第32卷 第5期
2017年 5月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.32 No.5
May 2017

文章编号: 1001-0920(2017)05-0864-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.0259

基于前景理论的犹豫模糊TOPSIS多属性决策方法

王应明†, 阙翠平, 蓝以信

(福州大学 决策科学研究所，福州 350116)

摘 要: 针对属性权重未知、属性值为犹豫模糊集的决策问题,提出一种前景理论和逼近理想解(TOPSIS)相结合的多属性决策方法. 考虑到决策者对指标集的不同偏好,利用犹豫模糊熵的相关理论,提出一种基于犹豫模糊熵的熵权法确定属性权重. 将决策者的风险心理因素引入犹豫模糊多属性决策中,定义了犹豫模糊数的前景价值函数,并以此将犹豫模糊决策矩阵转化为价值矩阵,计算出各方案的收益损失比值. 最终应用TOPSIS的基本思路,确定备选方案的优劣排序,并通过算例分析验证了所提出方法的有效性.

关键词: 犹豫模糊集；多属性决策；前景理论；犹豫模糊熵；逼近理想解

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Hesitant fuzzy TOPSIS multi-attribute decision method based on prospect theory

WANG Ying-ming†, *QUE Cui-ping*, *LAN Yi-xin*

(Institute of Decision Sciences，Fuzhou University，Fuzhou 350116，China)

Abstract: A decision method of integrating the prospect theory with TOPSIS is proposed for multi-attribute decision-making, where the attribute weights are unknown and attribute values are in the form of hesitant fuzzy number. Considering the different attitudes of decision makers toward index sets, An approach to determine the weights of attribute by the entropy method based on the hesitant fuzzy entropy is proposed. The prospect value function of the hesitant fuzzy number is defined by introducing the psychological risk factors of decision makers into hesitant fuzzy multi-attribute decision-making, and the hesitant fuzzy decision-making matrix is converted to the value matrix based on which the ratio of gains to losses of the alternatives is calculated. Finally, TOPSIS method is used to rank all the alternatives and a numerical example is provided to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: hesitant fuzzy sets；multi-attribute decision-making；prospect theory；hesitant fuzzy entropy；TOPSIS

0 引 言

随着社会、经济问题的日益复杂化,人们自身的思维能力与知识水平存在局限性,由Zadeh[1]提出的传统模糊集已经无法完整描述所研究的决策问题的信息. 为此,国内外学者对模糊集进行了拓展,提出区间模糊集[2]、直觉模糊集[3]、区间直觉模糊集[4]等. 近年来,西班牙学者Torra[5]针对多属性决策中决策专家的犹豫不决以及多个决策专家难以达成一致意见的问题提出模糊集的另一种重要拓展形式,即犹豫模糊集(HFSs),其隶属度是由几个可能的值构成的集合. 与传统模糊集、区间模糊集和直觉模糊集相比,犹豫模糊集允许决策者灵活地给出多个可能值,更加细腻地刻画了决策者对事物的不确定性决策信息. 因此,研究基于犹豫模糊集的多属性决策方法对于模糊集的拓展和应用具有重要的意义.

犹豫模糊集作为一种新的不确定性决策信息描述工具,其理论及其在决策中的应用引起了国内外学者的广泛关注. Xu等[6-7]给出犹豫模糊集的数学形式,研究了犹豫模糊集成算子、相似度测度、犹豫模糊距离、犹豫模糊熵和交叉熵. Farhadinia[8]给出了犹豫模糊数的得分函数,并将其应用于犹豫模糊数的排序. Wang等[9]提出一种新的犹豫模糊几何算子,并将其应用于多属性群决策中. Wei[10]提出了犹豫模糊优先集结算子,并将其应用于多属性决策中. Chen等[11]在优先级别关系的基础上提出了一种新的犹豫模糊ELECTRE多属性决策方法. Xu等[12]提出一

收稿日期: 2016-03-05；**修回日期:** 2016-05-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71501047)；教育部人文社会科学研究青年基金项目(14YJC630056).

作者简介: 王应明(1964–)男,教授,博士生导师,从事决策理论与方法等研究；阙翠平(1991–),女,硕士生,从事决策理论与方法的研究.

†通讯作者. E-mail: msymwang@hotmail.com

种基于标记距离的犹豫模糊QUALIFLEX决策方法. Xu等[13]提出基于TOPSIS的犹豫模糊多属性决策方法解决具有不完全权重信息的决策问题. 刘小弟等[14]提出犹豫模糊信息下的双向投影决策方法, 并将其应用于多属性决策中. 然而, 以上关于犹豫模糊信息的多属性决策研究多数是建立在属性权重已知或部分已知、决策者是完全理性的基础上, 而在实际决策过程中决策者往往是依据各自的风险偏好进行决策的. 同时, 传统TOPSIS各属性之间以距离作为尺度会使得评价结果不合理以及只能反映数据曲线之间的位置关系[15].

本文提出一种新的基于前景理论的犹豫模糊TOPSIS决策方法. 首先, 考虑到决策者对指标集的不同偏好, 使用基于犹豫模糊熵的熵权法确定属性权重; 然后, 定义了犹豫模糊数的前景价值函数, 并以此将犹豫模糊决策矩阵转化为价值矩阵, 用计算出的收益损失比值代替相对贴近度; 最后, 应用TOPSIS的基本思路, 对备选方案进行优劣排序, 并结合算例进行验证.

1　基础理论

1.1　犹豫模糊集的基本知识

定义1[5-6]　设X是给定的论域, 称$H=\{\langle x, h_H(x)\rangle | x\in X\}$为$X$上的犹豫模糊集, 其中$h_H(x)$是由区间$[0,1]$上几个不同的数构成的集合, 表示$x$属于集合$H$的若干种可能隶属度; $h=h_H(x)=\{\gamma|\gamma\in h_H(x)\}=H\{\gamma^1,\gamma^2,\cdots,\gamma^l\}$为一个犹豫模糊数, $\gamma^\lambda\in[0,1], \lambda=1,2,\cdots,l$; 犹豫模糊数$h$的补为$h^c=H\{1-\gamma^1,1-\gamma^2,\cdots,1-\gamma^l\}$, l表示犹豫模糊数h中元素的个数.

定义2[5-6]　对于任意的3个犹豫模糊元h、h_1和h_2, 它们的基本运算法则如下(其中θ为一个常数):

1) $h_1\bigcap h_2=H\{\min(\gamma_1,\gamma_2)|\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2\}$;

2) $h_1\bigcup h_2=H\{\max(\gamma_1,\gamma_2)|\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2\}$;

3) $\theta h=H\{(1-(1-\gamma)^\theta)|\gamma\in h\}$, $\theta>0$;

4) $h^\theta=H\{\gamma^\theta|\gamma\in h\}$, $\theta>0$;

5) $h^c=H\{(1-\gamma)|\gamma\in h\}$;

6) $h_1\oplus h_2=H\{(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2)|\gamma_1\in h_1, \gamma_2\in h_2\}$;

7) $h_1\otimes h_2=H\{\gamma_1\gamma_2|\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2\}$.

定义3[16]　两个犹豫模糊数分别表示为$h_1=H\{\gamma_1^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_1\}$和$h_2=H\{\gamma_2^\lambda|\lambda=1,2,\cdots,l_2\}$, 假设其中的元素按增序排列且具有相同个数, 即$l_1=l_2=l$且$\gamma_1^\lambda$和$\gamma_2^\lambda$分别为犹豫模糊数$h_1$和$h_2$中第$\lambda$小的值, 则有$h_1\leqslant h_2$当且仅当$\gamma_1^\lambda\leqslant\gamma_2^\lambda$, $\lambda=1,2,\cdots,l$.

定义4[16]　两个犹豫模糊数h_1和h_2的距离测度用犹豫模糊海明距离测度和犹豫模糊欧几里得距离测度表示, 分别为

$$d_H(h_1,h_2)=\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}\left|\gamma_1^\lambda-\gamma_2^\lambda\right|;$$

$$d_E(h_1,h_2)=\sqrt{\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}\left(\gamma_1^\lambda-\gamma_2^\lambda\right)^2}.$$

定义5[17]　对于任意一个犹豫模糊数h, h的犹豫模糊熵为

$$\begin{aligned}&E(h)=\\&1-\frac{2}{lT}\sum_{i=1}^{l}(((1+qh^{\sigma(i)})\ln(1+qh^{\sigma(i)})+\\&(1+q(1-h^{\sigma(l-i+1)}))\ln(1+q(1-h^{\sigma(l-i+1)})))/2-\\&(2+qh^{\sigma(i)}+q(1-h^{\sigma(l-i+1)}))/2\times\\&\ln((2+qh^{\sigma(i)}+q(1-h^{\sigma(l-i+1)}))/2)).\end{aligned}$$

其中$h^{\sigma(i)}$表示犹豫模糊数h中第i大的元素, $q>0, T=(1+q)\ln(1+q)-(2+q)(\ln(2+q)-\ln 2)$. 可以证明犹豫模糊熵$E(h)$满足如下性质.

性质1　$E(h)=0$, 当且仅当$h=0$或$h=1$.

性质2　当且仅当$h^{\sigma(i)}+h^{\sigma(l-i+1)}=1, i=1,2,\cdots,l$时, 有$E(h)=1$.

性质3　若$h_1^{\sigma(i)}\leqslant h_2^{\sigma(i)}, h_2^{\sigma(i)}+h_2^{\sigma(l-i+1)}\leqslant 1$或$h_1^{\sigma(i)}\geqslant h_2^{\sigma(i)}, h_2^{\sigma(i)}+h_2^{\sigma(l-i+1)}\geqslant 1, i=1,2,\cdots,l$, 则$E(h_1)\leqslant E(h_2)$.

性质4　$E(h)=E(h^c)$.

1.2　前景理论

前景理论是以"有限理性"为前提, 反映决策者的主观风险偏好[18]. 前景价值由价值函数和概率权重函数决定, 价值函数是决策者根据实际收益或损失所产生的主观感受的价值[19], 其定义如下.

定义6　Tversky等[20]给出的价值函数$v(\Delta x)$为幂函数, 即

$$v(\Delta x)=\begin{cases}\Delta x^\alpha,\ \Delta x\geqslant 0;\\-\theta(-\Delta x)^\beta,\ \Delta x<0.\end{cases}$$

其中: Δx为x偏离某一参考点x_0的大小, $\Delta x\geqslant 0$, 表示获得收益, $\Delta x<0$, 表示遭受损失; α和β反映了决策者对收益和损失的敏感性程度; θ表示相对于收益而言, 决策者对损失更加敏感; α, β, θ的取值范围分别为$\alpha>0$, $\beta<1$, $\theta>1$.

在前景理论中, 决策者依据参考点来衡量各个方案的收益和损失情况, 因此, 参考点的选择对决策的结果至关重要. 决策参考点的选取一般由决策者根据自己的风险偏好和心理状态决定, 在传统的多属性决策中, 由于没有指定参考点, 大多数学者使用

0点[21]、中位数[22]、决策者对各属性的期望值[23]和正负理想解[24-25]为决策参考点. 本文在犹豫模糊多属性决策过程中以正负理想解作为决策参考点,利用犹豫模糊欧氏距离测度表示各个方案偏离正负理想解的大小,定义了犹豫模糊环境下的前景价值函数,如下所示.

定义7 设两个犹豫模糊数具有相同个数,即 $h_1 = H\left\{\gamma_1^{\lambda}|\lambda = 1, 2, \cdots, l\right\}$ 和 $h_2 = H\{\gamma_2^{\lambda}|\lambda = 1, 2, \cdots, l\}$. 若以犹豫模糊数 h_2 为决策参考点,则犹豫模糊数 h_1 的前景价值函数为

$$v(h_1) = \begin{cases} (d_E(h_1, h_2))^{\alpha}, h_1 \geqslant h_2; \\ -\theta(d_E(h_1, h_2))^{\beta}, h_1 < h_2. \end{cases}$$

2 前景理论下犹豫模糊TOPSIS决策模型的构建

2.1 问题描述

假设一个犹豫模糊多属性决策问题包括 m 个备选方案和 n 个评价属性. 令 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为方案集, $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 为属性集,其权重未知且 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$,满足 $w_j \in [0, 1], j = 1, 2, \cdots, n, \sum\limits_{j=1}^{n} w_j = 1$. 由于受时间压力和对决策问题了解程度等因素的影响,决策者进行决策时可能会在一些评估值之间犹豫不决. 所以决策者给出方案 x_i 在属性 d_j 的属性值为 h_{ij},有 $h_{ij} = H\{\gamma_{ij}^1, \gamma_{ij}^2, \cdots, \gamma_{ij}^{l_{ij}}\}$,其中 l_{ij} 表示犹豫模糊数 h_{ij} 中元素个数,且 $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

2.2 权重确定方法

信息熵描述信息的不确定程度,将熵的概念引入模糊集理论中,从而产生了模糊熵,模糊熵可用于确定一个模糊集合的模糊性程度. 熵权法是一种重要的客观赋权法,其根据原始数据所包含的信息确定各指标的权重,指标间观测值差异越大,权重越大. 熵权法计算犹豫模糊多属性决策问题的指标权重如下所示:

Step 1: 决策者给出方案 x_i 在属性 d_j 的属性值,由犹豫模糊数 h_{ij} 表示.

Step 2: 在多属性决策问题中,评价属性通常分为效益型和成本型. 为了消除不同物理量纲对最终决策结果的影响,本文用Zhu等[26]提出的犹豫模糊数规范化方法将成本型属性全部转化为效益型属性,即:对于效益型属性,有 $\bar{h}_{ij} = h_{ij}$;对于成本型属性,有 $\bar{h}_{ij} = (h_{ij}^c)$,其中 $(h_{ij}^c) = H\{1 - \gamma_{ij}^1, 1 - \gamma_{ij}^2, \cdots, 1 - \gamma_{ij}^{l_{ij}}\}$.

Step 3: 考虑到传统计算评价指标的熵公式不适用于犹豫模糊环境,本文用Xu等[17]提出的犹豫模糊熵计算各个评价指标的熵 E_j,即

$$\begin{aligned} & E_j = \\ & \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(1 - \frac{2}{lT}\sum_{i=1}^{l}(((1 + qh^{\sigma(i)})\ln(1 + qh^{\sigma(i)}) + \\ & (1 + q(1 - h^{\sigma(l-i+1)}))\ln(1 + q(1 - h^{\sigma(l-i+1)})))/2 - \\ & 2 + qh^{\sigma(i)} + q(1 - h^{\sigma(l-i+1)}))/2 \times \\ & \ln((2 + qh^{\sigma(i)} + q(1 - h^{\sigma(l-i+1)}))/2)\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

其中: $h^{\sigma(i)}$ 为犹豫模糊数 h 中第 i 大的元素,且 $q > 0, j = 1, 2, \cdots, n, T = (1 + q)\ln(1 + q) - (2 + q)(\ln(2 + q) - \ln 2)$.

Step 4: 由信息熵理论可知,熵值越小,相应的评价指标越重要;反之,该评价指标越不重要. 因此,第 j 个评价指标的熵权为

$$w_j = \frac{1 - E_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}(1 - E_j)},\ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

Step 5: 由于决策者对指标集的不同偏好,用主观的修正权重系数 $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 对熵权作进一步修正[27],得到能够较为准确地对各评价指标进行衡量的熵权 w_j^*,即

$$w_j^* = \frac{\lambda_j w_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j w_j},\ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

2.3 前景理论下的犹豫模糊TOPSIS排序方法

随着决策问题日益复杂化和决策者思维的固有模糊性,决策者越来越难以表达它们的模糊性、不确定性的偏好信息,同时在实际决策过程中决策者往往依据各自的风险偏好进行决策. 然而,经典TOPSIS法通常用来求解属性值为精确值且决策者是完全理性的多属性决策问题. 因此,为解决以上问题,本文提出一种犹豫模糊环境下的前景理论和TOPSIS相结合的多属性排序方法. 首先,在获得属性权重后对方案的不同属性值进行加权处理,利用加权后的结果确定正理想解和负理想解;然后,计算每个方案与正负理想解的距离集及正负前景值;最后,用计算出的收益损失比值代替相对贴近度,确定所有方案的优劣排序. 前景理论下的犹豫模糊TOPSIS排序方法如下所示:

Step 1: 构造样本数据的标准化犹豫模糊决策矩阵

$$M=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

首先将犹豫模糊数内的所有元素进行增序排列,然后根据Xu等[7]给出的拓展规则拓展元素个数相对少的犹豫模糊数,使其具有相同的元素个数,即$l_{ij}=l$.其中:h_{ij}表示方案x_i在属性d_j下的属性值,是一个犹豫模糊数,l_{ij}表示犹豫模糊数h_{ij}中元素个数,且$h_{ij}=H\{\gamma_{ij}^1,\gamma_{ij}^2,\cdots,\gamma_{ij}^l\}, i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$.

Step 2: 对标准化犹豫模糊决策矩阵M进行归一化处理,消除各指标的量纲与数量级的影响,得到归一化犹豫模糊决策矩阵

$$\bar{M}=\begin{bmatrix} \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} & \cdots & \bar{h}_{1n} \\ \bar{h}_{21} & \bar{h}_{22} & \cdots & \bar{h}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{h}_{m1} & \bar{h}_{m2} & \cdots & \bar{h}_{mn} \end{bmatrix}.$$

其中:对于效益型属性有$\bar{h}_{ij}=h_{ij}$;对于成本型属性有$\bar{h}_{ij}=(h_{ij}^c)$,且$(h_{ij}^c)=H\{1-\gamma_{ij}^1,\ 1-\gamma_{ij}^2,\cdots,1-\gamma_{ij}^l\}$.

Step 3: 将熵权法得到的权重矩阵W^*右乘归一化犹豫模糊矩阵$\bar{M}$,得到加权归一化犹豫模糊决策矩阵

$$\tilde{M}=\begin{bmatrix} \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} & \cdots & \bar{h}_{1n} \\ \bar{h}_{21} & \bar{h}_{22} & \cdots & \bar{h}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{h}_{m1} & \bar{h}_{m2} & \cdots & \bar{h}_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} & \cdots & \tilde{h}_{1n} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} & \cdots & \tilde{h}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_{m1} & \tilde{h}_{m2} & \cdots & \tilde{h}_{mn} \end{bmatrix},$$

其中$W^*=(W_1^*,W_2^*,\cdots,W_n^*)$,

Step 4: 确定正理想解和负理想解. 设x^+为正理想解,x^-为负理想解,可得

$$\begin{aligned} & x^+=\{d_j,\max_{i=1}^{m}\langle\tilde{h}_{ij}^{\lambda}\rangle\}= \\ & \{d_j,H\{(\tilde{h}_j^1)^+,(\tilde{h}_j^2)^+,\cdots,(\tilde{h}_j^l)^+\}\}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & x^-=\{d_j,\min_{i=1}^{m}\langle\tilde{h}_{ij}^{\lambda}\rangle\}= \\ & \{d_j,H\{(\tilde{h}_j^1)^-,(\tilde{h}_j^2)^-,\cdots,(\tilde{h}_j^l)^-\}\}. \end{aligned} \tag{6}$$

其中:$j=1,2,\cdots,n;\lambda=1,2,\cdots,l$.

Step 5: 用犹豫模糊欧几里得距离测度分别计算每一备选方案与正理想解和负理想解之间的距离. 令$D(x_i,x^+)$和$D(x_i,x^-)$分别表示方案x_i与正理想解x^+和负理想解x^-之间的距离集,即

$$\begin{aligned} & D(x_i,x^+)= \\ & \{d_E(\tilde{h}_{i1},(\tilde{h}_1)^+),d_E(\tilde{h}_{i2},(\tilde{h}_2)^+), \\ & \cdots,d_E(\tilde{h}_{in},(\tilde{h}_n)^+)\}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & D(x_i,x^-)= \\ & \{d_E(\tilde{h}_{i1},(\tilde{h}_1)^-),d_E(\tilde{h}_{i2},(\tilde{h}_2)^-), \\ & \cdots,d_E(\tilde{h}_{in},(\tilde{h}_n)^-)\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Step 6: 由前景理论中价值函数的概念和行为经济学可知,若以正理想解为参考点,则各个方案相对于正理想解是损失的;反之,若以负理想解为参考点,则各个方案是获益的,即

$$v^-(d_E(\tilde{h}_{ij},(\tilde{h}_j)^+))=-\theta(d_E(\tilde{h}_{ij},(\tilde{h}_j)^+))^{\beta}, \tag{9}$$

$$v^+(d_E(\tilde{h}_{ij},(\tilde{h}_j)^-))=(d_E(\tilde{h}_{ij},(\tilde{h}_j)^-))^{\alpha}. \tag{10}$$

Step 7: 计算每个方案x_i的收益损失比值,即

$$C_i=\frac{\left|\sum_{j=1}^{n}v^+(d_E(\tilde{h}_{ij},(\tilde{h}_j)^-))\right|}{\left|\sum_{j=1}^{n}v^-(d_E(\tilde{h}_{ij},(\tilde{h}_j)^+))\right|}. \tag{11}$$

按照$C_i(i=1,2,\cdots,m)$值的大小对方案进行排序,C_i值越大,方案越优.

3 算例分析

3.1 问题的描述

创新力是一个企业发展的核心竞争力,是企业生存和发展的必要前提, 对创新型企业进行评估具有重要的理论意义和实际价值. 现有5家创新型电脑制造企业分别表示为$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,为了选择最优的创新型电脑制造公司,某风险投资企业从创新型角度提出4个评价指标$\{d_1,d_2,d_3,d_4\}$,分别表示创新成本、创新的经济效益、创新的社会效益和创新风险. 相应的属性权重$w=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$未知,且要求满足$\sum_{j=1}^{4}w_j=1,w_j>0$. 其中,属性$d_1,d_4$为成本型;$d_2,d_3$为效益型. 决策者的指标偏好系数满足$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}=\{0.35,0.35,0.15,0.15\}$. 决策者的评价结果以犹豫模糊决策矩阵形式呈现在表1中. 其中矩阵中的元素$H\{0.3,0.5,0.6\}$表示决策组织在评价方案x_1满足属性d_1(创新成本)的程度时,评估值可能是0.3、0.5和0.6; 其他的数据具有类似的意义,因此可以用犹豫模糊数$H\{0.3,0.5,0.6\}$来表示方案x_1在属性d_1下的属性值.

表 1 犹豫模糊决策矩阵[28]

	d_1	d_2	d_3	d_4
x_1	{0.3,0.5,0.6}	{0.7}	{0.45,0.5,0.6}	{0.1,0.15,0.2}
x_2	{0.4,0.5,0.6}	{0.7,0.8,0.9}	{0.45,0.55,0.6}	{0.3,0.4}
x_3	{0.6}	{0.6,0.9}	{0.45,0.55,0.7}	{0.2,0.3,0.4}
x_4	{0.4,0.6,0.7}	{0.4,0.5,0.6}	{0.9}	{0.7,0.75,0.85}
x_5	{0.2,0.3,0.4}	{0.3,0.4,0.5}	{0.4,0.5}	{0.3,0.55,0.6}

3.2 权重的确定

根据2.2节中基于犹豫模糊熵的权重确定方法,对于属性权重 $w = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ 完全未知的犹豫模糊多属性决策问题,可以用式(1)进行计算. 设 $q = 2$[17],可得熵矩阵如表2所示.

表 2 犹豫模糊熵矩阵

	d_1	d_2	d_3	d_4
x_1	0.993 5	0.846 1	0.998 4	0.520 8
x_2	0.999 0	0.648 1	0.995 2	0.913 5
x_3	0.961 7	0.752 7	0.982 2	0.845 0
x_4	0.980 7	0.999 0	0.371 0	0.723 1
x_5	0.845 0	0.961 5	0.990 4	0.990 3

根据决策者对指标集的不同偏好给出修正数,由式(2)和(3)可确定较为准确衡量评价指标的熵权 w_j^*,即 $w^* = (0.127\,3, 0.458\,6,\ 0.164\,3, 0.249\,8)$.

3.3 方案的排序

根据2.3节中前景理论下的犹豫模糊TOPSIS排序方法,将决策问题中的成本型指标 d_1 和 d_4 转化为效益型指标,且不失一般性,假设决策者是风险规避型,通过重复增加元素较少的犹豫模糊数中最小的元素,使得所有犹豫模糊数内的元素具有相同的个数. 通过标准化和归一化后,可得归一化犹豫模糊决策矩阵 $\bar{M}$,如表3所示.

表 3 归一化犹豫模糊决策矩阵 $\bar{M}$

	d_1	d_2	d_3	d_4
x_1	{0.4,0.5,0.7}	{0.7,0.7,0.7}	{0.45,0.5,0.6}	{0.8,0.85,0.9}
x_2	{0.4,0.5,0.6}	{0.7,0.8,0.9}	{0.45,0.55,0.6}	{0.6,0.6,0.7}
x_3	{0.4 0.4,0.4}	{0.6,0.6,0.9}	{0.45,0.55,0.7}	{0.6,0.7,0.8}
x_4	{0.3,0.4,0.6}	{0.4,0.5,0.6}	{0.9,0.9,0.9}	{0.15,0.25,0.3}
x_5	{0.6,0.7,0.8}	{0.3,0.4,0.5}	{0.4,0.4,0.5}	{0.4,0.45,0.7}

将权重矩阵 $W^* = (W_1^*, W_2^*, \cdots, W_n^*)$ 右乘归一化犹豫模糊矩阵 $\bar{M}$,得到加权归一化矩阵

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} H\{0.050\,92,0.063\,65,0.089\,11\} & H\{0.321\,02,0.321\,02,0.321\,02\} & H\{0.073\,935,0.082\,15,0.098\,58\} & H\{0.199\,84,0.212\,33,0.224\,82\} \\ H\{0.050\,92,0.063\,65,0.076\,38\} & H\{0.321\,02,0.366\,88,0.412\,74\} & H\{0.073\,935,0.090\,365,0.098\,58\} & H\{0.149\,88,0.149\,88,0.174\,86\} \\ H\{0.050\,92,0.050\,92,0.050\,92\} & H\{0.275\,16,0.275\,16,0.412\,74\} & H\{0.073\,935,0.090\,365,0.115\,01\} & H\{0.149\,88,0.174\,86,0.199\,84\} \\ H\{0.038\,19,0.050\,92,0.076\,38\} & H\{0.183\,44,0.229\,3,0.275\,16\} & H\{0.147\,87,0.147\,87,0.147\,87\} & H\{0.037\,47,0.062\,45,0.074\,94\} \\ H\{0.076\,38,0.089\,11,0.101\,84\} & H\{0.137\,58,0.183\,44,0.229\,3\} & H\{0.065\,72,0.065\,72,0.082\,15\} & H\{0.099\,92,0.112\,41,0.174\,86\} \end{bmatrix}.$$

根据式(4)和(5)将得到的加权归一化犹豫模糊决策矩阵 $\tilde{M}$ 进行计算,确定正理想解和负理想解分别为

$$\begin{aligned} x^+ = \{&H\{0.076\,38, 0.089\,11, 0.101\,84\},\\ &H\{0.321\,02, 0.366\,88, 0.412\,74\},\\ &H\{0.147\,87, 0.147\,87, 0.147\,87\},\\ &H\{0.199\,84, 0.212\,33, 0.224\,82\}\};\\ x^- = \{&H\{0.038\,19, 0.050\,92, 0.050\,92\},\\ &H\{0.137\,58, 0.183\,44, 0.229\,3\},\\ &H\{0.065\,72, 0.065\,72, 0.082\,15\},\\ &H\{0.037\,47, 0.062\,45, 0.074\,94\}\}. \end{aligned}$$

由式(6)和(7)计算方案 x_i 分别到正理想解和负理想解的犹豫模糊欧几里得距离集,如表4和表5所示.

表 4 各方案到正理想解 x^+ 的距离集

	$(\tilde{h}_1)^+$	$(\tilde{h}_2)^+$	$(\tilde{h}_3)^+$	$(\tilde{h}_4)^+$
x_1	0.022 05	0.059 21	0.063 81	0
x_2	0.025 46	0	0.061 11	0.054 44
x_3	0.039 58	0.059 21	0.057 31	0.038 83
x_4	0.034 47	0.137 58	0	0.154 16
x_5	0	0.183 44	0.077 07	0.086 53

表 5 各方案到负理想解 x^- 的距离集

	$(\tilde{h}_1)^+$	$(\tilde{h}_2)^+$	$(\tilde{h}_3)^+$	$(\tilde{h}_4)^+$
x_1	0.024 38	0.142 58	0.014 23	0.154 16
x_2	0.018 00	0.183 44	0.017 75	0.100 44
x_3	0.007 35	0.142 58	0.024 18	0.116 72
x_4	0.014 70	0.045 86	0.077 06	0
x_5	0.042 86	0	0	0.073 89

由式(8)和(9)可得负前景值和正前景值分别为

$v^-(d_E(\tilde{h}_{ij}, (\tilde{h}_j)^+)) =$

$$\begin{bmatrix} -0.078\,41 & -0.187\,01 & -0.199\,75 & 0 \\ -0.088\,99 & 0 & -0.192\,29 & -0.173\,7 \\ -0.131\,21 & -0.187\,01 & -0.181\,73 & -0.129\,03 \\ -0.116\,19 & -0.392\,75 & 0 & -0.434\,1 \\ 0 & -0.505\,89 & -0.235\,84 & -0.261\,16 \end{bmatrix},$$

$$v^{+}(d_E(\tilde{h}_{ij},(\tilde{h}_j)^{-}))=$$

$$\begin{bmatrix} 0.038\,065 & 0.180\,129 & 0.023\,702 & 0.192\,932 \\ 0.029\,154 & 0.224\,841 & 0.028\,788 & 0.132\,335 \\ 0.013\,253 & 0.180\,129 & 0.037\,802 & 0.151\,041 \\ 0.024\,391 & 0.066\,384 & 0.104\,816 & 0 \\ 0.062\,541 & 0 & 0 & 0.101\,01 \end{bmatrix}.$$

其中: $\alpha=\beta=0.88,\theta=2.25$[20].

根据式(10)计算每个方案x_i的收益损失比值,如表6所示.

表6　收益损失比值

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
0.934 77	0.912 39	0.607 69	0.207 40	0.163 08

按照C_i值的大小对方案进行排序,可知第1家创新型电脑制造企业为最优方案.

3.4　比较分析

为了说明本文方法的有效性,与其他3种不同的决策方法进行比较. 这3种决策方法分为两种情况: 1) 不考虑决策者的主观风险偏好,使用文献[13]和文献[28]的方法对备选方案进行优劣排序; 2) 在决策过程中考虑决策者的主观风险偏好,使用文献[29]的方法对备选方案进行优劣排序. 将以上3种方法得到的结果与本文得到的结果进行比较,如表7所示.

表7　不同决策方法的结果比较

	本文方法	文献[13]	文献[28]	文献[29]
x_1	0.934 77	0.702 341	0.165 8	1.000 00
x_2	0.912 39	0.710 796	0.146 8	0.792 62
x_3	0.607 69	0.651 895	0.147 1	0.387 15
x_4	0.207 40	0.302 558	0.210 9	0.000 00
x_5	0.163 08	0.282 481	0.168 1	0.025 28

比较分析以上不同方法的决策结果可知: 当考虑决策者的主观风险偏好且参数取值为$\theta=1$、$\delta=0.1$时,使用文献[29]的方法计算各备选方案的综合感知价值函数值,可知第1家创新型电脑制造企业为最优方案,与本文方法在参数取值为$\alpha=\beta=0.88$、$\theta=2.25$时得到的最优方案相同. 主要原因是文献[29]的方法与本文方法一样,在决策过程中考虑了决策者的主观风险偏好. 两种方法计算结果的不同之处在于第4家创新型电脑制造企业和第5家电脑制造企业的排序,即本文方法的排序结果是第4家创新型电脑制造企业优于第5家创新型电脑制造企业,第5家创新型电脑制造企业为最劣方案; 文献[29]方法的排序结果是第5家创新型电脑制造企业优于第4家创新型电脑制造企业,第4家创新型电脑制造企业为最劣方案. 与文献[29]的方法需要决策者事先给定属性的权重信息相比,本文的方法通过熵权法客观地确定属性的权重,减少了决策者对属性信息的主观随意性.

当不考虑决策者的主观风险偏好时,使用文献[13]和文献[28]分别通过计算各备选方案的相对贴近度和各备选方案与正理想解的距离对方案进行优劣排序,得到的最优方案均为第2家创新型电脑制造企业. 而本文方法在参数取值为$\alpha=\beta=0.88$、$\theta=2.25$时得到的最优方案为第1家创新型电脑制造企业,可知在使用文献[13]和文献[28]的方法对各备选方案进行优劣排序时得到的最优方案与本文方法的最优方案不同. 主要原因在于文献[13]和文献[28]的方法是建立在假设决策者对损失和收益持有相同的风险偏好; 而本文的方法在决策过程中考虑了决策者在面临收益和损失时具有不同风险态度的心理行为特征,更符合实际决策需要.

4　结　论

本文提出了一种前景理论与TOPSIS相结合的犹豫模糊多属性决策方法. 该方法确定的熵权既表明了属性信息的客观情况又反映了决策者的主观意愿,避免了有效决策信息的丢失. 应用基于前景理论的TOPSIS法解决犹豫模糊多属性决策的排序问题,充分考虑了人们在面临收益和损失时风险偏好的差异性,使得决策结果更加符合人们的真实意图,解决了传统TOPSIS直接用欧氏距离作为尺度使得评价结果不合理的问题,从而得到更加合理的决策效果. 该方法是在犹豫模糊决策中的有益扩展,计算简单,可用于投资伙伴选择、供应商选择等实际管理问题中.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Turksen I B. Interval valued fuzzy sets based on normal forms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(2): 191-210.

[3] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[4] Atanassov K, Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[5] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[6] Xia M, Xu Z. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 395-407.

[7] Xu Z, Xia M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[8] Farhadinia B. A novel method of ranking hesitant fuzzy values for multiple attribute decision-making problems[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(8): 752-767.

[9] Wang W, Liu X. Some hesitant fuzzy geometric operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2014, 20(3): 371-390.

[10] Wei G. Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 31(1): 176-182.

[11] Chen N, Xu Z. Hesitant fuzzy ELECTRE II approach: A new way to handle multi-criteria decision making problems[J]. Information Sciences, 2015, 292(20): 175-197.

[12] Zhang X, Xu Z. Hesitant fuzzy QUALIFLEX approach with a signed distance-based comparison method for multiple criteria decision analysis[J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(2): 873-884.

[13] Xu Z, Zhang X. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(5): 53-64.

[14] 刘小弟, 朱建军, 刘思峰. 犹豫模糊信息下的双向投影决策方法[J]. 系统工程理论实践, 2014, 34(10): 2637-2644.
(Liu X D, Zhu J J, Liu S F. Bidirectional projection method with hesitant fuzzy information[J]. System Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(10): 2637-2644.)

[15] 孙晓东, 焦玥, 胡劲松. 基于灰色关联度和理想解法的决策方法研究[J]. 中国管理科学, 2005, 13(4): 63-68.
(Sun X D, Jiao Y, Hu J S. Research on decision-making method based on gray correlation degree and TOPSIS [J]. Chinese J of Management Science, 2005, 13(4): 63-68.)

[16] Xu Z, Xia M. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information[J]. Int J of Intelligent Systems, 2011, 26(5): 410-425.

[17] Xu Z, Xia M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multiattribute decision-making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822.

[18] 王雪青, 唐瑭. 基于累积前景理论的信息不完全的风险型多准则决策方法[J]. 模糊系统与数学, 2015, 29(3): 137-144.
(Wang X Q, Tang T. Multi-attribute decision making method under risk based on cumulative prospect theory with incomplete information[J]. Fuzy Systems and Mathematics, 2015, 29(3): 137-144.)

[19] 李鹏, 刘思峰, 朱建军. 基于前景理论的随机直觉模糊决策方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(11): 1601-1606.
(Li P, Liu S F, Zhu J J. Intuitionistic fuzzy stochastic multi-criteria decision-making methods based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2012, 27(11): 1601-1606.)

[20] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. J of Risk & Uncertainty, 1992, 5(4): 297-323.

[21] 高建伟, 刘慧晖, 谷云东. 基于前景理论的区间直觉模糊多准则决策方法[J]. 系统工程理论实践, 2014, 34(12): 3175-3181.
(Gao J W, Liu H H, Gu Y D. Interval-valued intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on prospect theory[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(12): 3175-3181.)

[22] 江文奇. 基于前景理论和 VIKOR 的风险型模糊多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(12): 2287-2291.
(Jiang W Q. Risky fuzzy multi-criteria decision method based on prospect theory and VIKOR[J]. Control and Decision, 2014, 29(12): 2287-2291.)

[23] 刘云志, 樊治平. 基于前景理论的具有指标期望的多指标决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(1): 91-97.
(Liu Y Z, Fan Z P. Multiple attribute decision making considering attribute aspirations: A method based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2015, 30(1): 91-97.)

[24] 王坚强, 孙腾, 陈晓红. 基于前景理论的信息不完全的模糊多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1198-1202.
(Wang J Q, Sun T, Chen X H. Multi-criteria fuzzy decision-making method based on prospect theory with incomplete information[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1198-1202.)

[25] 刘勇, Jeffrey F, 刘思峰, 等. 基于前景理论的多目标灰靶决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 345-350.
(Liu Y, Jeffrey F, Liu S F, et al. Multi-objective grey target decision-making based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 345-350.)

[26] Zhu B, Xu Z S. Hesitant fuzzy Bonferroni means for multi-criteria decision making[J]. J of the Operational Research Society, 2013, 64(12): 1831-1840.

[27] 徐玖平, 吴巍. 多属性决策的理论与方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 45-48.
(Xu J P, Wu W. Multi-attribute decision making: Theory and method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 45-48.)

[28] 张小路. 基于犹豫模糊信息的多属性决策方法研究[D]. 南京: 东南大学经济管理学院, 2015: 95-106.
(Zhang X L. Research on Multi-attribute decision making methods with hesitant fuzzy information[D]. Nanjing: School of Economics and Management, Southeast University, 2015: 95-106.)

[29] Zhang X, Xu Z. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 61(1): 48-58.

（责任编辑：孙艺红）