

无偏非齐次灰色预测模型的直接建模法

党耀国¹, 刘震^{1,2†}, 叶璟¹

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106)

摘要: 针对灰色预测模型拟合非齐次指数序列时的误差, 对白化微分方程和参数无偏估计方法展开研究. 首先梳理现有非齐次灰色预测模型, 建立 $NGM(1, 1, k)$ 的基本形式; 然后从灰导数和背景值两个角度分别优化, 提出 $NGM(1, 1, k)$ 的两类无偏基本形式, 通过验证两者的统一性得到无偏 $NGM(1, 1, k)$ 的直接建模方法, 并且证明该建模方法具有白指数重合性; 最后利用 6 类数据拟合和南京城市天然气供气量两个算例验证了所提出模型的有效性和实用性.

关键词: 灰色预测; $NGM(1, 1, k)$; 非齐次; 无偏

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Direct modeling method of unbiased non-homogeneous grey prediction model

DANG Yao-guo¹, LIU Zhen^{1,2†}, YE Jing¹

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

Abstract: According to the error problem of grey prediction models calculating non-homogenous index sequences, the whitenization differential equation and the parameter unbiased estimation method are discussed. Firstly, the different forms of the existed non-homogeneous grey prediction model are proved, and the basic form of $NGM(1, 1, k)$ is built. Then two kinds of unbiased basic form of $NGM(1, 1, k)$ are proposed from two aspects which are grey derivative optimization and background value optimization. The direct modeling method of unbiased $NGM(1, 1, k)$ is constructed by verifying the unity of the two models, and the whitenization index repeatability of this method is proved. Finally, the rationality and effectiveness of the model are verified by two examples which are the fitting of six types of data and the total amount simulation of natural gas supply in Nanjing.

Keywords: grey prediction; $NGM(1, 1, k)$; non-homogeneous; unbiased

0 引言

灰色预测理论是灰色系统的重要组成部分^[1], 由于其在数据量较少的情况下可以得到较高的拟合精度, 已经被广泛应用于交通、环境、能源、水利等众多领域^[2-4]. $GM(1, 1)$ 是灰色预测理论的经典模型, 其模拟结果为齐次指数函数, 对具有近似齐次指数规律的序列有较好的预测效果. 随着研究的逐渐深入, 学者们发现即使原始数据完全符合齐次指数规律, $GM(1, 1)$ 模型也不能完全拟合原始序列, 因此众多学者对此问题展开研究. 吉培荣等^[5]提出了无偏 GM 模型的概念, 采用参数修正的方式消除了模型的系统误

差, 后又通过 $GM(1, 1)$ 模型参数特性的研究, 从理论上证明这种系统误差产生的原因^[6]. 穆勇^[7-9]通过调整灰导数和背景值的方法实现了无偏 $GM(1, 1)$ 模型, 并通过公式推导建立了无偏 $GM(1, 1)$ 模型的直接建模法. 王义闹等^[10]也通过优化灰导数实现了无偏 $GM(1, 1)$ 模型. 无偏 $GM(1, 1)$ 模型作为灰色预测领域的一个研究重点, 已经取得了丰富的成果.

随后学者们又指出, 现实生活中具有近似齐次指数规律的序列仅是少数情况, 还有很大一部分数据具有非齐次指数规律. 崔杰等^[11]构建了一种新的灰色预测模型 $NGM(1, 1, k)$, 拓展了灰色预测模型的适

收稿日期: 2016-02-21; 修回日期: 2016-05-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71071077, 71371098); 江苏高校哲学社会科学重点研究基地项目 (2012JDXM005); 江苏省研究生培养创新工程项目 (KYZZ_0106); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (NC2012001, NR2013033).

作者简介: 党耀国 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与数量经济等研究; 刘震 (1987—), 男, 博士生, 从事灰色系统理论的研究.

†通讯作者. E-mail: liuzhen_nuaa@126.com

用范围,使得灰色预测模型可以拟合非齐次指数函数.钱吴永等^[12]构建了含有时间幂次项的GM(1,1, t^α)模型,该模型通过参数 α 的调整可以用于拟合齐次、非齐次指数或者其他类型的数据.站立青等^[13]分析了NGM(1,1, k)模型的建模原理,对模型进行了改进.陈芳等^[14]通过优化NGM(1,1, k)模型的灰导数,使模型具有非齐次指数重合性.姜爱平等^[15]研究了非等间距近似非齐次指数序列的灰色建模方法.谢乃明等^[16-17]拓展离散灰色模型,构建了具有非齐次指数函数特性的离散灰色预测模型,并研究了其性质.曾波等^[18]研究了离散灰色预测模型的升降凹凸性质,通过序列算法的改变实现了非齐次指数函数拟合.

以上研究极大地推动了灰色预测理论的发展,但是目前对非齐次灰色预测模型和研究仍有一些不足:首先模型的基本形式缺乏理论支撑,其次对于模型的

优化仅从灰导数的角度讨论,通过背景值优化是否可以得到无偏模型还没有完善的结论,相应的直接建模公式需要更加深入的分析.为此,本文尝试分析并推导用于拟合近似非齐次指数序列灰色预测模型的白化微分方程;然后通过灰导数和背景值两个角度优化,分别实现模型对于非齐次指数函数的无偏拟合,并证明这两种无偏形式的统一性,据此提出非齐次灰色预测模型的直接建模法,拓展灰色预测模型的适用范围并提高模型的精度;最后,利用6类数据拟合和南京城市天然气供气量两个算例,验证了所提出模型的有效性和实用性.

1 非齐次灰色预测模型

现有非齐次灰色预测模型的形式并不统一.为了直观分析,将相关研究成果中模型的基本形式、白化方程和时间响应函数进行归纳总结,如表1所示.

表1 拟合非齐次指数序列的灰色预测模型总结

模型出处	基本形式	白化方程	时间响应函数
文献[11]	$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk$	$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt$	$x^{(1)}(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}t - \frac{b^2}{a}$
文献[13]	$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(2k-1)b + c$	$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt + c$	$x^{(1)}(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}t + \frac{c}{a} - \frac{b}{a^2}$
文献[14]	$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) + \beta k = b$	$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) + \beta t = b$	$x^{(1)}(t) = Ce^{-at} - \frac{\beta}{a}t + \frac{b}{a} + \frac{\beta}{a^2}$

由表1可见,3种模型时间响应函数的离散形式均为 $x^{(1)}(k) = CA^k + Bk + D$,其中 A 、 B 、 C 、 D 为可变参数.累减还原后可得 $x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = CA^{k-1}(A-1) + B$,满足非齐次指数函数的形式,可用于模拟具有近似非齐次指数函数规律的序列.进一步分析,时间响应函数中 C 为任意变量, A 、 B 、 D 需要通过基本形式的最小二乘估计进行控制.文献[11]的基本形式只含有 a 、 b 两个参数,即基本形式的参数个数小于时间响应函数中的参数个数,这会使时间响应函数中参数 A 、 B 、 D 无法任意取值.因此在原始序列具有近似非齐次指数规律的情况下,灰色预测模型应当采用文献[13-14]的基本形式,而将文献[11]的基本形式看作文献[13-14]的特殊形式,据此可定义非齐次灰色预测模型如下.

定义1 设 $\mathbf{X}_0 = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 为非负序列, \mathbf{X}_1 为 \mathbf{X}_0 的一阶累加序列, $\mathbf{X}_1 = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$, $k = 1, 2, \dots, n$. \mathbf{Z}_1 为 \mathbf{X}_1 的紧邻均值生成序列, $\mathbf{Z}_1 = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n))$, $z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$, $k = 2, 3, \dots, n$.称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk + d \quad (1)$$

为非齐次灰色预测模型的基本形式,简记为NGM(1,1, k).称

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt + d \quad (2)$$

为NGM(1,1, k)模型的白化微分方程.

基本形式主要用于估计参数,通常采用最小二乘方法.由于该方法与经典GM(1,1)模型相同,本文不作详细论述.

对于白化微分方程

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt + d$$

的求解,设 $u = -ax^{(1)}(t) + bt + d$,可得 $\frac{du}{dt} = b - au$,解得 $u = Ce^{-at} + b/a$,代入 u 得到时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}t - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a},$$

其中 C 为任意常数,通常根据初值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 确定.

当参数 $b = 0$ 时,NGM(1,1, k)退化为经典GM(1,1)模型,因此NGM(1,1, k)模型可以看作是经典GM(1,1)模型的拓展.根据模型的时间响应函数可以看出,在NGM(1,1, k)模型中, $-a$ 仍然反映了序列的发展态势,但灰作用量变为 b 、 d 两个.

2 无偏非齐次灰色预测模型的直接建模法

进一步研究可发现,虽然上文介绍的NGM(1, 1, k)模型结果为非齐次指数函数,但如果采用定义1中的基本形式进行参数估计,则即使模拟具有完全非齐次指数函数规律序列,仍然会存在误差.这种误差产生的主要原因来自于模型基本形式和白化微分方程参数间的跳跃替代关系,可以通过调整模型基本形式的灰导数或者背景值构建无偏NGM(1, 1, k)模型,本部分对此问题展开研究.

定理1 若 $x^{(1)}(t)$ 满足白化微分方程

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt + d,$$

则存在 $\lambda_1 = \frac{Ce^{-ak}(e^a - 1 - ae^a) + b}{Ca e^{-ak}(1 - e^a) + b}$,使得

$$\begin{aligned} [x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + a[\lambda_1 x^{(1)}(k) + \\ (1 - \lambda_1)x^{(1)}(k-1)] = bk + d, \\ k = 2, 3, \dots, n; \end{aligned} \quad (3)$$

存在 $\lambda_2 = \frac{b - Ca^2 e^{-ak}}{b + Ca e^{-ak}(1 - e^a)}$,使得

$$\begin{aligned} \lambda_2[x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + ax^{(1)}(k) = bk + d, \\ k = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

证明 将微分方程解的离散形式 $x^{(1)}(k) = Ce^{-ak} + \frac{b}{a}k - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a}$ 代入式(3)和(4),化简后即可得到 λ_1 和 λ_2 . □

注意到,定理1引入了 λ_1 和 λ_2 来改进模型的基本形式,目的是进行更加准确的参数估计.其中:式(3)通过 λ_1 对模型背景值进行调整,式(4)通过 λ_2 对模型灰导数进行调整.所得到的 λ_1 和 λ_2 不仅与参数 a 相关,而且与参数 b 和任意常数 C 相关,这与经典无偏GM(1, 1)模型的直接建模法略有差异.

由于式(3)和(4)的复杂性,不便于直接进行参数估计,需要进一步变形.称式(3)为模型1,式(4)为模型2.为计算简便,令 $A = Ce^{-ak}$,有

$$x^{(1)}(k) = A + \frac{b}{a}k - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a},$$

进行如下推导.

模型1 $[x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + a[\lambda_1 x^{(1)}(k) + (1 - \lambda_1)x^{(1)}(k-1)] = bk + d.$

模型1化简为

$$(1 + a\lambda_1)[x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + ax^{(1)}(k-1) = bk + d. \quad (5)$$

将 $\lambda_1 = \frac{A(e^a - 1 - ae^a) + b}{Aa(1 - e^a) + b}$, $x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) =$

$$\begin{aligned} A(1 - e^a) + \frac{b}{a} \text{代入式(5),得到} \\ \left(-Aae^a + b + \frac{b}{a}\right) + ax^{(1)}(k-1) = bk + d. \end{aligned} \quad (6)$$

由 $x^{(1)}(k) = A + \frac{b}{a}k - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a}$ 可知

$$A = x^{(1)}(k) - \frac{b}{a}k + \frac{b}{a^2} - \frac{d}{a},$$

代入式(6),整理得

$$\begin{aligned} x^{(1)}(k) = \frac{1}{e^a}x^{(1)}(k-1) + \frac{b(e^a - 1)}{ae^a}k + \\ \frac{ab + b - ad + ade^a - be^a}{a^2e^a}. \end{aligned} \quad (7)$$

模型2 $\lambda_2[x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + ax^{(1)}(k) = bk + d.$

将 $\lambda_2 = \frac{b - Aa^2}{b + Aa(1 - e^a)}$, $x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = A(1 - e^a) + \frac{b}{a}$ 代入模型2得到

$$\left(\frac{b}{a} - Aa\right) + ax^{(1)}(k) = bk + d. \quad (8)$$

由 $x^{(1)}(k-1) = Ae^a + \frac{b}{a}(k-1) - \frac{b}{a^2} + \frac{d}{a}$ 可知

$$A = \left[x^{(1)}(k-1) - \frac{b}{a}(k-1) + \frac{b}{a^2} - \frac{d}{a}\right]e^{-a},$$

代入式(8),得到

$$\begin{aligned} x^{(1)}(k) = \frac{1}{e^a}x^{(1)}(k-1) + \frac{b(e^a - 1)}{ae^a}k + \\ \frac{ab + b - ad + ade^a - be^a}{a^2e^a}. \end{aligned} \quad (9)$$

可以发现,模型1与模型2的化简结果完全相同,即式(7)与(9)完全相同,说明NGM(1, 1, k)模型通过调整灰导数或者背景值所达到的最优结果相同.同时式(7)与(9)具有清晰的公式结构,可将其设为新的基本形式进行参数估计.

定义2 若NGM(1, 1, k)模型的白化微分方程为 $\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = bt + d$,则称

$$\begin{aligned} x^{(1)}(k) = \frac{1}{e^a}x^{(1)}(k-1) + \frac{b(e^a - 1)}{ae^a}k + \\ \frac{ab + b - ad + ade^a - be^a}{a^2e^a} \end{aligned} \quad (10)$$

为NGM(1, 1, k)模型的无偏参数估计形式,使用该式进行参数估计的NGM(1, 1, k)模型称为无偏非齐次灰色预测模型的直接建模法.

具体参数求解方法如下.令

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^a} = \mu_1, \frac{b(e^a - 1)}{ae^a} = \mu_2, \\ \frac{ab + b - ad + ade^a - be^a}{a^2e^a} = \mu_3, \end{aligned} \quad (11)$$

则式(10)变形为

$$\begin{aligned} x^{(1)}(k) = \mu_1 x^{(1)}(k-1) + \mu_2 k + \mu_3, \\ k = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

将 $k = 2, 3, \dots, n$ 代入式(12),展开可得

$$x^{(1)}(2) = \mu_1 x^{(1)}(1) + \mu_2 k + \mu_3,$$

$$\begin{aligned} x^{(1)}(3) &= \mu_1 x^{(1)}(2) + \mu_2 k + \mu_3, \\ &\vdots \\ x^{(1)}(n) &= \mu_1 x^{(1)}(n-1) + \mu_2 k + \mu_3. \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 2 & 1 \\ x^{(1)}(2) & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & n & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix},$$

则方程组(12)的简化形式为 $\mathbf{X} = \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}$. 根据最小二乘法得到

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

由式(11)和(14)的估计结果可以得到无偏非齐次灰色预测模型的参数估计值为

$$\hat{a} = \ln \frac{1}{\hat{\mu}_1}, \hat{b} = \frac{\hat{a} e^{\hat{a}} \hat{\mu}_2}{e^{\hat{a}} - 1}, \hat{d} = \frac{\hat{\mu}_3 \hat{a}^2 e^{\hat{a}} + \hat{b} e^{\hat{a}} - \hat{a} \hat{b} - \hat{b}}{\hat{a}(e^{\hat{a}} - 1)}. \quad (15)$$

进而得到离散时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}k - \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2} + \frac{\hat{d}}{\hat{a}}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(1), & k = 1; \\ \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), & k = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (17)$$

以上即为无偏灰色预测模型的直接建模法,其中 C 为任意常数. 若以 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 为初始条件,则常数 $C = \left(x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2} - \frac{\hat{d}}{\hat{a}}\right)e^{\hat{a}}$; 若以 $\hat{x}^{(1)}(m) = x^{(1)}(m) = \sum_{k=1}^m x^{(0)}(k)$, $m = 1, 2, \dots, n$ 为初始条件,

则常数 $C = \left(x^{(0)}(m) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}}m + \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2} - \frac{\hat{d}}{\hat{a}}\right)e^{\hat{a}m}$. 也可以通过误差平方和最小的条件对常数 C 进行求解,本文计算中均以 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 为初始条件.

性质 1 无偏 NGM(1, 1, k) 模型的直接建模法具有白指数重合性.

证明 设原始序列为符合非齐次指数函数规律的离散序列

$$x^{(0)}(k) = de^{a(k-1)} + b, k = 1, 2, \dots, n.$$

可以得到一阶累加生成序列

$$\begin{aligned} x^{(1)}(k) &= d \frac{1 - e^{ak}}{1 - e^a} + bk, \\ x^{(1)}(k-1) &= d \frac{1 - e^{a(k-1)}}{1 - e^a} + b(k-1). \end{aligned}$$

化简后得到

$$\begin{aligned} x^{(1)}(k) &= e^a x^{(1)}(k-1) + b(1 - e^a)k + be^a + d, \\ &k = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)与(10)具有相同结构,因此最小二乘参数估计结果为 $\hat{\mu}_1 = e^a$, $\hat{\mu}_2 = b(1 - e^a)$, $\hat{\mu}_3 = be^a + d$. 根据式(15)可以得出

$$\hat{a} = -a, \hat{b} = -ab, \hat{d} = \frac{ad - b + be^a}{e^a - 1},$$

以 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) = b + d$ 为初始条件可得 $C = \frac{d}{e^a - 1}$, 代入式(16)得到一阶累加序列拟合结果为

$\hat{x}^{(1)}(k) = d \frac{1 - e^{ak}}{1 - e^a} + bk$, 与原始一阶累加序列相同, 累减还原得到 $\hat{x}^{(0)}(k) = de^{a(k-1)} + b$, 与原始序列相同. \square

注意到,本文所构建的无偏直接建模方法与文献[14]中的方法在形式上有所不同,但两式可以相互推导.

3 算例分析

例 1 为了方便对比,采用文献[18]中6组不同类型数据(上升凸、上升凹、下降凸、下降凹、严格非齐次、近似非齐次)进行拟合,利用经典 GM(1, 1) 模型^[1]、无偏 GM(1, 1) 模型^[9]、原始 NGM(1, 1, k) 模型^[11]和本文所构建的无偏 NGM(1, 1, k) 模型进行模拟,计算结果的精度如表2所示.

由表2可见,作为对比组的3类模型均具有较大的误差,尤其是原始 NGM(1, 1, k) 模型在 X_3 下降凸与 X_4 下降凹两组数据中,表现出升降性完全相反的错误. 本文所构建的无偏 NGM(1, 1, k) 模型在6组数据中均得到了最高的精度,且精度优势较为明显,尤其在 X_5 严格非齐次序列中实现了完全拟合,表明了本文所构建模型的有效性.

例 2 为了进一步验证模型在处理实际问题中的效果,对南京市天然气供气总量进行拟合. 南京市居民天然气改造自2004年开始,至今只有10年的时间,并且初始阶段数据不稳定,因此选用2009~2013年数据进行建模,2014年数据验证预测效果. 由于该数据符合灰色系统“少数据、贫信息”的特点,选择灰色预测方法建模. 为了分析本文所构建的无偏 NGM(1, 1, k) 模型的拟合效果,仍然采用例1中的模型进行对比,结果如表3所示.

由表3可见,原始 NGM(1, 1, k) 模型的拟合效果最差,平均相对误差高达12.08%,经典 GM(1, 1) 和无偏 GM(1, 1) 模型的拟合误差适中,但是在预测误差中,3类对比模型的表现均不尽如人意. 本文无偏 NGM(1, 1, k) 模型的模拟和预测精度均为最高,表明了所构建模型的实用性.

表2 计算结果和精度比较

序列	建模数据	模型	模拟数据	平均相对误差 / %
X ₁	1.2, 2.9, 4.2, 5.1, 5.8 (上升凸)	经典 GM(1, 1)	1.200 0, 3.213 0, 3.947 9, 4.850 8, 5.960 2	4.889 1
		无偏 GM(1, 1)	1.200 0, 3.234 9, 3.972 3, 4.877 7, 5.989 6	4.919 4
		原始 NGM(1, 1, k)	1.200 0, 2.215 1, 3.454 1, 4.498 2, 5.377 9	12.090 7
		本文模型	1.200 0, 2.903 7, 4.186 3, 5.117 1, 5.792 7	0.183 1
X ₂	8.5, 16.4, 32.3, 64.2, 128.1 (上升凹)	经典 GM(1, 1)	8.500 0, 15.345 0, 29.760 1, 57.716 8, 111.936 2	7.402 6
		无偏 GM(1, 1)	8.500 0, 16.178 0, 32.200 4, 64.091 1, 127.565 8	0.449 7
		原始 NGM(1, 1, k)	8.500 0, 12.026 3, 25.696 7, 51.281 2, 99.163 2	17.964 9
		本文模型	8.500 0, 16.395 6, 32.306 5, 64.193 4, 128.097 8	0.011 8
X ₃	5.8, 5.1, 4.2, 2.9, 1.2 (下降凸)	经典 GM(1, 1)	5.800 0, 5.329 2, 3.718 8, 2.595 1, 1.810 9	15.474 9
		无偏 GM(1, 1)	5.800 0, 5.403 7, 3.734 9, 2.581 5, 1.784 3	15.340 0
		原始 NGM(1, 1, k)	5.800 0, 6.103 3, 22.050 0, 139.803 2, 1 009.313 5	17 834.985 2
		本文模型	5.800 0, 5.108 5, 4.180 1, 2.916 3, 1.195 9	0.309 5
X ₄	128.1, 64.2, 32.3, 16.4, 8.5 (下降凹)	经典 GM(1, 1)	128.100 0, 62.461 3, 32.414 4, 16.821 5, 8.729 5	1.666 6
		无偏 GM(1, 1)	128.100 0, 64.136 1, 32.456 2, 16.424 5, 8.311 6	0.589 7
		原始 NGM(1, 1, k)	128.100 0, 62.219 1, 76.471 4, 106.145 9, 167.931 0	512.545 8
		本文模型	128.100 0, 64.201 1, 32.295 1, 16.407 4, 8.496 0	0.021 7
X ₅	5, 11, 29, 83, 245 (严格非齐次)	经典 GM(1, 1)	5.000 0, 7.556 0, 20.095 8, 53.466 7, 142.146 3	27.920 2
		无偏 GM(1, 1)	5.000 0, 8.730 8, 25.443 7, 74.149 0, 216.087 4	11.071 3
		原始 NGM(1, 1, k)	5.000 0, 7.669 9, 20.006 2, 52.964 7, 141.018 3	27.983 2
		本文模型	5.000 0, 11.000 0, 29.000 0, 83.000 0, 245.000 0	0.000 0
X ₆	1.4, 2.0, 2.8, 3.9, 5.4 (近似非齐次)	经典 GM(1, 1)	1.400 0, 1.990 6, 2.759 8, 3.826 2, 5.304 8	1.112 0
		无偏 GM(1, 1)	1.400 0, 2.011 7, 2.797 4, 3.889 8, 5.408 8	0.221 3
		原始 NGM(1, 1, k)	1.400 0, 1.393 9, 2.382 7, 3.488 5, 4.725 2	13.651 5
		本文模型	1.400 0, 1.999 4, 2.801 4, 3.898 8, 5.400 3	0.023 5

表3 南京城市天然气供气总量(万立方米)模拟与预测效果对比

	2009年	2010年	2011年	2012年	2013年	平均相对误差 / %	2014年	预测误差 / %
实际值	45 195	59 651	68 066	77 669	88 627	—	92 568	—
经典 GM(1, 1)	45 195	59 813	68 222	77 813	88 753	2.38	101 130	9.25
无偏 GM(1, 1)	45 195	38 608	60 173	73 555	81 859	2.48	101 231	9.36
原始 NGM(1, 1, k)	45 195	57 064	70 378	79 987	86 922	12.08	87 012	6.00
本文模型	45 195	59 651	68 066	77 669	88 627	1.78	91 927	0.69

4 结 论

NGM(1, 1, k) 是传统 GM(1, 1) 模型的一种拓展形式, 其最终拟合结果可以为非齐次指数序列, 具有一定的研究价值. 本文重点对 NGM(1, 1, k) 模型的基本形式进行了推导, 在此基础上构建了无偏 NGM(1, 1, k) 模型, 最终通过两个算例验证了所构建模型的有效性和实用性. 在更加普遍的实际

数据中, 灰色预测模型的误差产生原因仍然值得进一步研究.

参考文献 (References)

[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 226-227. (Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its applications[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 226-227.)

- [2] Ruey-Jing Lian. Enhanced adaptive grey-prediction self-organizing fuzzy sliding-mode controller for robotic systems[J]. Information Sciences, 2013, 236(1): 186-204.
- [3] Dinh Quang Truong, Kyoung Kwan Ahn, Nguyen Thanh Trung. Design of an advanced time delay measurement and a smart adaptive unequal interval grey predictor for real-time nonlinear control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2013, 60(10): 4547-4589.
- [4] Wei Niu, Juan Cheng, Guoqing Wang. Applications of extension grey prediction model for power system forecasting[J]. J of Combinatorial Optimization, 2013, 26(3): 555-567.
- [5] 吉培荣, 黄巍松, 胡翔勇. 无偏灰色预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 20(6): 6-7.
(Ji P R, Huang W S, Hu X Y. An unbiased grey forecasting model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2000, 20(6): 6-7.)
- [6] 吉培荣, 黄巍松, 胡翔勇. 灰色预测模型特性的研究[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(9): 105-108.
(Ji P R, Huang W S, Hu X Y. A study on the properties of grey forecasting model[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2001, 21(9): 105-108.)
- [7] 穆勇. 具有白指数律重合性的GM(1, 1)模型[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(1): 15-19.
(Mu Y. GM(1, 1) With white exponential law coincidence property[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2002, 32(1): 15-19.)
- [8] 穆勇. 优化灰导数白化值的无偏灰色GM(1, 1)模型[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(3): 13-16.
(Mu Y. An unbiased GM(1, 1) model with optimum grey derivative's whitening values[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003, 33(3): 13-16.)
- [9] 穆勇. 无偏灰色GM(1, 1)模型的直接建模法[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(9): 1094-1095.
(Mu Y. A direct modeling method of the unbiased GM(1, 1)[J]. Systems Engineering and Electronics, 2003, 25(9): 1094-1095.)
- [10] 王义闹, 刘开第, 李应川. 优化灰导数白化值的GM(1, 1)建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 124-128.
(Wang Y N, Liu K D, Li Y C. GM(1, 1) modeling method of optimum the whitening values of grey derivative[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2001, 21(5): 124-128.)
- [11] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 一种新的灰色预测模型及其建模机理[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1702-1706.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel grey forecasting model and its modeling mechanism[J]. Control and Decision, 2009, 24(11): 1702-1706.)
- [12] 钱吴永, 党耀国, 刘思峰. 含时间幂次项的灰色GM(1, 1, t^α)模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(10): 2247-2252.
(Qian W Y, Dang Y G, Liu S F. Grey GM(1, 1, t^α) model with time power and its application[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2012, 32(10): 2247-2252.)
- [13] 站立青, 施化吉. 近似非齐次指数数据的灰色建模方法与模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 689-694.
(Zhan L Q, Shi H J. Methods and model of grey modeling for approximation non-homogenous exponential data[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2013, 33(3): 689-694.)
- [14] 陈芳, 魏勇. 近非齐次指数序列GM(1, 1)模型灰导数的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2874-2878.
(Chen F, Wei Y. Approximate non-homogeneous index sequence GM(1, 1) model of grey derivative optimization[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2013, 33(11): 2874-2878.)
- [15] 姜爱平, 张启敏. 非等间距近似非齐次指数序列的灰色建模方法及其优化[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(12): 3199-3203.
(Jiang A P, Zhang Q M. Methods and optimum of grey modeling for approximation non-homogenous and non-equidistant series[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2014, 34(12): 3199-3203.)
- [16] 谢乃明, 刘思峰. 离散灰色模型的拓展及其最优化求解[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(6): 108-112.
(Xie N M, Liu S F. Research on extension of discrete grey model and its optimize formula[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2006, 26(6): 108-112.)
- [17] 谢乃明, 刘思峰. 近似非齐次指数序列的离散灰色模型特性研究[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(5): 863-867.
(Xie N M, Liu S F. Research on the non-homogenous discrete grey model and its parameter's properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(5): 863-867.)
- [18] 曾波, 刘思峰. 近似非齐次指数序列的DGM(1, 1)直接建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(2): 297-301.
(Zeng B, Liu S F. Direct modeling approach of DGM(1, 1) with approximate non-homogeneous exponential sequence[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2011, 31(2): 297-301.)

(责任编辑: 郑晓蕾)