

广义直觉模糊熵及其在权重确定中的应用

熊升华^{1,2}, 吴胜^{1,2}, 陈振颂³, 李延来^{1,2†}

(1. 西南交通大学 交通运输与物流学院, 成都 610031; 2. 西南交通大学 综合交通运输智能化国家地方联合工程实验室, 成都 610031; 3. 香港城市大学 科学与工程学院系统工程与工程管理系, 香港 999077)

摘要: 在综合考虑直觉模糊集(IFS)的直觉信息和模糊信息的基础上, 提出广义直觉模糊熵的定义; 分析直觉模糊集的直觉信息和模糊信息对广义直觉模糊熵的影响; 在合理选取广义直觉模糊熵参数的前提下, 基于熵权法构建一种同时获取决策者和属性权重的方法. 案例分析验证了所提出方法的可行性和有效性, 为解决权重信息完全未知的多属性群决策(MAGDM)问题提供一类新思路.

关键词: 多属性群决策; 广义直觉模糊熵; 权重; 熵权法

中图分类号: C934

文献标志码: A

Generalized intuitionistic fuzzy entropy and its application in weight determination

XIONG Sheng-hua^{1,2}, WU Sheng^{1,2}, CHEN Zhen-song³, LI Yan-lai^{1,2†}

(1. School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. Nation and Region Combined Engineering Lab of Intelligentizing Integrated Transportation, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 3. Department of Systems Engineering and Engineering Management, City University of Hong Kong, Hong Kong 999077, China)

Abstract: The concept of the generalized intuitionistic fuzzy entropy is developed by considering the intuitive and fuzzy information with respect to an intuitionistic fuzzy set(IFS). The influence of an IFS's respective information on its generalized intuitionistic fuzzy entropy is analyzed. With the premise of determining the parameters of the generalized intuitionistic fuzzy entropy reasonably, an efficient method based on the entropy weight approach is proposed to determine the weights of decision makers and that of attributes simultaneously. The proposed weight determination method can be applied to address the multi-attribute group decision making problem in which the weight information is completely unknown. Finally, a numerical example is provided to illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: multiple attribute group decision making; generalized intuitionistic fuzzy entropy; weight; entropy weight approach

0 引言

自 Zadeh^[1] 提出模糊集(FS)概念以来, 学者们便不断致力于拓展和延伸模糊集理论. 具有代表性的模糊集有区间模糊集^[2]、直觉模糊集(IFS)^[3]、区间直觉模糊集^[4-5]、直觉梯形模糊集^[6]、犹豫模糊集^[7-8]等, 其中直觉模糊集的相关理论及其应用一直是模糊领域的研究热点. 区别于传统的模糊集, 由 Atanassov^[3] 提出的直觉模糊集因充分考量了模糊数的隶属度、非隶属度和犹豫度 3 部分信息, 度量信息更为精确, 故基于该理论的方法和应用具有较强的合理性.

目前, 将 Zadeh^[9] 提出的模糊熵推广到直觉模糊

集, 以刻画其不确定性程度是直觉模糊集理论的一个重要研究分支. 在直觉模糊熵的研究历程中, Burillo 等^[10] 将 Luca 等^[11] 提出的模糊熵公理化定义拓展到直觉模糊集中, 给出了直觉模糊熵的公理化定义, 然而该定义只包含直觉模糊集的直觉信息, 忽略了模糊信息对直觉模糊熵的影响^[12]; Szmidt 等^[13] 在改进直觉模糊熵的公理化定义的基础上, 基于几何解释给出了一个新的直觉模糊熵公式. 尽管已有大量的工作针对此问题展开^[14], 但该公理化定义忽略了直觉信息对直觉模糊熵的作用. 为此, 魏翠萍等^[12] 指出直觉模糊集的不确定性应同时包含直觉模糊集的直觉和

收稿日期: 2016-02-27; 修回日期: 2016-07-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71371156, 71401142); 香港特别行政区研究资助委员会(T32-101/15-R).

作者简介: 熊升华(1988—), 男, 博士生, 从事决策分析、智能控制与应用的研究; 李延来(1971—), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策分析、智能控制与应用等研究.

†通讯作者. E-mail: lyl_2001@163.com

模糊两方面信息;Mao等^[15]表明直觉模糊集隶属度与非隶属度的绝对偏差刻画了直觉模糊集的模糊信息,其犹豫度决定着直觉模糊集的直觉信息;特别地,Zhao等^[16]将该思想拓展到区间值直觉模糊集中,构建了区间值直觉模糊熵公理化定义;熊升华等^[17]基于该思想提出了新的直觉模糊熵的公理化定义,将新定义的直觉模糊熵公式应用到直觉模糊多属性群决策(MAGDM)问题中.尽管如此,鲜有文献探讨直觉模糊集的直觉信息和模糊信息对直觉模糊熵的影响.

此外,在MAGDM问题中利用熵权法^[18]确定决策者或属性的权重^[17,19]是有关直觉模糊熵的重要应用之一.与TOPSIS(technique for order preference by similarity to ideal solution)法^[20-21]和灰色理论法^[22]等方法类似,熵权法是一种只与决策信息相关,可有效避免人为因素干扰的客观赋权方法,因而其赋权结果较主观赋权法更合理.需指出的是,有关利用直觉模糊熵确定权重的研究主要集中于以下两类:1)决策者权重已知的前提下,确定属性权重^[14];2)属性权重已知的前提下,确定决策者权重^[19].然而,有关利用熵权法同时获取决策者和属性权重的研究相对匮乏.

针对以上问题,为了探讨直觉信息和模糊信息对直觉模糊熵的影响,本文给出广义直觉模糊熵的定义,并针对权重信息完全未知的MAGDM问题,提出一种基于广义直觉模糊熵,同时确定决策者和属性权重的方法.首先,根据直觉模糊熵的公理化定义给出广义直觉模糊熵的定义,该定义不仅蕴含直觉模糊集的直觉信息和模糊信息,而且随着广义直觉模糊熵系数的变化,将得到不同的直觉模糊熵公式.基于此,本文讨论直觉信息和模糊信息对广义直觉模糊熵的影响.在选取使得决策者风险态度中立且直觉模糊集差异化信息凸显的直觉模糊熵公式的基础上,构建一种同时确定决策者和属性权重的方法.

1 预备知识

较传统的模糊集^[1]而言,由Atanassov^[3]提出的直觉模糊集因充分考量了模糊数的隶属度、非隶属度和犹豫度3部分信息,度量信息更加精确,故得到了越来越多的学者的关注和研究.

定义1^[3] 设 X 是给定论域,称 $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle, x \in X \}$ 为直觉模糊集.其中: $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 X 的隶属度 $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ 和非隶属度 $\nu_A : X \rightarrow [0, 1]$,且 $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$.此外, $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ 为 X 中元素 x 属于 X 的犹豫度;通常,记 $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ 为直觉模糊数(IFN), X 上直觉模糊集全体记为IFS(X)^[23].

定义2^[3] 设 $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle, x \in X \}$

为给定论域 X 上的一个直觉模糊集,记 $A^c = \{ \langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle, x \in X \}$ 为直觉模糊集 A 的补集.

在直觉模糊熵的研究中,Mao等^[15]指出,直觉模糊集隶属度与非隶属度的绝对偏差 $|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|$ ($x_i \in X$)刻画了直觉模糊集的模糊信息,而其犹豫度决定着直觉模糊集的直觉信息.为此,针对传统直觉模糊熵的定义未能综合考虑直觉模糊集的模糊信息和直觉信息的问题,熊升华等^[17]给出了如下直觉模糊熵的公理化定义.

定义3^[17] 设 $A = \{ \langle x_i, \mu_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle | x_i \in X \}$ 和 $B = \{ \langle x_i, \mu_B(x_i), \nu_B(x_i) \rangle | x_i \in X \}$ 为论域 X 上的两个直觉模糊集,称函数 $E : \text{IFS}(X) \rightarrow [0, 1]$ 为直觉模糊熵,若它满足如下准则:

1) $E(A) = 0$,当且仅当 A 为清晰集,即对于 $\forall x_i \in X$,有 $\mu_A(x_i) = 1, \nu_A(x_i) = 0$ 或者 $\mu_A(x_i) = 0, \nu_A(x_i) = 1$.

2) $E(A) = 1$,当且仅当 $\forall x_i \in X$,有 $\mu_A(x_i) = \nu_A(x_i)$.

3) $E(A) = E(A^c), \forall x_i \in X$.

4) $E(A) \leq E(B)$,对于 $\forall x_i \in X$,当 $\mu_B(x_i) \geq \nu_B(x_i)$ 时, $\mu_A(x_i) \geq \mu_B(x_i)$ 且 $\nu_A(x_i) \leq \nu_B(x_i)$;当 $\mu_B(x_i) \leq \nu_B(x_i)$ 时, $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i)$ 且 $\nu_A(x_i) \geq \nu_B(x_i)$.

5) $E(A) \leq E(B)$,存在子集 $Y \subset X$,使得

$$\langle x_i, \mu_B(x_i), \nu_B(x_i) \rangle = \begin{cases} \langle x_i, \mu_{A'}(x_i), \nu_{A'}(x_i) \rangle, & x_i \in Y; \\ \langle x_i, \mu_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle, & x_i \notin Y. \end{cases}$$

其中:对于 $\forall x_i \in Y$,均有 $|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)| = |\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|$ 和 $\pi_A(x_i) < \pi_B(x_i)$ 成立.

2 广义直觉模糊熵及其相关性质

尽管既有文献已针对同时包含直觉模糊集模糊信息和直觉信息的直觉模糊熵开展了大量研究,但鲜有文献探索以上两方面信息对直觉模糊集的影响.为研究该问题,不失一般性,本文给出如下定义.

定义4 设 $A = \{ \langle x_i, \mu_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle | x_i \in X \}$ 为论域 X 上的一个直觉模糊集,对于 $\forall p, q > 0$,称下式为直觉模糊集 A 的广义直觉模糊熵:

$$E_{p,q}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p) \times \ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))^q] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p) \times \ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p \pi_A^q(x_i)], \quad (1)$$

其中 p 和 q 称为广义直觉模糊熵系数.

定理1 广义直觉模糊熵 $E_{p,q}(A)$ 是直觉模糊熵.

证明 对于 $\forall x_i \in X$ 以及 $\forall p, q > 0$, 由于 $0 \leq |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p \leq 1$ 和 $0 \leq \pi_A^q(x_i) \leq 1$, 有

$$0 \leq (1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p) \times \ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))^q] \leq (1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p) \ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p].$$

令 $f(t_i) = (1 - t_i) \ln(e + t_i)$, 其中 $t_i = |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p, t_i \in [0, 1]$. 对 $f(t_i)$ 求导, 有

$$f'(t_i) = -\ln(e + t_i) + \frac{1 - t_i}{e + t_i}.$$

由于 $t_i \in [0, 1]$, 则 $-\ln(e + t_i) \leq -1, 0 < \frac{(1 - t_i)}{(e + t_i)} < 1$, 因而 $f'(t_i) < 0$. 从而 $f(t_i)$ 在区间 $[0, 1]$ 上严格单调递减, 即对于 $\forall t_i \in [0, 1]$, 均有 $f(t_i) \leq f(0) = (1 - 0) \ln(e + 0) = 1$ 成立.

综上所述, 有

$$0 \leq (1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p) \times \ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))^q] \leq 1,$$

根据 x_i 的任意性, 有 $0 \leq E_{p,q}(A) \leq 1$ 成立.

1) 充分性. 对于 $\forall x_i \in X$, 当 $\mu_A(x_i) = 1, \nu_A(x_i) = 0$ 时, 有

$$E_{p,q}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |1 - 0|^p) \ln[e + |1 - 0|^p (1 - 1 - 0)^q] = 0;$$

当 $\mu_A(x_i) = 0, \nu_A(x_i) = 1$ 时, 有

$$E_{p,q}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |0 - 1|^p) \ln[e + |0 - 1|^p (1 - 0 - 1)^q] = 0.$$

必要性. 对于 $\forall x_i \in X$, 如果 $E_{p,q}(A) = 0$, 则有 $\ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))^q] = 0$ 或 $1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p = 0$.

由于有 $\ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))^q] \geq 1$, 当且仅当 $1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p = 0$, 即 $\mu_A(x_i) = 1, \nu_A(x_i) = 0$ 或 $\mu_A(x_i) = 0, \nu_A(x_i) = 1$ 时, $E_{p,q}(A) = 0$ 成立. 从而, A 为清晰集.

2) 充分性. 对于 $\forall x_i \in X$, 当 $\mu_A(x_i) = \nu_A(x_i)$ 时, 有

$$E_{p,q}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |\mu_A(x_i) - \mu_A(x_i)|^p) \ln[e + |\mu_A(x_i) - \mu_A(x_i)|^p (1 - \mu_A(x_i) - \mu_A(x_i))^q] = 1.$$

必要性. 对于 $\forall x_i \in X$, 若 $E_{p,q}(A) = 1$, 则如下方程组成立:

$$\begin{cases} 1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p = 1, \\ \ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p \times (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))^q] = 1. \end{cases}$$

解该方程组, 有 $\mu_A(x_i) = \nu_A(x_i)$.

3) $E_{p,q}(A) = E_{p,q}(A^c)$ 显然成立.

4) 对于 $\forall x_i \in X$, 令 $g(\alpha_i, \beta_i) = (1 - \alpha_i) \ln[e + \alpha_i \beta_i]$, 其中 $\alpha_i = |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p, \beta_i = (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))^q, \alpha_i \in [0, 1]$ 且 $\alpha_i \beta_i \in [0, 1]$.

求 $g(\alpha_i, \beta_i)$ 关于 α_i 的一阶偏导, 有

$$g_{\alpha_i}(\alpha_i, \beta_i) = -\ln[e + \alpha_i \beta_i] + \frac{\beta_i(1 - \alpha_i)}{e + \alpha_i \beta_i}.$$

在上式中, 由于 $0 < \beta_i(1 - \alpha_i)/(e + \alpha_i \beta_i) < 1$ 且 $-\ln[e + \alpha_i \beta_i] \leq -1, g_{\alpha_i}(\alpha_i, \beta_i)$ 在 $\alpha_i \in [0, 1]$ 上恒小于 0, 即 $g(\alpha_i, \beta_i)$ 沿 α_i 方向严格单调递减. 设 A 和 B 为论域上的两个直觉模糊集, 作以下两种情形讨论.

当 $\mu_B(x_i) \geq \nu_B(x_i), \mu_A(x_i) \geq \mu_B(x_i)$ 且 $\nu_A(x_i) \leq \nu_B(x_i)$ 时, 有 $\nu_A(x_i) \leq \nu_B(x_i) \leq \mu_B(x_i) \leq \mu_A(x_i)$, 则 $|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p \geq |\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|^p$. 由以上分析可知

$$g(|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p, (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))^q) \leq g(|\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|^p, (1 - \mu_B(x_i) - \nu_B(x_i))^q),$$

即

$$(1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p) \times \ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))^q] \leq (1 - |\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|^p) \times \ln[e + |\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|^p (1 - \mu_B(x_i) - \nu_B(x_i))^q].$$

由 x_i 的任意性可知, $E_{p,q}(A) \leq E_{p,q}(B)$ 成立.

当 $\mu_B(x_i) \leq \nu_B(x_i), \mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i)$ 且 $\nu_A(x_i) \geq \nu_B(x_i)$ 时, 有 $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i) \leq \nu_B(x_i) \leq \nu_A(x_i)$, 则 $|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p \geq |\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|^p$. 同理可得 $E_{p,q}(A) \leq E_{p,q}(B)$.

5) 设 A 和 B 为论域上的两个直觉模糊集, 且存在子集 $Y \subset X$, 使得

$$\langle x_i, \mu_B(x_i), \nu_B(x_i) \rangle = \begin{cases} \langle x_i, \mu_{A'}(x_i), \nu_{A'}(x_i) \rangle, x_i \in Y; \\ \langle x_i, \mu_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle, x_i \notin Y. \end{cases}$$

对于 $\forall x_i \in Y$, 均有 $|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)| = |\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|$ 和 $\pi_A(x_i) < \pi_B(x_i)$ 成立.

若 $\mu_A(x_i) = \nu_A(x_i)$ 且 $\mu_B(x_i) = \nu_B(x_i)$, 则由 2) 可知, $E_{p,q}(A) = E_{p,q}(B) = 1$;

若 $\mu_A(x_i) \neq \nu_A(x_i)$ 或 $\mu_B(x_i) \neq \nu_B(x_i)$, 由于 $|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p = |\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|^p$ 且 $\pi_A^q(x_i) < \pi_B^q(x_i)$, 则

$$\ln[e + |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|^p \pi_A^q(x_i)] < \ln[e + |\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|^p \pi_B^q(x_i)],$$

由 x_i 的任意性可知, $E_{p,q}(A) < E_{p,q}(B)$.

综上所述, $E_{p,q}(A) \leq E_{p,q}(B)$. \square

虽然广义直觉模糊熵的本质仍是直觉模糊熵, 但对于广义直觉模糊熵 $E_{p,q}(A)$ 而言, 随着广义直觉模糊熵系数 p, q 变化可以得到不同的直觉模糊熵公式. 为了探讨模糊信息和直觉信息对直觉模糊熵的影响, 首先作如下定义.

定义5 设 X 为给定论域, 且有 $0 \leq \mu_A(x_i) + \nu_A(x_i) \leq 1, x_i \in X$, 将有序实数对 $(\mu_{\bar{A}}(x_i), \nu_{\bar{A}}(x_i))$ 不重复地遍历 $[0, 1] \times [0, 1]$ 所构成的直觉模糊集 $\bar{A} = \{\langle x_i, \mu_{\bar{A}}(x_i), \nu_{\bar{A}}(x_i) \rangle | x_i \in X\}$ 的过程称为遍历直觉模糊集. 特别地, 将只蕴含单个元素的直觉模糊集 $\bar{A} = \{\langle x, \mu_{\bar{A}}(x), \nu_{\bar{A}}(x) \rangle\} (x \in X)$ 称为单点直觉模糊集.

如图1所示, 遍历直觉模糊集包含无穷多个单点直觉模糊集, 因而可以利用积分对其进行相关计算.

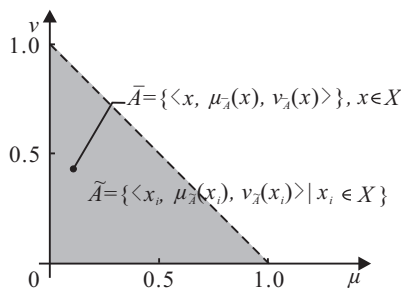


图1 遍历直觉模糊集和单点直觉模糊集

为了直观地说明直觉模糊集的模糊信息和直觉信息对直觉模糊熵的影响, 图2~图7给出了当广义直觉模糊熵系数 p, q 取不同值时, 广义直觉模糊熵 $E_{p,q}(A)$ 随 $\mu_{\bar{A}}(x)$ 和 $\nu_{\bar{A}}(x)$ 的变化情况.

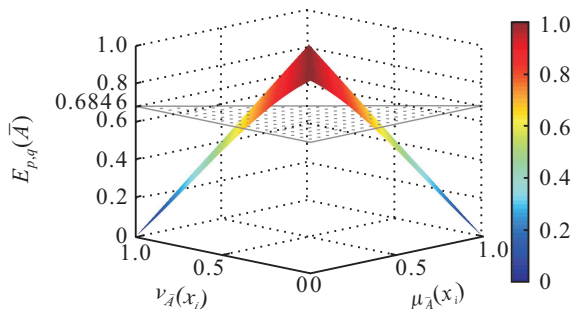


图2 广义直觉模糊熵系数 p, q 对广义直觉模糊熵的影响 ($p = 1, q = 1$)

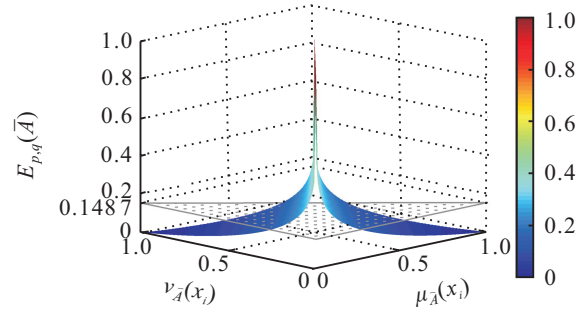


图3 广义直觉模糊熵系数 p, q 对广义直觉模糊熵的影响 ($p = 0.1, q = 1$)

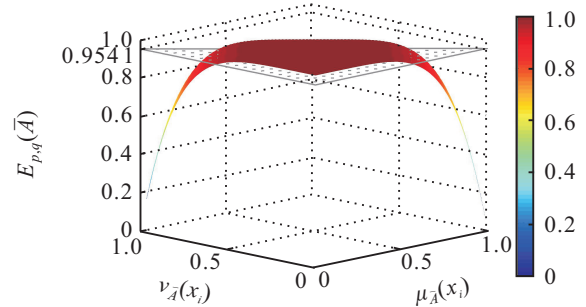


图4 广义直觉模糊熵系数 p, q 对广义直觉模糊熵的影响 ($p = 5, q = 1$)

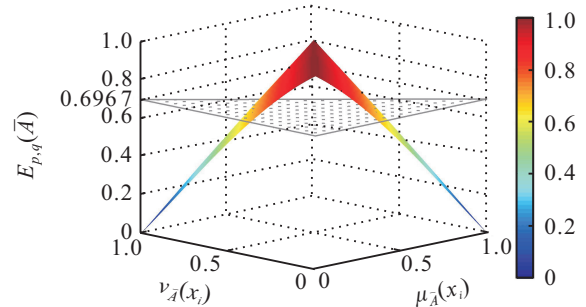


图5 广义直觉模糊熵系数 p, q 对广义直觉模糊熵的影响 ($p = 1, q = 0.5$)

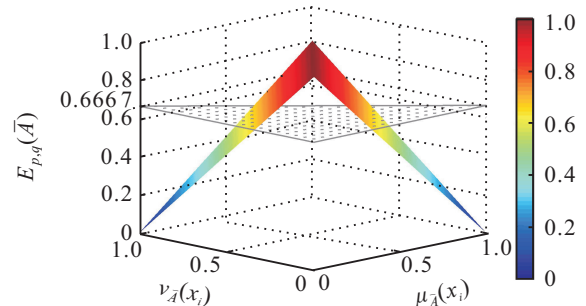


图6 广义直觉模糊熵系数 p, q 对广义直觉模糊熵的影响 ($p = 1, q = 100$)

在图2~图6中, 当广义直觉模糊熵系数 p, q 相应固定时, 曲面表示单点直觉模糊集的熵 $E_{p,q}(\bar{A})$ 随 $\mu_{\bar{A}}(x)$ 和 $\nu_{\bar{A}}(x)$ 变化的分布图; 三角网格平面的高度表示遍历直觉模糊集的熵 $E_{p,q}(\tilde{A})$; 图7刻画了系数 p, q 对遍历直觉模糊集的熵的影响. 对比图2~图4可知, 系数 p 对单点直觉模糊集的熵 $E_{p,q}(\bar{A})$ 的影响较

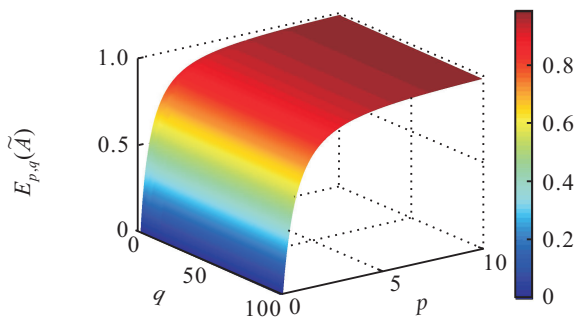


图7 系数 p, q 对 $E_{p,q}(\tilde{A})$ 的影响

大,且遍历直觉模糊集的熵 $E_{p,q}(\tilde{A})$ 随系数 p 增大而增大;对比图2、图5和图6可知,系数 q 对单点直觉模糊集的熵 $E_{p,q}(\tilde{A})$ 的影响较小,且遍历直觉模糊集的熵 $E_{p,q}(\tilde{A})$ 随 q 的增大而减小;由图7可知,系数 p 对 $E_{p,q}(\tilde{A})$ 的影响较大,而 q 对 $E_{p,q}(\tilde{A})$ 的影响较小。

综上所述,关于广义直觉模糊熵系数 p, q 对广义直觉模糊熵的影响,有以下结论。

结论1 设 $A = \{\langle x_i, \mu_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}$ 为论域上的一个直觉模糊集,对广义直觉模糊熵 $E_{p,q}(A)$ 有:1)相对于系数 q ,系数 p 对 $E_{p,q}(A)$ 的影响更大;2) $E_{p,q}(A)$ 随系数 p 的增加而增加,随系数 q 的增加而减少;3)当系数 $p \rightarrow 0$ 时, $E_{p \rightarrow 0,q}(A) = 0$;4)当系数 $p \rightarrow +\infty$ 时, $E_{p \rightarrow +\infty,q}(A) = 1$ 。

证明 由图2~图7可知,结论1中的1)成立.对于结论1中的2)~4),只需证明对于任意单点直觉模糊集 $\tilde{A} \subset A$,等式 $E_{p,q}(\tilde{A}) = (1 - |\mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)|^p) \times \ln[e + |\mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)|^p \times (1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x))^q]$ ($p, q \in (0, +\infty)$)满足相应的结论。

证明结论1中的2)结论.对于 $E_{p,q}(\tilde{A})$,令 $f(p, q) = (1 - a^p) \ln(e + a^p b^q)$, $p, q \in (0, +\infty)$.其中: $a = |\mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)|$, $a \in [0, 1]$ 且 $b = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)$, $b \in [0, 1]$.对 p 求偏导,可得

$$f_p(p, q) = \ln a \times a^p \left[\frac{b^q(1 - a^p)}{e + a^p b^q} - \ln(e + a^p b^q) \right], p, q \in (0, +\infty).$$

易验证, $f_p(p, q) \geq 0$.由此可知, $f(p, q)$ 是关于 p 的单增函数,因而 $E_{p,q}(\tilde{A})$ 随 p 的增加而增加,即 $E_{p,q}(A)$ 随 p 的增加而增加。

同理,对 q 求偏导,可得

$$f_q(p, q) = a^p \times (1 - a^p) \frac{b^q \ln b}{e + a^p b^q}, p, q \in [0, +\infty).$$

易验证, $f_q(p, q) \leq 0$.所以, $f(p, q)$ 是关于 q 的单减函数,进而 $E_{p,q}(\tilde{A})$ 随 q 的增加而减小,即 $E_{p,q}(A)$ 随 q 的增加而减小。

综上所述,结论1中的2)结论成立。

证明结论1中的3)结论.当 $p \rightarrow 0$ 时,由于 $0 \leq$

$|\mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)| \leq 1$ 且 $0 \leq 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$,故有 $E_{p \rightarrow 0,q}(\tilde{A}) = (1 - 1) \ln[e + 1(1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i))^q] = 0$,即 $E_{p \rightarrow 0,q}(A) = 0$ 。

证明结论1中的4)结论.当 $p \rightarrow +\infty$ 时,由于 $0 \leq |\mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)| \leq 1$ 且 $0 \leq 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$,故有 $E_{p \rightarrow +\infty,q}(\tilde{A}) = (1 - 0) \ln[e + 0(1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x))^q] = 1$,即 $E_{p \rightarrow +\infty,q}(A) = 1$ 。□

结论1分析了广义直觉模糊熵系数 p, q 对直接模糊熵的影响.事实上,系数 p 的减小以及模糊信息的增大都将导致 $|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|^p$ 的增大;同时,系数 q 的增大以及直觉信息的减小都将导致 $(1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i))^q$ 的减小.结合定理1中4)和5)的证明,关于直觉模糊集的模糊信息和直觉信息对广义直觉模糊熵 $E_{p,q}(A)$ 的影响,有以下结论。

结论2 设 $A = \{\langle x_i, \mu_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}$ 为论域上的一个直觉模糊集,对于广义直觉模糊熵 $E_{p,q}(A)$ 有:1)相对于直觉信息而言,模糊信息对 $E_{p,q}(A)$ 的影响更大;2) $E_{p,q}(A)$ 随模糊信息的增加而减少;3) $E_{p,q}(A)$ 随直觉信息的增加而增加。

结论2中的1)说明,直觉模糊集的模糊信息是导致直觉模糊集不确定性的主要因素.同时,虽然直觉信息是导致该不确定性的一个不可或缺的因素,但相对于模糊信息,其影响甚微。

直观地,广义直觉模糊熵系数 p 和 q 的大小反应了决策者的风险态度.由以上分析可知,当系数 p 偏小且 q 偏大时(如图3),全体单点直觉模糊集 $\tilde{A} \subset \tilde{A}$ 的熵值偏小,因而可以认为决策者是厌恶风险的;相反,当系数 p 偏大且 q 偏小时(如图4),全体单点直觉模糊集的熵值偏大,此时决策者是偏好风险的.因而,在实际决策问题中,可以根据决策者的风险态度对应地选取广义直觉模糊熵系数。

值得注意的是,以上两种情形都将导致各单点直觉模糊集的熵值差异化小,区分度低,提取直觉模糊集不确定信息的能力相对较弱.而当决策者风险中立时,各单点直觉模糊集的熵值差异化越大,区分度越高,提取直觉模糊集不确定信息的能力越强.为此,本文假设决策者是风险中立的,并选取使得遍历直觉模糊集的熵值 $E_{p,q}(\tilde{A}) = 0.5$ 时所对应的直觉模糊熵公式进行后文的计算,其他情形可根据决策者风险态度类似地处理.由图7可知,存在多个实数对 $\{p, q\}$ 使得 $E_{p,q}(\tilde{A}) = 0.5$,若未作特殊说明,则本文选取系数 $p = 0.4559, q = 0.0997$ 。

3 基于广义直觉模糊熵的权重确定方法

由于直觉模糊熵刻画的是系统的不确定性程度,在群决策问题中,直觉模糊熵较大的系统对应的专家

(或属性)应被赋予较小的权重;反之,则被赋予较大的权重^[19]. 基于该思想,本文提出一种可以同时确定专家和属性权重的方法.

考虑一个决策者及属性权重信息完全未知的MAGDM问题,规定以下符号:

$DM = \{DM_1, DM_2, \dots, DM_s\}$ 表示受邀的 s 个决策者,其中 DM_k 表示第 k 个决策者;

$A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 表示针对决策问题的处理所提供的 m 个备选方案,其中 A_i 表示第 i 个备选方案;

$C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 表示针对决策问题的处理所考虑的 n 个属性,其中 C_j 表示第 j 个属性;

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 表示相应于各属性的权重向量,满足 $\omega_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$;

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)^T$ 表示相应于各决策者的权重向量,满足 $\lambda_k \geq 0$ 且 $\sum_{k=1}^s \lambda_k = 1$;

$M = \{1, 2, \dots, m\}$ 表示 m 个备选方案的下标集合;

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示 n 个属性的下标集合;

$S = \{1, 2, \dots, s\}$ 表示 s 位决策者的下标集合.

此外,决策者 $DM_k (k \in S)$ 以直觉模糊数 $x_{ij}^k = (\mu_{ij}^k, \nu_{ij}^k)$ 来刻画方案 $A_i (i \in M)$ 在属性 $C_j (j \in N)$ 下的评估值,由此可以构建 s 个直觉模糊决策矩阵 $X^k = [x_{ij}^k]_{m \times n} (k \in S)$. 本文提出的基于广义直觉模糊熵的权重确定方法基本步骤如下,其流程如图8所示.

Step 1: 假设决策者是风险中立的,且广义直觉模糊熵系数为 $p = 0.4559, q = 0.0997$. 将决策者 $DM_k (k \in S)$ 在属性 $C_j (j \in N)$ 下对 m 个备选方案的评价值 $A_j^k = \{x_{1j}^k, x_{2j}^k, \dots, x_{mj}^k\}$ 视作直觉模糊集^[19],并计算其直觉模糊熵 $E_{p,q}(A_j^k)$,得到综合直觉模糊熵矩阵 $E = [E_{p,q}(A_j^k)]_{s \times n}$.

Step 2: 设定迭代次数 $t = 0$,误差限 $\varepsilon > 0$. 给定初始属性权重和初始决策者权重分别为

$$\omega^{(0)} = (\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \dots, \omega_n^{(0)})^T,$$

$$\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)})^T.$$

其中

$$\omega_j^{(0)} \geq 0, \sum_{j=1}^n \omega_j^{(0)} = 1,$$

$$\lambda_k^{(0)} \geq 0, \sum_{k=1}^s \lambda_k^{(0)} = 1.$$

Step 3: 令 $t = t + 1$,并进行迭代运算.

1) 结合属性权重 $\omega^{(t-1)}$,利用熵权法计算各决策者的权重

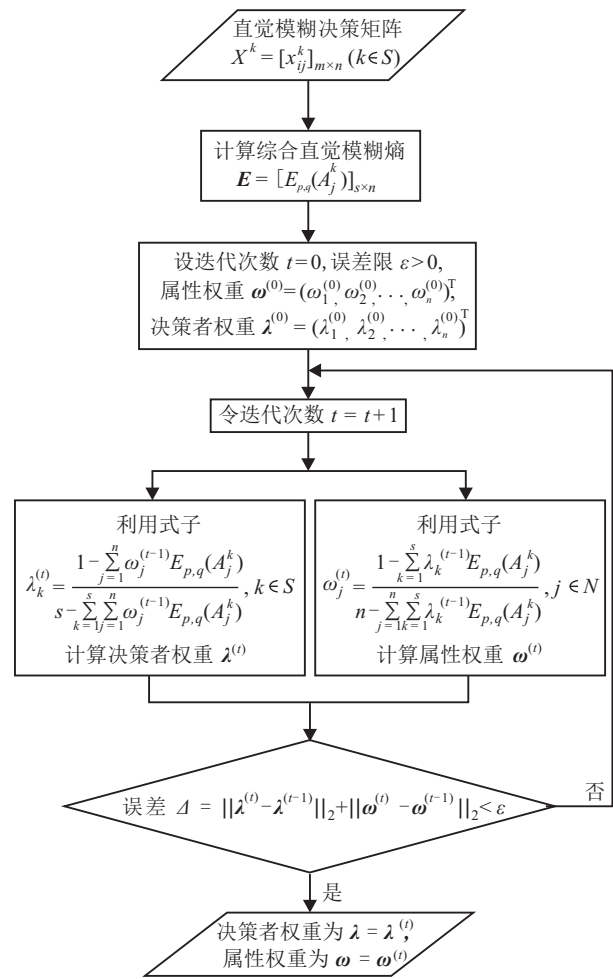


图8 基于广义直觉模糊熵的权重确定流程

$$\lambda^{(t)} = (\lambda_1^{(t)}, \lambda_2^{(t)}, \dots, \lambda_s^{(t)})^T,$$

其中^[19]

$$\lambda_k^{(t)} = \frac{1 - \sum_{j=1}^n \omega_j^{(t-1)} E_{p,q}(A_j^k)}{s - \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^n \omega_j^{(t-1)} E_{p,q}(A_j^k)}, k \in S. \quad (2)$$

2) 结合决策者权重 $\lambda^{(t-1)}$,利用熵权法计算各属性的权重为

$$\omega^{(t)} = (\omega_1^{(t)}, \omega_2^{(t)}, \dots, \omega_n^{(t)})^T,$$

其中^[19]

$$\omega_j^{(t)} = \frac{1 - \sum_{k=1}^s \lambda_k^{(t-1)} E_{p,q}(A_j^k)}{n - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \lambda_k^{(t-1)} E_{p,q}(A_j^k)}, j \in N. \quad (3)$$

Step 4: 若误差满足下式则停止迭代:

$$\Delta = \|\lambda^{(t)} - \lambda^{(t-1)}\|_2 + \|\omega^{(t)} - \omega^{(t-1)}\|_2 < \varepsilon,$$

其中 $\|*\|_2$ 为2-范数. 从而属性权重为 $\omega = \omega^{(t)}$,决策者权重为 $\lambda = \lambda^{(t)}$;否则,转Step 3.

由Step 3可知,迭代算法迭代1次,其时间复杂度

为 $O(s \times n)$. 为了探讨以上算法的收敛性, 首先假设

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_s(\mathbf{x}) \\ f_{s+1}(\mathbf{x}) \\ f_{s+2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{s+n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \sum_{j=1}^n \omega_j E_{p,q}(A_j^1)}{s - \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^n \omega_j E_{p,q}(A_j^k)} \\ \frac{1 - \sum_{j=1}^n \omega_j E_{p,q}(A_j^2)}{s - \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^n \omega_j E_{p,q}(A_j^k)} \\ \vdots \\ \frac{1 - \sum_{j=1}^n \omega_j E_{p,q}(A_j^s)}{s - \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^n \omega_j E_{p,q}(A_j^k)} \\ \frac{1 - \sum_{k=1}^s \lambda_k E_{p,q}(A_1^k)}{n - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \lambda_k E_{p,q}(A_j^k)} \\ \frac{1 - \sum_{k=1}^s \lambda_k E_{p,q}(A_2^k)}{n - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \lambda_k E_{p,q}(A_j^k)} \\ \vdots \\ \frac{1 - \sum_{k=1}^s \lambda_k E_{p,q}(A_n^k)}{n - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \lambda_k E_{p,q}(A_j^k)} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

则其 Jacobi 矩阵为

$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{s+n}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{s+n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{s+n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{s+n}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{s+n}}{\partial x_{s+n}} \end{bmatrix}.$$

同时, 以上迭代算法等价于寻求非线性方程组 $\mathbf{x} = F(\mathbf{x})$ 的解, 即寻求 $F(\mathbf{x})$ 在 $[0, 1]^{s+n}$ 中的不动点.

定理 2 如果对于任意的 $\mathbf{x} \in [0, 1]^{s+n}$, 有 $L = \|F'(\mathbf{x})\| \leq 1$ 成立, 则以上获取决策者和属性权重的迭代算法收敛.

证明 由于 $F: [0, 1]^{s+n} \rightarrow [0, 1]^{s+n}$ 为有界闭凸集 $[0, 1]^{s+n}$ 上的连续映射, 且其 Jacobi 矩阵存在, 假设 $L = \|F'(\mathbf{x})\| \leq 1$ 对于任意的 $\mathbf{x} \in [0, 1]^{s+n}$ 均成立, 则

对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0, 1]^{s+n}$ 和 $p \in [0, 1]$, 有^[24]

$$\|F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x})\| \leq \sup_{0 \leq p \leq 1} \|F'(\mathbf{x} + p(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

因而 $F(\mathbf{x})$ 为 $[0, 1]^{s+n}$ 上的压缩映射.

由压缩映射原理^[24]可知, 映射 $F(\mathbf{x})$ 存在唯一的不动点 $\bar{\mathbf{x}} \in [0, 1]^{s+n}$, 使得 $F(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$, 即存在唯一的 $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_s, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n)^T \in [0, 1]^{s+n}$, 使得迭代序列 $\mathbf{x}^{(t+1)} = F(\mathbf{x}^{(t)}) (t = 0, 1, 2, \dots)$ 收敛于该点. 因此, 以上获取决策者和属性权重的迭代算法收敛. \square

定理 2 给出了以上获取决策者和属性权重的迭代算法的收敛条件. 若未作特殊说明, 则选取 ∞ -范数进行 $L = \|F'(\mathbf{x})\|_\infty$ 的运算.

事实上, 由于 $[0, 1]^{s+n}$ 为 \mathbf{R}^{s+n} 上的有界闭凸集, 且 $F: [0, 1]^{s+n} \rightarrow [0, 1]^{s+n}$ 为连续映射, 根据 Brouwer 不动点定理^[24], 映射 $F(\mathbf{x})$ 至少有一个不动点 $\bar{\mathbf{x}} \in [0, 1]^{s+n}$, 使得 $F(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$. 若对于任意的 $\mathbf{x} \in [0, 1]^{s+n}$ 有 $L = \|F'(\mathbf{x})\| \leq 1$ 成立, 则迭代结果(或不动点)与初始值的选取无关; 如果该条件不成立, 则可以选取初始点 $\mathbf{x}^{(0)} \in [0, 1]^{s+n}$, 使得基于其生成的迭代序列 $\mathbf{x}^{(t+1)} = F(\mathbf{x}^{(t)}) (t = 0, 1, 2, \dots)$ 满足条件 $\|F'(\mathbf{x}^{(t)})\| \leq 1$. 同理可证, 以上获取决策者和属性权重的迭代算法局部收敛于 $F(\mathbf{x})$ 的一个不动点, 此时迭代结果可能与初始值的选取相关.

本文提出的基于广义直觉模糊熵的权重确定方法从主观假设出发, 即假设各决策者和属性的权重已知, 然后基于评价信息, 利用熵权法通过迭代获得决策者和属性的权重. 需指出的是, 在 MAGDM 问题中, 尽管决策者权重和属性权重在数学表达上均为向量形式, 但两者的本质意义不同: 前者刻画了各决策者给出的评估信息的重要程度, 后者则是对各决策属性重要度的一种数值量化. 然而, 在本文方法中, 无论是在属性权重已知的假设下获取决策者权重, 还是在决策者权重已知的前提下获取属性权重, 其目的均为减小对应的总加权熵, 即降低对应加权系统的不确定性程度. 由此可知, 将决策者和属性权重视作向量进行迭代运算是合理的.

4 案例分析

假设 3 个决策者 $DM = \{DM_1, DM_2, DM_3\}$ 基于 4 个属性 $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ 对 4 个备选方案 $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 进行评价. 各决策者的评价信息如表 1~表 3 所示.

表1 决策者DM₁提供的评价决策矩阵X¹

方案	评价属性			
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
A ₁	(0.289 1, 0.671 8)	(0.695 1, 0.068 0)	(0.254 8, 0.224 0)	(0.675 3, 0.006 7)
A ₂	(0.602 2, 0.386 8)	(0.916 0, 0.001 2)	(0.462 4, 0.424 3)	(0.471 4, 0.035 8)
A ₃	(0.175 9, 0.721 8)	(0.473 5, 0.152 7)	(0.341 1, 0.607 4)	(0.191 7, 0.738 4)
A ₄	(0.188 7, 0.287 5)	(0.091 1, 0.576 2)	(0.208 9, 0.709 3)	(0.236 2, 0.119 4)

表2 决策者DM₂提供的评价决策矩阵X²

方案	评价属性			
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
A ₁	(0.256 4, 0.613 5)	(0.318 1, 0.119 2)	(0.218 7, 0.105 8)	(0.109 7, 0.063 6)
A ₂	(0.404 6, 0.448 4)	(0.192 0, 0.138 9)	(0.696 3, 0.093 8)	(0.347 7, 0.150 0)
A ₃	(0.586 1, 0.262 1)	(0.044 5, 0.754 9)	(0.242 8, 0.442 4)	(0.442 3, 0.019 6)
A ₄	(0.330 9, 0.424 3)	(0.270 3, 0.197 1)	(0.377 4, 0.216 0)	(0.327 6, 0.671 3)

表3 决策者DM₃提供的评价决策矩阵X³

方案	评价属性			
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
A ₁	(0.768 9, 0.167 3)	(0.588 0, 0.154 8)	(0.199 9, 0.407 0)	(0.534 1, 0.090 0)
A ₂	(0.111 7, 0.136 3)	(0.189 7, 0.495 0)	(0.147 6, 0.055 0)	(0.000 5, 0.865 4)
A ₃	(0.246 7, 0.666 4)	(0.083 5, 0.626 0)	(0.017 0, 0.120 9)	(0.032 0, 0.614 7)
A ₄	(0.362 4, 0.049 5)	(0.489 6, 0.192 5)	(0.123 1, 0.205 5)	(0.146 5, 0.189 1)

由此可知,决策者和属性权重的确定过程如下.

Step 1: 取 $p = 0.455 9, q = 0.099 7$, 结合广义直觉模糊熵公式(1)计算综合直觉模糊熵矩阵 E , 结果如表4所示.

Step 2: 计算式(4)的Jacobi矩阵的 ∞ -范数, 即 $\|F'(x)\|_{\infty} = 0.440 < 1$. 由定理2可知, $F(x)$ 有且仅有一个与初始迭代值无关的不动点.

Step 3: 令 $t = 0, \varepsilon = 10^{-5}$, 选取属性权重 $\omega^{(0)} = (0.230 0, 0.210 0, 0.340 0, 0.220 0)^T$, 决策者权重为

$$\lambda^{(0)} = (0.420 0, 0.350 0, 0.230 0)^T.$$

Step 4: 根据迭代算法中的Step 3进行迭代, 每次迭代的结果如表5所示.

表4 综合直觉模糊熵矩阵E

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	决策者总熵
DM ₁	0.560 5	0.542 9	0.645 0	0.625 5	2.373 9
DM ₂	0.612 5	0.605 2	0.622 4	0.556 1	2.396 2
DM ₃	0.501 6	0.412 6	0.681 2	0.382 5	1.977 9
属性总熵	1.674 7	1.560 7	1.948 6	1.564 1	

表5 迭代结果

迭代次数	决策者权重	属性权重	误差
$t = 0$	$(0.420 0, 0.350 0, 0.230 0)^T$	$(0.230 0, 0.210 0, 0.340 0, 0.220 0)^T$	-
$t = 1$	$(0.312 5, 0.310 9, 0.376 6)^T$	$(0.254 4, 0.272 2, 0.207 4, 0.266 0)^T$	$\Delta = 0.341 3$
$t = 2$	$(0.308 1, 0.302 8, 0.389 1)^T$	$(0.251 9, 0.275 3, 0.197 0, 0.275 7)^T$	$\Delta = 0.030 3$
$t = 3$	$(0.307 3, 0.302 4, 0.390 3)^T$	$(0.251 9, 0.275 7, 0.196 1, 0.276 3)^T$	$\Delta = 0.002 7$
$t = 4$	$(0.307 3, 0.302 3, 0.390 4)^T$	$(0.251 8, 0.275 7, 0.196 0, 0.276 4)^T$	$\Delta = 0.000 2$
$t = 5$	$(0.307 3, 0.302 3, 0.390 4)^T$	$(0.251 8, 0.275 7, 0.196 0, 0.276 4)^T$	$\Delta = 2.133 1 \times 10^{-5}$
$t = 6$	$(0.307 3, 0.302 3, 0.390 4)^T$	$(0.251 8, 0.275 7, 0.196 0, 0.276 4)^T$	$\Delta = 1.883 8 \times 10^{-6}$

Step 5: 从表5可以看出, 迭代误差随迭代次数急剧减小, 且当迭代进行到第6次时, 误差 $\Delta < \varepsilon$. 因而决策者和属性的权重分别为

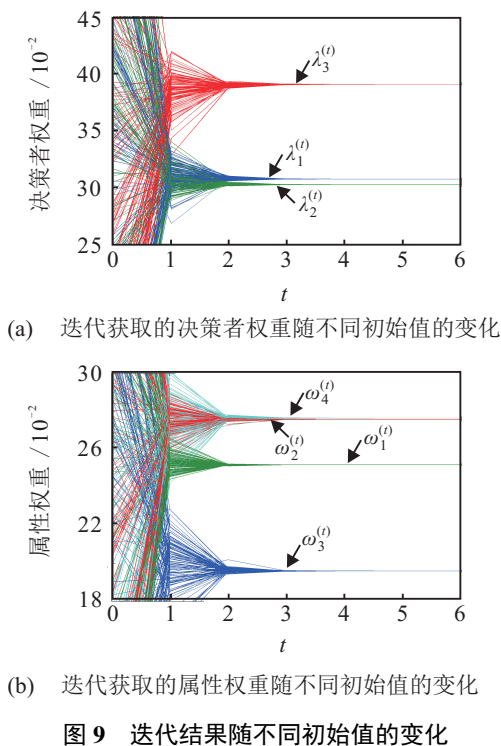
$$\lambda = (0.307 3, 0.302 3, 0.390 4)^T,$$

$$\omega = (0.251 8, 0.275 7, 0.196 0, 0.276 4)^T.$$

上述结论表明, 决策者权重大小的排序为 $DM_3 > DM_1 > DM_2$, 且属性权重大小的排序为 $C_4 > C_2$

$> C_1 > C_3$. 图9给出了当初始决策者和属性权重选取为不同值时, 迭代结果的变化.

由图9可以看出, 最终迭代值(即最终决策者和属性权重)对应收敛到同一值, 进而表明了本文所提出方法的收敛性和合理性. 此外, 由于式(4)在本算例下的Jacobi矩阵的范数 $\|F'(x)\|_{\infty} \leq 1$, 最终决策者和属性权重不随初始点的变化而变化.



综合以上分析,本文提出的基于直觉模糊熵的权重确定方法的优势主要体现在以下几方面:

- 1) 本文方法可以针对权重信息完全未知的群决策问题,同时获取决策者和属性的权重,从而避免利用不同方法分别寻求决策者和属性权重时造成的信息侧重差异化;
- 2) 选取使得各单点直觉模糊集的熵值区分度最高的广义直觉模糊熵公式进行计算,凸显各评价信息的差异化,有利于获取更为准确的权重信息;
- 3) 基于客观的熵权法进行迭代,能够有效规避部分人为因素的干扰;
- 4) 通过迭代反复修正决策者和属性权重,最小化对应加权评价系统的不确定性,使得决策结果更为合理.

此外,结合表4和表5可知,总熵(直接求和得到)最小并不意味着其应被赋予最大的权重,如属性 C_2 的总熵小于属性 C_4 ,但属性 C_4 的权重大于属性 C_2 .事实上,最大的权重应赋予综合熵(基于合理权重加权求和得到)最小的决策者(或属性).此结论也间接说明,对于权重信息完全未知的MAGDM问题而言,本文提出的权重确定方法较传统的熵权法更为合理.

本文假设决策者是风险中立的,并选取使得遍历直觉模糊集的熵值 $E_{p,q}(\tilde{A}) = 0.5$ 时所对应的直觉模糊熵公式进行计算.不同的广义直觉模糊熵参数对应着不同的直觉模糊熵公式,进而刻画不同的决策者风险态度.下面将分析不同的决策者风险态度对算例的最终决策者和属性权重的影响.

由于系数 q 对广义直觉模糊熵的影响较小,考虑系数 $q = 1$ 固定不变,最终迭代决策者和属性权重随系数 p 变化的结果如图10所示.

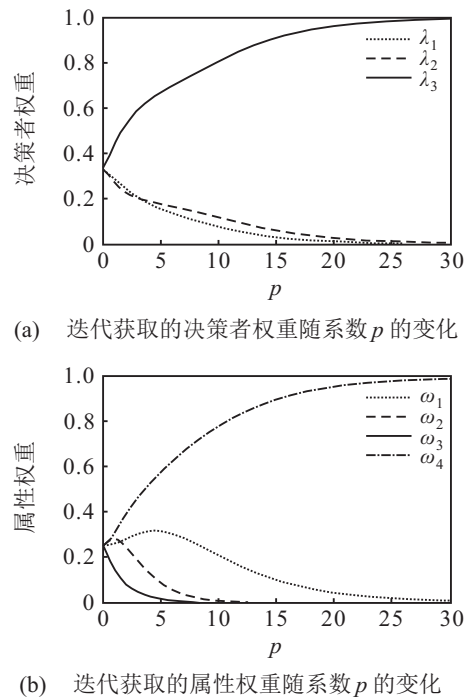


图10 迭代结果随不同系数 p 的变化($q = 1$)

由图10可以看出,决策者 DM_3 的权重 λ_3 和属性 C_4 的权重 ω_4 随着 p 的增大而增大,这是因为由决策者 DM_3 在属性 C_4 下的评估值所构成的直觉模糊集 $\{(0.3624, 0.0495), (0.4896, 0.1925), (0.1231, 0.2055), (0.1465, 0.1891)\}$ 的熵总是小于其他直觉模糊集的熵(定理1的4)和5).因而当决策者的风险态度由悲观向乐观转变时,各直觉模糊集的熵值逐渐增大,较小熵值对应的决策者和属性的权重逐渐增大;而当决策者足够乐观时(如 $p > 10$),其余决策者和属性权重则逐渐减小.特别地,当决策者极度悲观,即系数 p 充分小时,各直觉模糊集的熵均趋于0(结论1中的3)),因而各决策者和属性拥有相同的权重.然而,当决策者的风险态度过于悲观(p 足够小)或过于乐观(p 足够大)时,各单点直觉模糊集的熵值差异化小,区分度低,提取直觉模糊集不确定信息的能力相对较弱.事实上,作为直觉模糊熵公式的一个内在属性,遍历直觉模糊集的熵值不仅是该熵公式能否精确刻画直觉模糊集不确定信息的一种重要体现,更是全体单点直觉模糊集 $\tilde{A} \subset \tilde{A}$ 熵值差异程度的一个客观反映.因而中立的决策者态度能够更为精细地刻画直觉模糊集不确定信息,故在本文中选取遍历直觉模糊集的熵值 $E_{p,q}(\tilde{A}) = 0.5$ 时所对应的直觉模糊熵公式进行计算具有明显的优势,其所获得的决策者和属性权重更为合理.

5 结 论

本文旨在提出广义直觉模糊熵的定义, 讨论其相关性质, 并将其用于解决直觉模糊环境下权重信息完全未知的MAGDM问题. 在考虑直觉模糊集的直觉信息和模糊信息的前提下, 提出了广义直觉模糊熵的定义, 并验证了其相关性质. 结论表明, 直觉模糊集的模糊信息对广义直觉模糊熵的影响较大, 而直觉信息对其影响较小. 同时, 针对权重信息完全未知的MAGDM问题, 利用熵权法将广义直觉模糊熵公式应用于确定决策者和属性的权重. 特别地, 广义直觉模糊熵公式的选取充分凸显了各直觉模糊集间的差异化, 使得权重结果更为合理. 所提出的方法为解决权重信息完全未知的群体决策问题提供了一类新的思路. 在后续的研究中, 将重点关注广义直觉模糊熵的其他性质以及相关的权重确定方法, 将诸方法与本文方法相结合, 并探讨其在故障诊断、模式识别以及图像处理等各个领域的应用以分析其合理性和可行性.

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Wang G J, Li X P. The applications of interval-valued fuzzy numbers and interval-distribution numbers[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 98(3): 331-335.
- [3] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87-96.
- [4] Atanassov K T, Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 31(3): 343-349.
- [5] Atanassov K T. Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 64(2): 159-174.
- [6] Wu J, Cao Q. Same families of geometric aggregation operators with intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(1): 318-327.
- [7] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 2010, 25(6): 529-539.
- [8] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. *IEEE Int Conf on Fuzzy Systems*. USA: IEEE, 2009: 1378-1382.
- [9] Zadeh L A. Probability measures of fuzzy events[J]. *J of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, 23(2): 421-427.
- [10] Burillo P, Bustince H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(3): 305-316.
- [11] Luca A D, Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. *Information and Control*, 1972, 20(4): 301-312.
- [12] 魏翠萍, 梁霞, 张玉忠. 直觉模糊集的熵公式比较与改进[J]. *系统科学与数学*, 2012, 32(11): 1437-1448. (Wei C P, Liang X, Zhang Y Z. A comparative analysis and improvement of entropy measure for intuitionistic fuzzy sets[J]. *J of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2012, 32(11): 1437-1448.)
- [13] Szmidi E, Kacprzyk J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 118(3): 467-477.
- [14] Xia M M, Xu Z S. Entropy/cross entropy-based group decision making under intuitionistic fuzzy environment[J]. *Information Fusion*, 2012, 13(1): 31-47.
- [15] Mao J, Yao D, Wang C. A novel cross-entropy and entropy measures of IFSs and their applications[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2013, 48(2): 37-45.
- [16] Zhao N, Xu Z S. Entropy measures for interval-valued intuitionistic fuzzy information from a comparative perspective and their application to decision making[J]. *Informatica*, 2016, 27(1): 203-229.
- [17] Xiong S H, Chen Z S, Li Y L. Interdependent multiple criteria group decision making method for complex systems based upon arguments with intuitionistic fuzzy numbers[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(6): 1065-1077.
- [18] Mon D L, Cheng C H, Lin J C. Evaluating weapon system using fuzzy analytic hierarchy process based on entropy weight[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 62(2): 127-134.
- [19] Zhao M, Ren R R, Qiu W H. Experts' weights method and computational experiment analysis based on intuitionistic fuzzy entropy measures[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(7): 1233-1238.
- [20] Yue Z. A method for group decision-making based on determining weights of decision makers using TOPSIS[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(4): 1926-1936.
- [21] Boran F E, Genc S, Kurt M, et al. A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(8): 11363-11368.
- [22] 周延年, 朱怡安. 基于灰色系统理论的多属性群决策专家权重的调整算法[J]. *控制与决策*, 2012, 27(7): 1113-1116. (Zhou Y N, Zhu Y A. Algorithm for adjusting weights of decision-makers in multi-attribute group decision-making based on grey system theory[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(7): 1113-1116.)
- [23] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. *Int J of General Systems*, 2006, 35(4): 417-433.
- [24] 黄象鼎, 曾钟钢, 马亚男. 非线性数值分析的理论与方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004: 55-56. (Huang X D, Zeng Z G, Ma Y N. Theory and method of nonlinear numerical analysis[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2004: 55-56.)