

广义依赖型不平衡语言集结算子及其在多属性决策中的应用

韩冰¹, 陈华友^{1†}, 周礼刚¹, 刘金培², 陶志富³, 朱家明¹

(1. 安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601; 2. 安徽大学 商学院,
合肥 230601; 3. 安徽大学 经济学院, 合肥 230601)

摘要: 针对属性值是不平衡语言的多属性决策问题, 提出了广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子和加权广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子. 该类算子相关联的权重向量赋权的特点是对有偏见的评价赋予较小的权重, 从而削弱不公平性对评价结果的影响, 使决策结果更加合理. 推导其数学表达式, 探讨相关性质, 并将其应用到多属性决策中. 同时, 分析了参数 λ 的变化对决策结果的影响. 最后通过比较分析结果表明了所提出算子的有效性.

关键词: 多属性决策; 不平衡语言; 广义依赖型算子

中图分类号: C934; N945.25 文献标志码: A

Generalized dependent unbalanced linguistic aggregation operators and their applications to multiple-attribute decision making

HAN Bing¹, CHEN Hua-you^{1†}, ZHOU Li-gang¹, LIU Jin-pei², TAO Zhi-fu³, ZHU Jia-ming¹

(1. School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China; 2. School of Business, Anhui University, Hefei 230601, China; 3. School of Economics, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: The generalized dependent unbalanced linguistic ordered weighted average (GDULOWA) operator and the weighted generalized dependent unbalanced linguistic ordered weighted average (WGDULOWA) operator are proposed based on multiple attribute decision making, in which attribute values take the form of unbalanced linguistic variables. The associated weights depend on the decision maker and the aggregated unbalanced linguistic variable, which can relieve the influence of unfair linguistic variables by assigning low weights to the biased ones, and make the decision results more reasonable. The concrete expressions of these operators are obtained by derivation, and some properties of these operators are investigated. These operators are applied to multi-attribute decision making. At the same time, the influence of different parameters λ on decision making is analyzed. The comparative analysis shows the effectiveness of the proposed generalized operators.

Keywords: multiple-attribute decision; unbalanced linguistic variable; generalized dependent operator

0 引言

作为多准则决策的重要组成部分, 多属性决策和多目标决策一起构建起多准则决策体系. 多属性决策侧重于离散的、有限多个方案决策问题的研究. 多属性决策的实质是利用已有的决策信息通过一定的模型方法对有限个方案进行排序, 从而确定最优方案. 多属性决策^[1]的核心问题之一是如何合理有效地集结信息, 常规的集结算子是加权平均 (WA) 算子^[2]. Yager^[3]提出了有序加权平均 (OWA) 算子, Xu 等^[4]提出了有序加权几何平均 (OWGA) 算子, Chen

等^[5-6]提出了广义直觉模糊交叉影响平均 (GIFWIA) 算子和直觉模糊几何交叉影响平均 (IFGIA) 算子. 随着决策环境不确定性的增加和人类思维模糊性的影响, 决策问题的信息呈现出多样的表达形式. 采用语言变量定性地表达决策信息成为一种常见的模糊信息形式^[7], 在决策^[8-11]、情报检索^[12]、服务评价和人力资源管理^[13]、安全应用^[14]等领域有着广泛的应用.

自 Zadeh 提出语言变量^[15-17]表示偏好关系以来, 国内外学者对语言变量的运算法则和信息集成进行了大量的研究. Bonissone 等^[18]提出了用于词计算的

收稿日期: 2016-04-01; 修回日期: 2016-06-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71371011, 71301001, 71501002); 安徽大学研究生学术创新研究扶持项目 (yfc100003); 安徽省高校优秀青年人才支持计划项目; 安徽省自然科学基金项目 (1508085QG149).

作者简介: 韩冰 (1980—), 女, 讲师, 从事预测与决策分析的研究; 陈华友 (1969—), 男, 教授, 博士生导师, 从事预测与决策分析等研究.

†通讯作者. E-mail: huayouc@126.com

语义模型; Xu^[19-20]提出了虚拟语言术语的概念, 将离散语言术语扩展到连续的情形并定义了语言信息的加法、减法、指数和幂运算; Tao等^[21]提出了基于Archimedean三角范数的语言信息的新运算, 满足代数运算的基本性质和封闭性; 为了有效避免集结过程中信息的损失和集结结果的不精确性, Herrera等^[22]给出了二元语义的计算模型, 提出二元语义算术平均(2TAA)算子、二元语义加权平均(2TWA)算子、二元语义有序加权平均(2TOWA)算子和拓展的二元语义加权平均(E2TWA)算子; Wei^[23]提出了拓展的二元语义加权几何(E2TWGA)算子和拓展的二元语义有序加权几何(E2TOWGA)算子; 刘金培等^[24]提出了二元语义Bonferroni平均(2TLBA)算子, 在集结的过程中, 考虑了集成信息之间的相互影响; Wan^[25-26]提出了拓展的二元语义混合语言加权平均(E2THLWA)算子和拓展的二元语义混合语言加权几何平均(E2THLWGA)算子, 这两类算子同时考虑了二元语义语言变量的值和二元语义语言变量的有序位置, 有效地处理了属性值、属性权重和专家权重均为二元语义语言信息的决策问题, 更加贴近实际情况; Gong^[27-28]提出了二元语义语言偏好关系的最优群一致性模型和乘性偏好关系的最优群一致性偏好测度, 通过最小化两偏好关系间的一致度建立最优模型来解决群决策问题。

语言术语集通过语言变量刻画决策信息, 然而现有文献研究的语言信息大都是均匀且对称分布的, 很少考虑不对称且不均匀分布的语言变量的情形。例如, 专家利用语言术语集{极差, 低, 中等, 中等偏上, 高, 很高, 非常高, 接近极好, 极好}进行等级评定。在处理语言标度时, 居于中间评价术语“中等”右侧的语言术语数(5个)大于左侧的语言术语数(2个)。为此, Herrera等^[29]提出了基于语言层级不平衡的语言术语集的概念, 这更加与现实情况相符, 能够很好地体现人类思维的跳跃性。

不平衡的语言术语集具有刻画决策信息的一些优点, 因此该信息集成方法的研究引起了学术界的关注。Zou等^[30]提出了不平衡语言的有序加权几何(OWG)算子, Meng等^[31]提出了加权不平衡语言集结算子和有序加权不平衡语言集结算子, Jiang等^[32]提出了不平衡语言的比例二元Power平均(PA)算子。上述方法考虑算子的重要性权重均带有一定的主观因素。为了充分利用已知的决策信息, 客观地反映所集结的属性的程度, Xu^[33]提出了Dependent有序加权平均(DOWA)算子, 并研究了DOWA算子的性

质。Wei等^[34]将其拓展到语言环境下, 在DOWA算子和DOWGA算子的基础上提出了二元语义的DOWA算子和DOWGA算子。

然而, 目前尚未见到相关文献探讨在不平衡语言的环境下如何确定集结算子的权重, 削弱不公平性对决策结果的影响。为此, 本文将不平衡的语言信息与广义依赖型集结算子结合, 提出广义依赖型不平衡语言有序加权平均(GDULOWA)算子和加权广义依赖型不平衡语言有序加权平均(WGDULOWA)算子, 推导其数学表达式, 研究其相关性质并应用到多属性决策中。同时, 分析了其中参数变化对决策结果的影响, 并通过比较分析表明了所提算子的有效性。

1 二元语义和不平衡语言的表述及计算模型

1.1 二元语义

为了消除传统语言变量在信息集成过程中的信息损失问题, Herrera等^[22]提出了二元语义的概念。决策者通过二元数组 (s_k, α_k) 表示评价信息, s_k 是预先定义好的语言评价集 S 中第 k 个元素, α_k 是集结后的语言术语与最接近术语 s_k 之间的差别, $\alpha_k \in [-0.5, 0.5]$ 。为了实现语言术语和二元语义以及实数值和二元语义之间的转换, 引入转换函数的定义如下。

定义1^[22] 设 $S = (s_0, s_1, \dots, s_g)$ 是一个语言术语集, 对于 $\forall s_i \in S$, 令 $f(s_i) = (s_i, 0)$, 则称 $f: S \rightarrow S \times [-0.5, 0.5]$ 是语言术语对应的二元语义的转换函数。

定义2^[22] 设 $S = (s_0, s_1, \dots, s_g)$ 是一个语言术语集, $\beta \in [0, g]$ 是集结语言评价得到的实数值, 令

$$\Delta(\beta) = \begin{cases} s_k, & k = \text{round}(\beta); \\ \alpha_k = \beta - k, & \alpha_k \in [-0.5, 0.5]. \end{cases} \quad (1)$$

则称 $\Delta: [0, g] \rightarrow S \times [-0.5, 0.5]$ 是实数值对应的二元语义的转换函数, 其中round为取整算子。

同样的, $\Delta^{-1}: S \times [-0.5, 0.5] \rightarrow [0, g]$ 是二元语义到 $[0, g]$ 之间实数值的转换函数。

为了比较任意两个语言术语 (s_i, α_i) 和 (s_j, α_j) , 定义其序关系如下: 1) 若 $i > j$, 则 $s_i > s_j$. 2) 若 $i = j$, 则当 $\alpha_i > \alpha_j$ 时, 有 $s_i > s_j$; 当 $\alpha_i = \alpha_j$ 时, 有 $s_i = s_j$.

1.2 不平衡语言的表述模型

定义3^[29] 不平衡的语言术语集指包含最大、最小和中间标度, 其他标度不对称且不均衡地分布在中间标度左右两侧的语言术语集, 记为 $S = S_L \cup S_C \cup S_R$. 其中: 左侧集 S_L 包含了除中间标度以外所有的左边标度, 中间集 S_C 仅包含中间标度, 右侧

集 S_R 包含了比中间标度高的所有标度.

例1 专家给出语言评价集 $S = \{N, M, H, VH, P\}$, 评价某学校学生的综合素质. 其中 N 为极差, M 为中等, H 为高, VH 为很高, P 为完美. 该评价集有最大标度 P , 最小标度 N 和中间标度 M , $S_L = \{N\}$, $S_C = \{M\}$, $S_R = \{H, VH, P\}$. 在处理评价偏好尺度时, 专家给出的语言术语数明显右边高于左边, 因此是不平衡的语言术语集, 如图1所示.



图1 不平衡的语言术语集

为了得到不平衡的语言标度值, 引入语言层级的定义

定义4^[29] 设 $l(t, n(t))$ 是粒度为 n 的第 t 层对应的语言术语集, 则称具有若干层不同粒度的语言术语集所构成的集合为语言层级, 记为 $LH = \bigcup_t l(t, n(t))$.

例2 一个3层的语言层级可表示为

$$LH = l(1, 3) \cup l(2, 5) \cup l(3, 9) = \{s_0^3, \dots, s_2^3\} \cup \{s_0^5, \dots, s_4^5\} \cup \{s_0^9, \dots, s_8^9\}.$$

其中: $n(1) = 3, n(2) = 5, n(3) = 7$, 即第1层为3个粒度的语言术语集, 第2层为5个粒度的语言术语集, 第3层为9个粒度的语言术语集. 如图2所示.

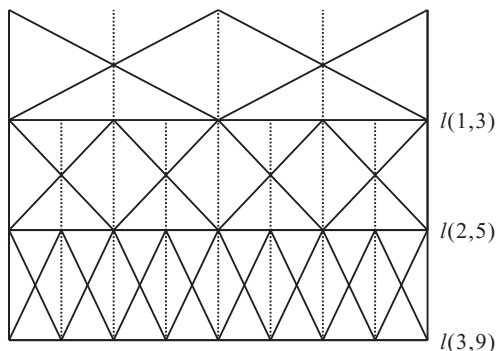


图2 三层语言层级的示意图

借助语言层级, 可以获得不平衡语言标度值. 下面通过一个具体的例子说明转化过程.

例3 设专家给出的语言评价集 $S = \{N, M, H, VH, P\}$, 按照上述3层语言层级 $LH = \bigcup_{t=1}^3 l(t, n(t))$ 可进行如下转换.

1) $S_L = \{N\}$, 设 $\#(S_L)$ 表示 S_L 中语言术语数, 即 $\#(S_L) = 1$. $\exists N(1) = 3$, 满足 $(N(1) - 1)/2 = 1 = \#(S_L)$, 故 N 可由 LH 的第1层标度表示.

2) $S_R = \{H, VH, P\}$, 设 $\#(S_R)$ 表示 S_R 中语言术语数, 即 $\#(S_R) = 3$. $\exists N(2) = 5, \exists N(3) = 9$, 满足 $(N(2) - 1)/2 = 2 < \#(S_R) < (N(3) - 1)/2 = 4$, 从而 $S_R = \{H, VH, P\}$ 可由 LH 的第2、3层标度表示. 设 lab_2 和 lab_3 分别为 LH 的第2、3层分配的语言标度数, 根据文献[29]中的性质可知 $lab_2 = (n(3) - 1)/2 -$

$\#(S_R) = 1, lab_3 = 2$. 故右侧集可用第2层的两个标度和第3层的一个标度来表示, 即 $H = s_3^5, VH = s_7^9, P = s_8^9$.

3) $S_C = \{M\}$, 则有 $M = s_1^3$.

通过两类转换函数可以获得不平衡语言术语的二元语义.

定义5^[29] 设 S 是不平衡的语言术语集, $\forall s_i \in S$, 令 $LH(s_i, \alpha_i) = (s_k^{n(t)}, \alpha_i)$, 则称 $LH: (S \times [-0.5, 0.5]) \rightarrow (LH \times [-0.5, 0.5])$ 是不平衡语言到平衡语言的转换函数. 类似的, 令 $LH^{-1}(s_k^{n(t)}, \alpha_i) = (s_i, \lambda)$, 则称 $LH^{-1}: (LH \times [-0.5, 0.5]) \rightarrow (S \times [-0.5, 0.5])$ 是平衡语言到不平衡语言的转换函数. 其中 $s_k^{n(t)} \in S^{n(t)}$, λ 的取值分为以下情况:

1) 若 $s_i (s_i \in S)$ 仅由 LH 中的一个标度表示, 即 $s_i \leftarrow s_k^{n(t)}$, 则 $\lambda = \alpha_i$;

2) 若 $s_i (s_i \in S)$ 可由 LH 中的两个标度表示, 则 $\lambda = \alpha_i$ 或

$$\lambda = \frac{\Delta_t^{-1}(s_k^{n(t)}, \alpha_i) \cdot (n(t+1) - 1)}{n(t) - 1} - \text{round}\left(\frac{\Delta_t^{-1}(s_k^{n(t)}, \alpha_i) \cdot (n(t+1) - 1)}{n(t) - 1}\right); \quad (2)$$

3) 若不存在 $s_i \in S$ 使得 $s_i \leftarrow s_k^{n(t)}$, 则转换到其他层, 即 $LH^{-1}(s_k^{n(t)}, \alpha_i) = LH^{-1}(TF_{t'}^t(s_k^{n(t)}, \alpha_i))$, 再用式(1)或(2)处理.

例4 延续例3, 有 $LH(P, 0) = (s_8^9, 0), LH^{-1}(s_8^9, 0) = (N, 0), LH^{-1}(s_6^9, 0.16) = LH^{-1}(TF_2^3(s_6^9, 0.16)) = LH^{-1}(s_3^5, 0.08) = (H, 0.16)$.

2 广义依赖型不平衡语言有序加权平均(GDULOWA)算子

Xu^[33] 提出了 DOWA 算子, 通过对错误的或有偏见的评价值赋予较小的权重, 从而减弱这些评价值对决策结果的影响.

定义6^[33] 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是一组数, u 是这组数的均值, $u = \sum a_i / n, (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的任意一个置换, 对于任意的 $i = 2, 3, \dots, n$, 满足 $a_{\sigma(i-1)} \geq a_{\sigma(i)}$, 则称

$$DOWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 - \frac{|a_{\sigma(j)} - u|}{\sum_{j=1}^n |a_{\sigma(j)} - u|} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\sum_{j=1}^n |a_{\sigma(j)} - u|}{\sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{|a_{\sigma(j)} - u|}{\sum_{j=1}^n |a_{\sigma(j)} - u|}\right)} \right] a_{\sigma(j)} \quad (3)$$

为依赖型有序加权平均(DOWA)算子.

在文献[33]的基础上, 针对不平衡的语言标度, 引入广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子, 并证

明其相关性质.

定义7 设 S 是不平衡的语言术语集, $s_i \in S$, 则称

$$(\bar{s}, \bar{\alpha}) = \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_j, 0))) \right) \right) \quad (4)$$

是这组不平衡语言术语的算术平均值. 其中: t_H 是 LH 中粒度最大的层, $\text{TF}_{t_H}^t$ 是 t 层到 t_H 层的转换函数.

定义8 设 (s_i, α_i) 和 (s_j, α_j) 是任意两个不平衡的二元语义, 则称

$$d((s_i, \alpha_i), (s_j, \alpha_j)) = \frac{1}{G(t_H)} |\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_i, \alpha_i))) - \Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_j, \alpha_j)))| \quad (5)$$

是 (s_i, α_i) 与 (s_j, α_j) 之间的距离, 其中 $G(t_H)$ 是 LH 中 t_H 层的粒度.

定义9 设 S 是不平衡的语言术语集, $s_i \in S (i = 1, 2, \dots, n)$, $(\bar{s}, \bar{\alpha})$ 是这组不平衡语言术语的算术平均值, 则称

$$\text{Sim}((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha})) = 1 - \frac{d((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{\sum_{j=1}^n d((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))} \quad (6)$$

是 $(s_{\sigma(j)}, 0)$ 与 $(\bar{s}, \bar{\alpha})$ 的相似度. 其中: $(\sigma(1), (\sigma(2), \dots, \sigma(n))$ 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的任意一个置换; $s_{\sigma(j)}$ 是不平衡语言术语集中第 j 大的语言变量, 对于任意的 $j = 2, 3, \dots, n$, 满足 $s_{\sigma(j-1)} \geq s_{\sigma(j)}$.

现实生活中, 专家会根据自己的偏好对评价对象给出过高或过低的评价. 对这种带有个人偏见的评价, 应赋予较小的权重, 即对远离平均值的评价给予较小的权重, 而对于接近平均值的评价应赋予较大的权重. 基于这种想法, 提出了不平衡语言术语集中 $s_{\sigma(j)}$ 的权重, 即依赖型权重如下:

$$w_j = \frac{\text{Sim}((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{\sum_{j=1}^n \text{Sim}((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

其中: $w_j \geq 0, \sum_{j=1}^n w_j = 1$. 特别地, 对于任意的 $j = 1, 2, \dots, n$, 若 $s_i = s_j$, 则 $w_1 = w_2 = \dots = w_n$.

性质1 设 S 是不平衡的语言术语集, $s_i \in S (i = 1, 2, \dots, n)$, $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的任意一个置换, 对于任意的 $j = 2, 3, \dots, n$, 满足 $s_{\sigma(j-1)} \geq s_{\sigma(j)}$. 若 $\text{Sim}((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha})) \geq \text{Sim}((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))$, 则 $w_j \geq w_i$.

该性质的证明直接由式(6)而得.

下面定义广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子.

定义10 设 S 是不平衡的语言术语集, $s_i \in S (i = 1, 2, \dots, n)$, $s_{\sigma(j)}$ 是 s 中第 j 大的语言变量, $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的任意一个置换, 对于任意的 $j = 2, 3, \dots, n$, 满足 $s_{\sigma(j-1)} \geq s_{\sigma(j)}$. $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 是相应的加权向量, 满足 $w_j \geq 0, \sum_{j=1}^n w_j = 1$. $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是态度参数, 则称函数

$$\text{GDULOWA}_\lambda(s_1, s_2, \dots, s_n) = \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\sum_{j=1}^n w_j ((\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_{\sigma(j)}, 0))))^\lambda \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (8)$$

为广义依赖型不平衡语言有序加权平均(GDULOWA)算子.

由上可见, GDULOWA 算子的权重依赖于被集结的不平衡语言变量与其算术平均值之间的距离. 其最大优势是通过对有个人偏见或错误的评价赋予较小的权重来消减不公平性对决策结果的影响. 特别地, 对于任意的 $j = 1, 2, \dots, n$, 若 $s_i = s_j$, 则 $w_1 = w_2 = \dots = w_n$.

由定义10可知, 当参数取不同的值时, 可得到 GDULOWA 的某些特殊形式:

- 1) $\lambda = 1$, 则 GDULOWA 退化为依赖型不平衡语言有序加权平均(DULOWA)算子;
- 2) $\lambda = 2$, 则可得到依赖型不平衡语言有序加权平方平均(DULOWQA)算子;
- 3) $\lambda \rightarrow 0$, 则 GDULOWA 退化为依赖型不平衡语言有序加权几何平均(DULOWGA)算子;
- 4) $\lambda = -1$, 则得到依赖型不平衡语言有序加权调和平均(DULOWHA)算子.

特别地, 当态度参数 $\lambda \rightarrow -\infty$ 时, 集结结果趋向于最小的语言术语 s_1 ; 当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, 集结结果趋向于最大语言术语 s_n . 从管理学的角度, λ 变化的意义表现为决策者偏好态度的变化对方案综合评价的影响程度. 若决策者较为乐观, 则可取较大的态度参数; 若决策者较为悲观, 则取较小的态度参数. 在同一决策过程中, 对于不同的方案赋予不同的态度参数, 会使得该方案的综合评价值偏高或偏低. 为了保证决策的公平性和合理性, 在同一个决策过程中, 对于不同的评价方案通常采用相同的态度参数 λ .

GDULOWA 算子具有置换不变性、幂等性、有界性如下.

性质2 (置换不变性) 设 S 是不平衡的语言术语集, $s_i \in S (i = 1, 2, \dots, n)$, 若 $(s'_1, s'_2, \dots, s'_n)$ 是 (s_1, s_2, \dots, s_n) 的任意一组置换, 则 $\text{GDULOWA}_\lambda(s'_1, s'_2,$

$\dots, s'_n) = \text{GDULOWA}_\lambda(s_1, s_2, \dots, s_n)$, GDULOWA 是一个净算子.

证明

$$\begin{aligned} & \text{GDULOWA}_\lambda(s'_1, s'_2, \dots, s'_n) = \\ & \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\sum_{j=1}^n w_j (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_{\sigma(j)}, 0))))^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right) = \\ & \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\frac{\sum_{j=1}^n \text{Sim}((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{\sum_{j=1}^n \text{Sim}((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))} \right. \right. \\ & \left. \left. (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_{\sigma(j)}, 0))))^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right) = \\ & \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\frac{\sum_{j=1}^n \text{Sim}((s_j, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{\sum_{j=1}^n \text{Sim}((s_j, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))} \right. \right. \\ & \left. \left. (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_j, 0))))^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right) = \\ & \text{GDULOWA}_\lambda(s_1, s_2, \dots, s_n). \quad \square \end{aligned}$$

性质3 (幂等性) 设 S 是不平衡的语言术语集, $s_i \in S (i = 1, 2, \dots, n)$. 若 $\forall j = 1, 2, \dots, n, s_j = s$ 都成立, 则 $\text{GDULOWA}_\lambda(s_1, s_2, \dots, s_n) = s$, 即幂等性成立.

证明 注意到, 若 $\forall j = 1, 2, \dots, n, s_j = s$ 都成立, 则 $w_1 = w_2 = \dots = w_n = \frac{1}{n}$, 代入式(7)结论成立. \square

性质4 (有界性) 设 S 是不平衡的语言术语集, $s_i \in S (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\min((s_1, 0), (s_2, 0), \dots, (s_n, 0)) \leq \text{GDULOWA}_\lambda(s_1, s_2, \dots, s_n) \leq \max((s_1, 0), (s_2, 0), \dots, (s_n, 0))$.

证明 设 $\min(s_1, s_2, \dots, s_n) = s_*, \max(s_1, s_2, \dots, s_n) = s^*$, 则 $\text{GDULOWA}_\lambda(s_1, s_2, \dots, s_n) = \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\sum_{j=1}^n w_j (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_{\sigma(j)}, 0))))^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right) \geq \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\sum_{j=1}^n w_j (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_*, 0))))^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right) = (s_*, 0)$.

同理可证 $\text{GDULOWA}_\lambda(s_1, s_2, \dots, s_n) \leq (s^*, 0)$. \square

基于正态分布的思想, 提出另一种确定广义依赖型有序加权不平衡语言权重的方法:

$$w_j = \frac{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}e^{-\frac{d^2((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{2\bar{\sigma}^2}}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{2\pi}\bar{\sigma}e^{-\frac{d^2((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{2\bar{\sigma}^2}}} = \frac{e^{-\frac{d^2((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{2\bar{\sigma}^2}}}{\sum_{j=1}^n e^{-\frac{d^2((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{2\bar{\sigma}^2}}}, \quad (9)$$

其中 $\bar{\sigma}$ 是这组不平衡语言变量的方差,

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}d^2((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}. \quad (10)$$

基于正态分布的广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子为

$$\begin{aligned} & \text{GDULOWA}_\lambda(s_1, s_2, \dots, s_n) = \\ & \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\sum_{j=1}^n \frac{e^{-\frac{d^2((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{2\bar{\sigma}^2}}}{\sum_{j=1}^n e^{-\frac{d^2((s_{\sigma(j)}, 0), (\bar{s}, \bar{\alpha}))}{2\bar{\sigma}^2}}} (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_{\sigma(j)}, 0))))^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right). \quad (11) \end{aligned}$$

显然, 式(11)也是一个净算子.

下面通过一个实例说明两种赋权方法的不同.

例5 假设有4个专家 $d_j (j = 1, 2, 3, 4)$, 现对某一部门的研发能力进行评估, 不平衡的语言术语集为 $S = \{N, L, M, \text{AH}, H, \text{QH}, \text{VH}, \text{AT}, T\}$, 评估结果如下:

由式(4)和(10)计算出这组语言变量的均值和方差分别为 $(\bar{s}, \bar{\alpha}) = (\text{AH}, -0.25)$, $\bar{\sigma} = 1.6583$.

由式(7)可得权重向量为 $w = (0.2500, 0.1944, 0.3056, 0.2500)^T$, 由式(8), 取 $\lambda = 1$, 有

$$\text{GDULOWA}_1(M, H, \text{AH}, M) = (\text{AH}, -0.3065).$$

或由式(9)可得权重向量为 $w = (0.2500, 0.1232, 0.3668, 0.2500)^T$, 由式(10), 取 $\lambda = 1$, 有

$$\text{GDULOWA}_1(M, H, \text{AH}, M) = (\text{AH}, -0.38675).$$

由上例可见, 两种确定权重方法的核心思想是: 评价价值离均值越远权重越小, 反之则越大, 借此减轻不公平或错误的评价信息对决策结果的影响. 通过两种方法的对比分析可知, 前者的计算更简单, 而后者对接近均值的评价价值赋予了更大的权重, 对于远离均值的评价价值赋予了更小的权重.

3 加权广义依赖型不平衡语言有序加权平均(WGDULOWA)算子

式(7)和(9)确定的权重仅根据每个语言变量和其算术平均值之间的距离, 然而在多属性决策中, 属性的重要性程度应单独考虑在内, 即赋予不同属性不同的主观权重. 基于这种想法, 提出了加权广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子.

下面定义广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子.

定义11 设 S 是不平衡的语言术语集, $s_i \in S (i = 1, 2, \dots, n)$, $s_{\sigma(j)}$ 是 s 中第 j 大的语言变量, $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个置换, 对于任意的 $j = 2, 3, \dots, n$ 满足 $s_{\sigma(j-1)} \geq s_{\sigma(j)}$. $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是态度参数, 则称函数

$$\text{GDULOWA}_\lambda(s_1, s_2, \dots, s_n) = \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\sum_{j=1}^n u_j (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_{\sigma(j)}, 0))))^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right) \quad (12)$$

为加权广义依赖型不平衡语言有序加权平均(WGDULOWA)算子. 其中: $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ 是决策者决定的主权重向量,

$$u_j = \frac{v_j \text{Sim}(s_{\sigma(j)}, 0)(\bar{s}, \bar{\alpha})}{\sum_{j=1}^n v_j \text{Sim}(s_{\sigma(j)}, 0)(\bar{s}, \bar{\alpha})}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

满足 $u_j \geq 0, \sum_{j=1}^n u_j = 1$.

特别地, 当 $v_1 = v_2 = \dots = v_n = \frac{1}{n}, j = 1, 2, \dots, n$ 时, WGDULOWA 算子退化为 GDULOWA 算子.

WGDULOWA 算子同样具有置换不变性、幂等性和有界性.

4 广义依赖型不平衡语言有序加权集结算子的多属性决策方法

设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是 n 个方案构成的方案集; $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是 m 个属性构成的属性集; $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T$ 是与属性相应的权重向量, 满足 $w_j \geq 0, \sum_{j=1}^n w_j = 1; \gamma_{ij} (\gamma_{ij} \in S)$ 是不平衡的语言变量) 是决策者给出的方案 A_i 在属性 G_j 下的评价. 给出基于广义依赖型不平衡语言有序加权集结算子的多属性决策方法如下.

Step 1: 利用语言层级获得不平衡语言决策变量 γ_{ij} 的标度值.

Step 2: 根据式(7)得到方案 A_i 在各个属性下的权重向量 $W_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im})^T, i = 1, 2, \dots, n$.

Step 3: 集成备选方案的属性决策信息:

1) 广义依赖有序加权平均的情形. 由式(8) GDULOWA 算子得到方案 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的综合属性值

$$(\gamma_i, \alpha_i) = \text{GDULOWA}_\lambda(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{im}) = \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\sum_{j=1}^m w_j (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(\gamma_{\sigma(ij)}, 0))))^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right);$$

2) 加权广义依赖有序加权平均的情形. 根据式(11)WGDULOWA 算子得到方案 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的综合属性值

$$(\gamma_i, \alpha_i) = \text{GDULOWA}_\lambda(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{im}) = \text{LH}^{-1} \left(\Delta \left(\sum_{j=1}^m u_j (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(\gamma_{\sigma(ij)}, 0))))^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right).$$

Step 4: 根据 $(\gamma_i, \alpha_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 的值利用不平衡语言的序关系对方案 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 进行排序, 得到最优方案.

Step 5: 调整参数 λ 的值, 重复 Step 1~ Step 4, 分析不同 λ 值下的排序和最优方案的选取.

5 应用举例

假设某公司^[30]有4个可能投资的项目 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 通过4个属性 $G_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 来评价投资项目的优劣. 属性 G_1 表示社会环境因素, 反映企业所处的地理位置及周围的交通情况对企业发展的促进或抑制作用; G_2 表示技术因素, 反映企业技术水平的先进程度对企业发展的影响; G_3 表示项目发展前景因素, 反映企业发展潜力的高低; G_4 表示风险因素, 反映企业对风险的预测和回避能力, 对风险的控制能力和发生风险后的自我修复能力. 投资项目在4个属性下的评价以不平衡语言变量的形式给出. 专家利用不平衡语言评价标度 $S = \{N, L, M, AH, H, QH, VH, AT, T\} = \{\text{极差, 低, 中等, 接近高, 高, 很高, 非常高, 接近极好, 极好}\}$ 给出的不平衡语言评估矩阵如表1所示, 试确定最佳企业.

表1 不平衡语言信息的决策矩阵

A_i	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	$\gamma_{11} = L$	$\gamma_{12} = AH$	$\gamma_{13} = H$	$\gamma_{14} = H$
A_2	$\gamma_{21} = AH$	$\gamma_{22} = H$	$\gamma_{23} = QH$	$\gamma_{24} = L$
A_3	$\gamma_{31} = AH$	$\gamma_{32} = L$	$\gamma_{33} = AH$	$\gamma_{34} = M$
A_4	$\gamma_{41} = M$	$\gamma_{42} = H$	$\gamma_{43} = AH$	$\gamma_{44} = M$

Step 1: 利用语言层级获得不平衡语言的标度值: $N = s_0^5, L = s_1^5, M = s_2^5, AH = s_5^9, H = s_6^9, QH = s_{13}^{17}, VH = s_{14}^{17}, AT = s_{15}^{17}, T = s_{16}^{17}$.

Step 2: 根据式(7)确定4个方案的权重:

$$\begin{aligned} W_1 &= (0.3182, 0.2576, 0.2576, 0.1667)^T, \\ W_2 &= (0.3216, 0.2681, 0.2391, 0.1667)^T, \\ W_3 &= (0.3333, 0.2500, 0.2500, 0.1667)^T, \\ W_4 &= (0.3056, 0.2500, 0.2500, 0.1944)^T. \end{aligned}$$

Step 3: 取 $\lambda = 0.5$, 利用式(12)集成决策信息, 得到4个企业的综合评价价值分别为

$$\begin{aligned} \text{GDULOWA}_{0.5}(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{14}) &= (AH, -0.1202), \\ \text{GDULOWA}_{0.5}(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{24}) &= (AH, -0.0215), \\ \text{GDULOWA}_{0.5}(\gamma_{31}, \gamma_{32}, \dots, \gamma_{34}) &= (M, 0.0812), \\ \text{GDULOWA}_{0.5}(\gamma_{41}, \gamma_{42}, \dots, \gamma_{44}) &= (AH, -0.3363). \end{aligned}$$

Step 4: 利用不平衡语言术语变量的大小比较规则, 有

$$\begin{aligned} \text{GDULOWA}_{0.5}(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{24}) &\succ \\ \text{GDULOWA}_{0.5}(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{14}) &\succ \\ \text{GDULOWA}_{0.5}(\gamma_{41}, \gamma_{42}, \dots, \gamma_{44}) &\succ \\ \text{GDULOWA}_{0.5}(\gamma_{31}, \gamma_{32}, \dots, \gamma_{34}). & \end{aligned}$$

Step 5: $A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$, 因此最优投资企业为 A_2 .

Step 6: 参数 λ 取不同值时能得到不同的集结结果, 表2为不同值对应的投资企业的综合属性评价.

表2 方案在不同参数 λ 下的综合属性值和排序

A_i	$\lambda = -1$	$\lambda = -0.4$	$\lambda = -0.2$
A_1	(M, 0.295 0)	(AH, -0.440 2)	(AH, -0.360 4)
A_2	(M, 0.347 4)	(AH, -0.368 6)	(AH, -0.282 4)
A_3	(M, -0.125 0)	(M, -0.051 8)	(M, -0.029 3)
A_4	(AH, -0.423 7)	(AH, -0.389 9)	(AH, -0.378 3)
排序	$A_4 \succ A_2 \succ$	$A_2 \succ A_4 \succ$	$A_2 \succ A_1 \succ$
结果	$A_1 \succ A_3$	$A_1 \succ A_3$	$A_4 \succ A_3$
A_i	$\lambda = -0.1$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 100$
A_1	(AH, -0.322 3)	(AH, -0.120 2)	(H, -0.039 7)
A_2	(AH, -0.241 2)	(AH, -0.021 5)	(H, 0.407 7)
A_3	(M, -0.018 5)	(M, -0.082 1)	(AH, -0.345 5)
A_4	(AH, -0.372 4)	(AH, -0.336 3)	(H, -0.097 5)
排序	$A_2 \succ A_1 \succ$	$A_2 \succ A_1 \succ$	$A_2 \succ A_1 \succ$
结果	$A_4 \succ A_3$	$A_4 \succ A_3$	$A_4 \succ A_3$

由表2可知, 随着 λ 的增大, 各方案的综合评价价值也随之增大. 在实际决策中, 对于喜爱的方案, 决策者会赋予较大的 λ 值; 反之, 则赋予较小的 λ 值.

Step 7: 为了分析不同 λ 值对于综合属性值的影响, 分别取 $\lambda = -100, -99, \dots, 100$, 这些参数值均由决策者决定, 得到各个方案相应的综合属性值下标 i 和综合属性值, 如图3所示.

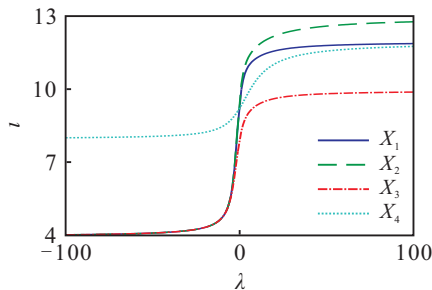


图3 λ 不同时4个方案的综合属性值

由图3可知, 随着 λ 的增大, 各个方案的综合评价价值也随之增大, 根据文献[29]不平衡语言变量的排序结果如下:

- 1) 当 $\lambda < -0.4530$ 时, 4个投资企业的排序为 $A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$, 最优方案为 A_4 ;
- 2) 当 $-0.4530 \leq \lambda < -0.2520$ 时, 4个投资企业的排序为 $A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$, 最优方案为 A_2 ;
- 3) 当 $\lambda \geq -0.2520$ 时, 4个投资企业的排序为 $A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$, 最优方案为 A_2 .

6 比较分析

6.1 与基于2TLBA算子的多属性群决策问题的比较

Liu等^[24]提出了基于二元语义 Bonferroni 平均 (2TLBA) 算子的多属性群决策方法. 为了说明本文所

提方法的优越性, 利用文献[24]中的方法解决上述投资项目决策问题.

Step 1: 利用语言层级获得不平衡语言的标度值: $N = s_0^5, L = s_1^5, M = s_2^5, AH = s_3^9, H = s_4^9, QH = s_{13}^{17}, VH = s_{14}^{17}, AT = s_{15}^{17}, T = s_{16}^{17}$.

Step 2: 由熵权法得到权重向量

$$W = (0.1529, 0.3312, 0.3121, 0.2038)^T.$$

Step 3: 取 $p = q = 1$, 利用不平衡语言加权 Bonferroni 平均 (ULWBA) 算子集成决策信息, 有 $ULWBA(s_1, s_2, \dots, s_n) =$

$$LH^{-1} \left(\Delta \left[\frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{j=1}^n w_j (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_i, 0)))) \right) \right] \cdot \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n u_j^{(i)} (\Delta^{-1}(\text{TF}_{t_H}^t(\text{LH}(s_i, 0)))) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right).$$

其中 $u_j^{(i)} = \frac{w_j}{1 - w_i}, j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$. 得到4个企业的综合评价价值分别为

$$\begin{aligned} 2TLWBA(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{14}) &= (L, -0.1162), \\ 2TLWBA(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{24}) &= (L, -0.0766), \\ 2TLWBA(\gamma_{31}, \gamma_{32}, \dots, \gamma_{34}) &= (L, -0.2672), \\ 2TLWBA(\gamma_{41}, \gamma_{42}, \dots, \gamma_{44}) &= (L, -0.0855). \end{aligned}$$

Step 4: 由不平衡语言术语变量的大小比较规则, 得到 $2TLWBA(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{24}) \succ 2TLWBA(\gamma_{41}, \gamma_{42}, \dots, \gamma_{44}) \succ 2TLWBA(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{14}) \succ 2TLWBA(\gamma_{31}, \gamma_{32}, \dots, \gamma_{34})$.

Step 5: $A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$, 因此最优投资企业为 A_2 .

文献[24]与本文所提方法的排序结果略有不同, 前者 $A_4 \succ A_1$, 而本文 $A_1 \succ A_4$. 最佳投资项目均为 A_2 , 最差投资项目均为 A_3 , 因而有着相同的决策. 与文献[24]相比, 本文的主要优势如下:

1) 本文采用依赖型的权重, 通过对有偏见或错误的评价赋予较小的权重, 减弱了不公平性的影响, 得到了较合理的决策结果. 在现实生活中, 不同专家在决策过程中发挥着不同的作用. 专家作决策时, 往往带有很强的主观偏好, 对于自己偏好的方案, 给出过高的评价, 对于厌恶的方案会给出过低的评价. 为了削弱这种带有偏见的评价对决策结果的影响, 本文先求得依赖型的权重, 再借助 GDULOWA 算子集结单个评价价值, 最后得到综合评价价值. 文献[24]仅仅考虑了集成信息两两之间的相互关系, 无法降低不公平性的影响, 因而本文的方法更加合理.

2) 本文可以处理决策信息是语言变量、二元语义以及不平衡语言的情形, 而文献[24]仅适用于语言变量和二元语义语言信息的决策问题, 故本文的方法

具有更广的适用性.

6.2 与基于OWG算子的多属性群决策问题的比较

文献[30]采用Yager提出的模糊语义量化算子确定算子的权重,利用不平衡语言有序加权几何平均(OWG)算子集结评价信息,最后得到的项目排序为 $A_2 = A_1 \succ A_4 \succ A_3$. 本文结合依赖型权重,通过文献[30]的方法得到的方案排序为 $A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$. 相比文献[30],本文所提方法的优势如下:

1) 本文方法通过给予有偏见的评价较小的权重,减弱了不公平性评价对决策结果的影响,相比文献[30]的方法更加合理.

2) 文献[30]的排序结果表明 A_1 和 A_2 同为最优方案,本文方法区分出方案 A_1 与 A_2 的优劣,得到最佳方案为 A_2 . 下面从两个方面说明本文结果的合理性. 首先对文献[30]的结果进行仿真分析,得到4个方案的综合评价随参数 λ 变动的仿真图像. 选取 $\lambda \in [-0.1, 0.1]$ 且 $\lambda \neq 0$,以0.0001为步长,利用Matlab软件得到4个方案的综合属性值下标 l 随参数 λ 的变动曲线,如图4所示.

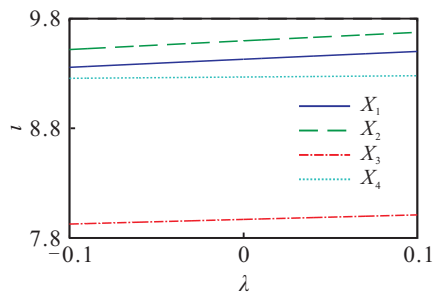


图4 4个方案的属性值随参数 λ 的变动曲线

由图4可知,当 λ ($\lambda \neq 0$)在 -0.1 到 0.1 之间变动时,4个投资企业的排序为 $A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$. 企业2为最优投资企业,与文献[30]的排序大致相同,说明了当 λ 在0附近变动时, A_2 仍为最优方案,表明了本文所提的不平衡语言广义有序加权平均算子的有效性. 因此对文献[30]中的不平衡语言有序加权几何平均算子进行推广是有必要的,这也是本文提出不平衡语言广义有序加权平均算子的原因. 此外,文献[30]中的不平衡语言的有序加权几何平均算子是本文 $\lambda \rightarrow 0$ 时不平衡语言广义有序加权平均算子的特殊情形. 其中态度参数 λ 由决策者主观决定,为了保证决策的公平性和合理性,在实际的决策过程中,对于不同的评价方案通常采用同一个态度参数 λ . 其次,根据文献[29]不平衡语言变量的排序可知,方案2各属性下的评价价值均优于方案1的属性值,即 $\gamma_{11} \prec \gamma_{21}, \gamma_{12} \prec \gamma_{22}, \gamma_{13} \prec \gamma_{23}, \gamma_{14} \prec \gamma_{24}$,因而方案2优于方案1,更为合理,即 $A_2 \succ A_1$. 综上可知本文结

果更合理.

3) 本文提出的广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子和加权广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子增加了考虑决策者偏好态度的决策变量 λ ,文献[30]即为本文 $\lambda \rightarrow 0$ 时的特殊情形. 因而本文方法具有更广的适用性.

7 结论

本文首先将不平衡的语言术语集和依赖型有序加权平均算子相结合,提出了两类新的算子——广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子和加权广义依赖型不平衡语言有序加权平均算子,并讨论了它们的优良性质. 与该类算子相关联的权重向量取决于被集结的不平衡语言变量和决策者,通过对有偏见的评价赋予较小的权重,削弱了不公平性对评价结果的影响. 其次,将它们用于属性值为不平衡语言的多属性决策中,分析了决策者态度参数的变化对决策结果的影响. 最后,通过与其他方法的比较分析,表明了所提算子的有效性. 该方法不仅计算简单,能充分利用评价信息,而且能减轻因决策者主观因素所造成的不公平性的影响,使得决策结果更加合理,具有较高的实用价值.

参考文献(References)

- [1] Kai H G, Wen L L. Combination rule of D-S evidence theory based on the strategy of cross merging between evidences[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(10): 13360-13366.
- [2] Harsanyi J C. Cardinal welfare. Individualistic ethics and interpersonal comparisons of utility[J]. J of Political Economy, 1955, 63(4): 309-321.
- [3] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18(1): 183-190.
- [4] Xu Z S, Da Q L. The ordered weighted geometric averaging operators[J]. Int J of Intelligent System, 2002, 17(7): 709-716.
- [5] 陈华友, 何迎东, 周礼刚, 等. 广义直觉模糊交叉影响平均算子及其在多属性决策中的应用[J]. 控制与决策, 2014, 29(7): 1250-1256.
(Chen H Y, He Y D, Zhou L G, et al. Generalized intuitionistic fuzzy interaction average operators and their applications to multi-attribute decision making[J]. Control and Decision, 2014, 29(7): 1250-1256.)
- [6] He Y D, Chen H Y, Zhou L G, et al. Intuitionistic fuzzy geometric interaction averaging operators and their application to multi-criteria decision making[J]. Information Sciences, 2014, 259(2): 142-159.
- [7] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

- [8] Fan Z P, Liu Y. A method for group decision-making based on multi-granularity uncertain linguistic information[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37: 4000-4008.
- [9] 乐琦, 樊治平. 具有多粒度不确定语言评价信息的多属性群决策问题[J]. *控制与决策*, 2010, 25(7): 1059-1062.
(Yue Q, Fan Z P. Method for solving multiple attribute group decision-making problems with multi-granularity uncertain linguistic assessment information[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(7): 1059-1062.)
- [10] Zhou L G, Chen H Y. On compatibility of uncertain additive linguistic preference relations based on the linguistic COWA operator[J]. *Applied Soft Computing*, 2013, 13(8): 3668-3682.
- [11] Zhou L G, Wu J X, Chen H Y. Linguistic continuous ordered weighted distance measure and its application to multiple attributes group decision making[J]. *Applied Soft Computing*, 2014, 25: 266-276.
- [12] Zadrozny S, Kacprzyk J. Computing with words for text processing: An approach to the text categorization[J]. *Information Science*, 2006, 176(4): 415-437.
- [13] Martinez L, Da Ruan J L, Yang J B. Dealing with heterogeneous information in engineering evaluation processes[J]. *Information Science*, 2007, 177(7): 1533-1542.
- [14] Martinez L, Liu J, Yang J B, et al. A multi-granular hierarchical linguistic model for design evaluation based on safety and cost analysis[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 2005, 20(12): 1161-1194.
- [15] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning Part I[J]. *Information Science*, 1975, 8(2): 99-249.
- [16] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning Part II[J]. *Information Science*, 1975, 8(2): 301-357.
- [17] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning Part III[J]. *Information Science*, 1976, 9(1): 43-80.
- [18] Bordogna G, Fedrizzi M, Pasi G. A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators[J]. *IEEE Trans on Systems Man, and Cybernetics, Part A-Systems and Humans*, 1997, 27: 126-132.
- [19] Xu Z S. A method on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations[J]. *Information Sciences*, 2004, 166: 19-30.
- [20] Xu Z S. EOWA and EOWG operators for aggregation linguistic labels based on linguistic preference relations[J]. *Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2004, 12(6): 791-810.
- [21] Tao Z F, Chen H Y, Zhou L G, et al. On new operational laws of 2-tuple linguistic information using Archimedean t -norm and s -norm[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2014, 66: 156-165.
- [22] Herrera F, Martínez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8: 746-752.
- [23] Wei G W. A method for multiple attribute group decision making based on the ET-WG and ET-OWG operators with 2-tuple linguistic information[J]. *Expert Systems with Application* 2010, 37(12): 7895-7900.
- [24] 刘金培, 林盛, 陈华友. 二元语义 Bonferroni 集成算子及其在多属性群决策中的应用[J]. *运筹与管理*, 2013, 22(5): 122-127.
(Liu J P, Lin S, Chen H Y. 2-tuple linguistic Bonferroni aggregation operators and their applications to multi-attribute group decision making[J]. *Operations Research and Management Science*, 2013, 22(5): 122-127.)
- [25] Wan S P. 2-tuple linguistic hybrid arithmetic aggregation operators and application to multi-attribute group decision making[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2013, 45: 31-40.
- [26] Wan S P. Some hybrid geometric aggregation operators with 2-tuple linguistic information and their applications to multi-attribute group decision making[J]. *Int J of Computational Intelligence Systems*, 2013, 6(4): 750-763.
- [27] Gong Z W. The optimal group consensus models for 2-tuple linguistic preference relations[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2013, 37: 427-437.
- [28] Gong Z W. The optimal group consensus deviation measure for multiplicative preference relations[J]. *Expert Systems and Applications*, 2012, 39: 11548-11555.
- [29] Herrera F, Herrera-Viedma E, Martínez L. A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2008, 16(2): 354-370.
- [30] Zou L, Pei Z, Karimi H R, et al. The unbalanced linguistic aggregation operator in group decision making[C]. 2012 IEEE Int Symposium on Intelligent Control (ISIC). IEEE, 2012: 703-707.
- [31] Meng D, Pei Z. On weighted unbalanced linguistic aggregation operators in group decision making[J]. *Information Sciences*, 2013, 223: 31-41.
- [32] Jiang L, Liu H B, Cai J F. The power operator for unbalanced linguistic term sets[J]. *Information Fusion*, 2015, 22: 85-94.
- [33] Xu Z S. Dependent OWA operators[J]. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 2006, 3885: 172-178.
- [34] Wei G W, Zhao X F. Some dependent aggregation operators with 2-tuple linguistic information and their application to multiple attribute group decision making[J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39(5): 5881-5886.