”偏好关系还分析了备选方案被分到每个类别(类别区间)的概率,并总结了ROR与SMAA给出的结果之间的关联.

文献[59]将SMAA与Choquet积分相结合,提出SMAA-Choquet算法, Angilella[27]对SMAA-Choquet从以下3个方面进行了扩展:

1) DM提供的偏好信息包含了某些alternative之间的成对比较结果;

2) 准则的取值不再局限于点值,还可以取区间值;

3) 给出了不同准则的取值没有可比性时的解决方案.

在文献[28]中, Angilella等对所进行的研究做了进一步的推广,将ROR、MCHP、SMAA以及Choquet积分相结合,提出了一种能同时解决三项难题(复杂的准则体系、准则之间的关联和DM的认知困难)的算法框架.

4 最具代表性决策模型的选择

虽然ROR提供的“必然”和“可能”偏好关系保证了决策的鲁棒性,但在某些情况下, DM需要得到更加明确的决策建议. 为此, Figueira等[60]最早提出了从ROR的结果中选择最具代表性的决策模型的想法. 为了叙述简洁,下文将与DM提供的偏好信息一致的决策模型简称为“一致模型”. 从一致模型的集

合中选择一个有代表性的模型的基本思路就是在原始的约束条件中再加入新的约束条件,压缩可行域范围. 文献[33]指出,基于ROR选择最具代表性决策模型的原则是"one for all and all for one",即选出的模型应该能够代表所有的一致模型,同时所有的一致模型都在模型的选择中发挥作用. 基于这一原则,文献[31-34]分别针对所研究的问题,定义了相应的优化目标,并将这些优化目标映射成相应的约束条件,采用迭代式、交互式过程选择最具代表性的决策模型.

文献[31]讨论了从基于非加性效用函数的ROR结果中选择最具代表性决策模型的方法. 算法在ROR得到的结果的基础上定义了两个优化目标:

1）若两个备选方案之间存在"必然"偏好关系,则它们的效用值之差应尽可能大. 即$\forall(a,b) \in A \times A$, 若$a \succeq^N b$, 且$b \not\succeq^N a$,则在约束条件中增加约束$C_u(a) \geqslant C_u(b) + \gamma$, 针对新的约束条件求$\gamma$的最大值.

2) 若两个备选方案之间的偏好关系不明确,则它们的效用值之差应尽可能小. 即$\forall(a,b) \in A \times A$, 若$a \not\succeq^N b$,且$b \not\succeq^N a$,则在约束条件中增加约束$C_u(a) \geqslant C_u(b) + \delta$和$C_u(b) \geqslant C_u(a) + \delta$, 针对新的约束条件求$\delta$的最小值.

第2)个优化目标是在第1)个优化目标求解结果的基础上进行的.

文献[32]针对UTADIS$^{\mathrm{GMS}}$[17]的结果选择最具代表性的有序分类模型. 算法首先定义了5个二元关系:

1) $a \succ\succ^{\rightarrow} b \Leftrightarrow L_P^{\mathcal{U}}(a) > R_P^{\mathcal{U}}(b)$,表示$a$和$b$被分到的类别区间是不相交的,且$a$的类别优于$b$.

2) $a \succ^{\rightarrow} b \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}, L^U(a) > R^U(b)$,表示在所有的一致模型上$a$都被分到了比$b$优的类别中.

3) $a \succeq^{\rightarrow} b \Leftrightarrow \begin{cases} \forall U \in \mathcal{U}, L^U(a) \geqslant R^U(b) \\ \exists U_1 \in \mathcal{U}, L^{U_1}(a) > R^{U_1}(b) \end{cases}$表示在所有的一致模型上$a$都被分到了不比$b$差的类别中,同时在至少一个一致模型上$a$的类别优于$b$.

4) $a \sim^{\rightarrow} b \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}, \begin{cases} L^U(a) = L^U(b) \\ R^U(a) = R^U(b) \end{cases}$ 表示在所有的一致模型上a都被分到了与b相同的类别区间中.

5) $a \succ\prec^{\rightarrow} b \Leftrightarrow \exists U_1, U_2 \in \mathcal{U}, L^{U_1}(a) > R^{U_1}(b)$, $L^{U_2}(b) > R^{U_2}(a)$, 表示a和b分类结果的对比关系是不明确的.

针对这5个二元关系,分别定义了5个优化目标. 如果两个备选方案a和b之间存在$\succ\succ^{\rightarrow}$、$\succ^{\rightarrow}$或$\succeq^{\rightarrow}$关系,则它们的效用值之差应尽可能大;如果存在$\sim^{\rightarrow}$或$\succ\prec^{\rightarrow}$关系,则它们的效用值之差应尽可能小. 每个优化目标都会带来新的约束条件.

对于上述的5个优化目标,DM可以根据需要进行选择,可以选择一个也可以选择多个. 若选择多个,则每一次优化都要在前一次优化的基础上进行. 需要指出的是, 由于$\succ\succ^{\rightarrow}$、$\succ^{\rightarrow}$和$\succeq^{\rightarrow}$之间存在关系$\succ\succ^{\rightarrow} \subseteq \succ^{\rightarrow} \subseteq \succeq^{\rightarrow}$, 若这3个关系对应的优化目标都考虑,则需按照$\succ\succ^{\rightarrow}$、$\succ^{\rightarrow}$、$\succeq^{\rightarrow}$的顺序进行.

文献[33]基于UTA$^{\mathrm{GMS}}$[5]和GRIP[10]算法对排序问题中的模型选择问题进行了研究,共设计了4类11个优化目标来对模型进行选择.

1) 基于ERA结果的目标.

令$S = \{a \in A : P^*(a) \leqslant 3 \bigwedge P_*(a) \leqslant |A|/2\}$,可以得到优化目标

$$\forall a \in S, b \in A \backslash S,$$

使a和b之间的效用值之差尽可能大.

2) 基于备选方案间二元关系的目标.

共考虑了5种备选方案之间的二元关系,即$\succ^N$, $\succ^P$, $?^N$, $\succ_{II}^{\mathrm{RANK}}$和$?_I^{\mathrm{RANK}}$. $a ?^N b \Leftrightarrow a \not\succeq^N b \bigwedge b \not\succeq^N a$表示$a$和$b$之间的偏好关系是无法确定的; $a \succ_{II}^{\mathrm{RANK}} b \Leftrightarrow P_*(a) < P^*(b)$表示$a$的最差排序结果优于$b$的最优排序结果; $a ?_I^{\mathrm{RANK}} b \Leftrightarrow P^*(a) > P^*(b), P_*(a) < P_*(b)$, 表示$a$和$b$之间排序结果的关系是不明确的. 在关系$\succ^N$、$\succ^P$和$\succ_{II}^{\mathrm{RANK}}$上最大化效用值之差,在关系$?^N$和$?_I^{\mathrm{RANK}}$上最小化效用值之差.

3) 基于备选方案间偏好关系强度的目标.

考虑了两种备选方案间偏好强度的二元关系$\succ^{*N}$和$?^{*N}$. $(a,b) \succ^{*N} (c,d)$表示在所有一致模型上,a优先于b的强度都大于c优先于d 的强度,在此关系上,应使$(U(a)-U(b))-(U(c)-U(d))$尽可能大; $?^{*N}$表示偏好强度之间的关系不明确,在此关系上,应使$(U(a)-U(b))-(U(c)-U(d))$尽可能小.

4) 基于边际效用函数的目标.

基于边际效用函数的目标有:

i) 使边际效用函数尽可能是线性的;

ii) 使相邻特征点之间的边际效用值之差尽可能大;

iii) 基于边际偏好强度关系的目标.

文献[34]基于ELECTRE$^{\mathrm{GKMS}}$[18]和PROMETHEE$^{\mathrm{GMS}}$[19]算法,在级别优先关系中探索模型选择问题. 针对ELECTRE$^{\mathrm{GKMS}}$,首先设计3个优化目标对参数$\psi_i(a,b)$进行选择,然后在所选择的代表性$\psi_i(a,b)$上计算其他参数. 针对PROMETHEE$^{\mathrm{GMS}}$,

设计了5个优化目标对模型进行选择.

文献[30]分析了将SMAA与ROR整合得到的结果用于模型选择的方法,即$\forall a_j, a_k \in A$,若$p_{jk} > p_{kj}$,则a_j, a_k的效用值之差应尽可能大. 文献[61]还将ROR推广到了群决策范畴,文献[35]在群决策的背景下研究了代表性模型的选择问题.

5 结论与展望

ROR理论综合考虑了所有与DM提供的偏好信息一致的决策模型,计算"必然"和"可能"两类偏好关系,基于这两类关系, DA与DM可以进行交互式决策过程,以便使所得到的结果更加鲁棒、更加科学. 虽然提出的时间不到10年,但ROR的研究已经覆盖了多准则决策的常见问题(选择问题、排序问题、有序分类问题)和常用模型(多准则效用模型、级别优先关系模型、基于决策规则的模型). 除了在经典问题和模型上的应用, ROR的研究还延伸到了处理准则之间的关联问题以及新近提出的MCHP理论中. 将SMAA分析与ROR结合,可以使ROR的结果更加丰富、更加深入;最具代表性模型选择算法的研究则可以为DM提供更加具体和明确的建议.

虽然ROR理论的研究已经取得了非常大的进展,但仍有许多富有挑战性的工作需要更加深入地开展. 未来对ROR理论的研究可以从以下几个方面入手:

1) ROR辅助软件的设计实现.

从前文的论述可以看出,ROR过程需要求解大量的线性规划问题,尤其是在计算"必然"和"可能"偏好关系时,任意备选方案对之间关系的确定都需要求解两个规划问题. 此外, ROR过程还是一个交互式过程, DM与DA之间可能会有多个回合的交互. 这些都使得ROR过程成为一个复杂的过程. ROR辅助软件将ROR过程进行封装,可以有效提高ROR过程的效率,同时为DM和DA提供更加方便友好的交互渠道. 在设计的过程中应充分利用已有结果的性质,减少需要计算的规划问题的数量. 例如,利用$\succeq^N$的传递性,若$a \succeq^N b$, $b \succeq^N c$,则无需计算就可以知道$a \succeq^N c$.

2) 将ROR方法用于解决实际的决策问题.

目前,ROR的研究还主要停留在理论研究阶段,方法的验证大多是在示意性例子中进行的. 因此,将ROR理论用于解决实际的决策问题(环境问题、金融问题、军事问题等)将是后续研究的一个重要方向. 将ROR用于实际决策问题,一方面可以为问题解决提供新的方法和思路,另一方面可以对ROR理论进行验证,促进ROR理论的进一步发展.

3) ROR与SMAA结合的更深入探讨.

虽然SMAA与ROR的结合已有了很多的应用,但仍然有进一步深入研究的空间. 例如,可将SMAA与ROR相结合应用于Choquet积分扩展形式(Bipolar Choquet积分[46]、Level-dependence Choquet积分[47]、鲁棒Choquet积分[62]等)上,分析准则间更加复杂的关联关系. 另外,虽然文献[30]已经将SMAA与ROR整合得到的结果用于模型选择问题,但其只使用了结果中的部分信息,这方面也有继续研究的空间.

4) ROR与机器学习中学习排序问题的关系研究.

文献[38]指出, ROR的过程可以看作一个决策模型和DM同时学习的学习过程. ROR中的偏好关系学习与学习排序中的偏好关系学习有很多的联系,为它们的互相借鉴提供了可能性. 从学科的交织处去寻找创新点也将是未来研究的一个方向.

参考文献(References)

[1] Figueira J, Greco S, Ehrgott M. Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys[M]. New York: Springer 2005: 11-12.

[2] Jacquet-Lagreze E, Siskos Y. Preference disaggregation: 20 Years of MCDA experience[J]. European J of Operational Research, 2001, 130(2): 233-245.

[3] Doumpos M, Zopounidis C. Preference disaggregation and statistical learning for multicriteria decision support: A review[J]. European J of Operational Research, 2011, 209(3): 203-214.

[4] Jacquet-Lagreze E, Siskos J. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method[J]. European J of Operational Research, 1982, 10(2): 151-164.

[5] Greco S, Mousseau V, Słowiski R. Ordinal regression revisited: Multiple criteria ranking using a set of additive value functions[J]. European J of Operational Research, 2008, 191(2): 416-436.

[6] Greco S, Mousseau V, Słowiski R. The possible and the necessary for multiple criteria group decision[C]. Int Conf on Algorithmic Decision Theory. Berlin Heidelberg: Springer, 2009: 203-214.

[7] Greco S, Słowiski R, Figueira J R, et al. Robust ordinal regression[C]. Trends in Multiple Criteria Decision Analysis. New York: Springer US, 2010: 241-283.

[8] Corrente S, Greco S, Kadziski M, et al. Robust ordinal regression[C]. Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science. New Jorsey: Johm Wiley and Sons Ltd, 2014: 1-10

[9] Giarlotta A, Greco S. Necessary and possible preference structures[J]. J of Mathematical Economics, 2013, 49(2): 163-172.

[10] Figueira J R, Greco S, Słowiski R. Building a set of

additive value functions representing a reference preorder and intensities of preference: GRIP method[J]. European J of Operational Research, 2009, 195(2): 460-486.

[11] Corrente S, Greco S, Słowiski R. Multiple criteria hierarchy process in robust ordinal regression[J]. Decision Support Systems, 2012, 53(3): 660-674.

[12] Angilella S, Greco S, Matarazzo B. Non-additive robust ordinal regression: A multiple criteria decision model based on the choquet integral[J]. European J of Operational Research, 2010, 201(1): 277-288.

[13] Corrente S. Hierarchy and interaction of criteria in robust ordinal regression[D]. Katania: Dpartment of Economics and Business, University of Catania, 2013.

[14] Angilella S, Bottero M, Corrente S, et al. Non additive robust ordinal regression for urban and territorial planning: An application for siting an urban waste landfill[J]. Annals of Operations Research, 2013, 245(1): 1-30.

[15] Angilella S, Greco S, Matarazzo B. Non-additive robust oirdinal regression with choquet integral, bipolar and level dependent choquet integrals[C]. Joint 2009 Int Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society of Fuzzy Logic and Technology Conf. Lisbon, 2009: 1194-1199.

[16] Corrente S, Greco S, Ishizaka A. Combining analytical hierarchy process and choquet integral within non-additive robust ordinal regression[J]. Omega, 2015, 61: 2-18

[17] Greco S, Mousseau V, Słowiski R. Robust ordinal regression for value functions handling interacting criteria[J]. European J of Operational Research, 2014, 239(3): 711-730.

[18] Greco S, Kadziski M, Mousseau V, et al. ELECTRE GKMS: Robust ordinal regression for outranking methods[J]. European J of Operational Research, 2011, 214(1): 118-135.

[19] Kadziski M Ł, Greco S, Słowiski R. Extreme ranking analysis in robust ordinal regression[J]. Omega, 2012, 40(4): 488-501.

[20] Corrente S, Greco S, Słowiski R. Multiple criteria hierarchy process with ELECTRE and PROMETHEE[J]. Omega, 2013, 41(5): 820-846.

[21] Corrente S, Figueira J R, Greco S. Interaction of criteria and robust ordinal regression in bi-polar PROMETHEE methods[C]. Advances in Computational Intelligence. Berlin Heidelberg: Springer, 2012: 469-479.

[22] Corrente S, Figueira J R, Greco S. Dealing with interaction between bipolar multiple criteria preferences in PROMETHEE methods[J]. Annals of Operations Research, 2014, 217(1): 137-164.

[23] Greco S, Mousseau V, Słowiski R. Multiple criteria sorting with a set of additive value functions[J]. European J of Operational Research, 2010, 207(3): 1455-1470.

[24] Corrente S, Doumpos M, Greco S, et al. Multiple criteria hierarchy process for sorting problems based on ordinal regression with additive value functions[J]. Annals of Operations Research, 2015: 1-23. http://link.springer.com/article/10.1007/s10479-015-1891-1.

[25] Kadziski M, Ciomek K, Słowiski R. Modeling assignment-based pairwise comparisons within integrated framework for value-driven multiple criteria sorting[J]. European J of Operational Research, 2015, 241(3): 830-841.

[26] Kadziski M, Tervonen T, Figueira J R. Robust multi-criteria sorting with the outranking preference model and characteristic profiles[J]. Omega, 2015, 55: 126-140.

[27] Angilella S, Corrente S, Greco S. Stochastic multiobjective acceptability analysis for the choquet integral preference model and the scale construction problem[J]. European J of Operational Research, 2015, 240(1): 172-182.

[28] Angilella S, Corrente S, Greco S, et al. Robust ordinal regression and stochastic multiobjective acceptability analysis in multiple criteria hierarchy process for the choquet integral preference model[J]. Omega, 2015, 63: 154-169.

[29] Kadziski M, Tervonen T. Robust multi-criteria ranking with additive value models and holistic pairwise preference statements[J]. European J of Operational Research, 2013, 228(1): 169-180.

[30] Kadziski M, Tervonen T. Stochastic ordinal regression for multiple criteria sorting problems[J]. Decision Support Systems, 2013, 55(1): 55-66.

[31] Angilella S, Greco S, Matarazzo B. The most representative utility function for non-additive robust ordinal regression[C]. Int Conf on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Berlin Heidelberg: Springer, 2010: 220-229.

[32] Greco S, Kadziski M Ł, Słowiski R. Selection of a representative value function in robust multiple criteria sorting[J]. Computers & Operations Research, 2011, 38(11): 1620-1637.

[33] Kadziski M, Greco S, Słowiski R. Selection of a representative value function in robust multiple criteria ranking and choice[J]. European J of Operational Research, 2012, 217(3): 541-553.

[34] Kadziski M Ł, Greco S, Słowiski R. Selection of a representative set of parameters for robust ordinal regression outranking methods[J]. Computers & Operations Research, 2012, 39(11): 2500-2519.

[35] Kadziski M, Greco S, Słowiski R. Selection of a representative value function for robust ordinal regression in group decision making[J]. Group Decision and Negotiation, 2013, 22(3): 429-462.

[36] Greco S, Słowiski R, Zielniewicz P. Putting dominance-based rough set approach and robust ordinal regression together[J]. Decision Support Systems, 2013, 54(2): 891-903.

[37] Kadziski M, Greco S, Słowiski R. Robust ordinal

regression for dominance-based rough set approach to multiple criteria sorting[J]. Information Sciences, 2014, 283: 211-228.

[38] Corrente S, Greco S, Kadziski M, et al. Robust ordinal regression in preference learning and ranking[J]. Machine Learning, 2013, 93(2/3): 381-422.

[39] Beuthe M, Scannella G. Comparative analysis of UTA multicriteria methods[J]. European J of Operational Research, 2001, 130(2): 246-262.

[40] Bous G, Fortemps P, Glineur F, et al. ACUTA: A novel method for eliciting additive value functions on the basis of holistic preference statements[J]. European J of Operational Research, 2010, 206(2): 435-444.

[41] Marichal J L, Roubens M. Determination of weights of interacting criteria from a reference set[J]. European J of Operational Research, 2000, 124(3): 641-650.

[42] Angilella S, Greco S, Lamantia F, et al. Assessing mon-additive utility for multicriteria decision aid[J]. European J of Operational Research, 2004, 158(3): 734-744.

[43] Grabisch M. The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making[J]. European J of Operational Research, 1996, 89(3): 445-456.

[44] Rota G C. On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions[J]. Probability Theory and Related Fields, 1964, 2(4): 340-368.

[45] Yager R R. Multicriteria decision-making using fuzzy measures[J]. Cybernetics and Systems, 2015, 46(3/4): 150-171.

[46] Greco S, Rindone F. Bipolar fuzzy integrals[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 220: 21-33.

[47] Greco S, Matarazzo B, Giove S. The choquet integral with respect to a level cependent capacity[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 175(1): 1-35.

[48] Subramanian N, Ramanathan R. A review of applications of analytic hierarchy process in operations management[J]. Int J of Production Economics, 2012, 138(2): 215-241.

[49] Roy B. The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods[J]. Theory and Decision, 1991, 31(1): 49-73.

[50] Figueira J R, Greco S, Roy B, et al. An overview of ELECTRE methods and their recent extensions[J]. J of Multi-Criteria Decision Analysis, 2013, 20(1/2): 61-85.

[51] Govindan K, Jepsen M B. ELECTRE: A comprehensive literature review on methodologies and applications[J]. European J of Operational Research, 2016, 250(1): 1-29.

[52] Behzadian M, Kazemzadeh R B, Albadvi A, et al. PROMETHEE: A comprehensive literature review on methodologies and applications[J]. European J of Operational Research, 2010, 200(1): 198-215.

[53] Figueira J, Mousseau V, Roy B. ELECTRE methods[C]. Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. New York: Springer, 2005: 133-153.

[54] Lahdelma R, Hokkanen J, Salminen P. SMAA-Stochastic multiobjective acceptability analysis[J]. European J of Operational Research, 1998, 106(1): 137-143.

[55] Lahdelma R, Salminen P. SMAA-2: Stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making[J]. Operations Research, 2001, 49(3): 444-454.

[56] Tervonen T, Figueira J R. A survey on stochastic multicriteria acceptability analysis methods[J]. J of Multi-Criteria Decision Analysis, 2008, 15(1/2): 1-14.

[57] Tervonen T, van Valkenhoef G, Bastürk N, et al. Hit-and-run enables efficient weight generation for simulation-based multiple criteria decision analysis[J]. European J of Operational Research, 2013, 224(3): 552-559.

[58] van Valkenhoef G, Tervonen T, Postmus D. Notes on ‘hit-and-run enables efficient weight generation for simulation-based multiple criteria decision analysis’[J]. European J of Operational Research, 2014, 239(3): 865-867.

[59] Angilella S, Corrente S, Greco S. SMAA-Choquet: Stochastic multicriteria acceptability analysis for the choquet integral[M]. Advances in Computational Intelligence. Berlin Heidelberg: Springer, 2012: 248-257.

[60] Figueira J, Greco S, Słowiski R. Identifying the “most representative” value function among all compatible value functions in the GRIP[C]. Proc of the 68th EURO Working Group on MCDA. Chania, 2008.

[61] Greco S, Kadziski M, Mousseau V, et al. Robust ordinal regression for multiple criteria group decision: UTA GMS-GROUP and UTADIS GMS-GROUP[J]. Decision Support Systems, 2012, 52(3): 549-561.

[62] Greco S, Rindone F. Robust integrals[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 232: 18-38.

（责任编辑：曹洪武）