

基于分布式PID控制的任意阶线性多智能体系统的一致性

李浩亮[†], 杨任农, 李秋妮, 韩海艳

(空军工程大学 航空航天工程学院, 西安 710038)

摘要: 研究普通线性多智能体系统在有向拓扑结构下的一致性, 提出一种基于分布式PID控制的新的一致性协议. 先通过变量转换将一致性问题转变为误差系统的渐近稳定问题, 然后构造 Lyapunov 函数, 基于线性矩阵不等式(LMI)给出系统实现一致性的充分条件; 最后通过仿真与纯比例控制作了比较. 仿真结果表明, 系统的结构拓扑图在存在全局可达节点条件下, 通过选择合适的PID参数, 可克服噪声的干扰, 缩短系统的收敛时间.

关键词: 多智能体; 一致性; PID控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A

Consensus of multi-agent systems with general linear dynamics based on distributed PID control

LI Hao-liang[†], YANG Ren-nong, LI Qiu-ni, HAN Hai-yan

(Aeronautic and Astronautic Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: This paper investigates the consensus problem of general linear multi-agent systems under the directed topology, and proposes a novel protocol based on the distributed PID control law. Firstly, through state transformation, the consensus problem is transformed into an asymptotic stability problem of an error system, then the Lyapunov functional is constructed and the sufficient condition for consensus is given based on the linear matrix inequation(LMI). Finally, the comparisons with pure proportional control through simulation are made. The simulations results show that if the topology contains a globally reachable node, appropriate PID parameters can overcome the impact of the noise and shorten the convergence time.

Keywords: multi-agent; consensus; PID control; linear matrix inequation

0 引言

近年来, 快速发展的人工智能理论和群智能理论形成了一门新的研究领域——多智能体一致性理论. 一致性问题是多智能体协同控制的基础, 相对于单个系统而言, 多个系统协同合作产生的工作效率和性能远远高于前者的简单累加^[1]. 一致性意味着所有智能体要在某些给定的状态和输出上达到一致^[2], 而一致性协议的设计是一致性理论最重要的研究内容. 经过多年的发展, 多种一致性协议或算法已经广泛应用于多智能体的聚集^[3-5]、编队控制^[6-8]、集群控制^[9-10]和无线传感器网络^[11-12].

针对一阶智能体系统, 最常用的一致性算法是由 Olfati-Saber 等^[13-14]提出的. 研究证明, 多智能体系统需要实现一致性, 则通信拓扑至少要包含一个有向生成树. 二阶系统的一致性设计要更为复杂, 文献^[15]

提出了一种二阶一致性协议, 其中控制输入是有界的; 文献^[16]在考虑通信时延的情况下, 为固定有向拓扑的多智能体系统提出了两种一致性算法. 用普通高阶积分器来描述线性多智能体系统更具有一般性, 文献^[17]研究了存在时变通信时延和动态拓扑条件下的普通线性时变多智能系统的一致性, 通过状态转换将一致性问题转化为渐近稳定问题, 并给出了实现一致性的充分和必要条件. 除了系统的动力学特性, 多智能体的网络拓扑特性对系统一致性也具有十分重要的影响. 最简单的网络拓扑是固定无向的, 文献^[18]针对无向通信网络, 根据系统的输出信息设计了两种自适应动态一致性算法, 仿真表明如果拓扑图是连通的, 则系统可实现平均一致性. 但是, 现实情况下智能体之间的通信可能会遇到节点失效、带宽限制或者通信掉包等情况, 因此研究动态时变拓扑网络

收稿日期: 2016-03-02; 修回日期: 2016-06-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(50875132, 60573172).

作者简介: 李浩亮(1989—), 男, 博士, 从事多智能体协同控制的研究; 杨任农(1969—), 男, 教授, 博士生导师, 从事任务规划、训练效能评估等研究.

[†]通讯作者. E-mail: lihaoliang10524@163.com

的一致性更有意义. 文献[19]针对随机变化的网络拓扑, 研究的结果放宽了实现一致性的条件, 仅要求网络联合拓扑图里包含一个有向生成树, 系统即可实现一致性跟踪.

PID控制器具有算法成熟、鲁棒性强等优点, 因此也应用到了一致性算法的设计^[20-21]. 文献[22]研究了存在扰动的异构多智能体系统, 并基于PID控制提出了一种有效的一致性算法, 但是系统动力学模型是一阶积分器模型, 较为简单, 通用性不强. 基于此, 本文基于PID控制提出一种新的一致性算法, 控制的对象是任意阶的连续线性时不变多智能体系统. 本文的研究目的是检验所提出算法能否实现多智能体的一致性, 并与纯比例控制相比较, 得出PID控制在实现系统一致性中的优势.

1 预备知识

本文提出的控制系统的原理框图如图1所示, 控制器由内环和外环两部分组成, 内环是一个镇定补偿器以保证系统的稳定, 外环通过PID控制消除各智能体之间的差异, 最终实现一致性.

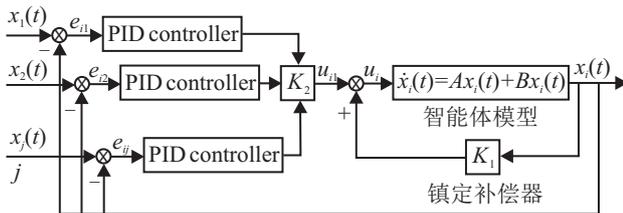


图1 分布式PID控制的原理框图

1.1 图论和数学基础

假设 $G = (V, \mathcal{E}, \mathbf{W})$ 代表一个有向加权图, $V = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示图的节点集合, $\mathcal{E} \in V \times V$ 表示图的边集合. 对于任一边 $e_{ij} = (v_i, v_j)$ 而言, v_i 代表父节点, v_j 代表子节点, 并且 v_j 是 v_i 的一个邻居节点. 如果有向图有一个节点可以到达其他任意一个节点并且没有父节点, 则这个节点叫作根节点; 如果图中至少存在一个根节点, 则称图 G 包含有向生成树. $\mathbf{W} = [w_{ij}]$ 称为图的邻接矩阵, \mathcal{L} 为图的Laplacian矩阵, $\mathcal{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$, 其中 $\mathbf{D} = \text{diag}\{\text{deg}_{in}(i), i \in N\}$, $\text{deg}_{in}(i) = \sum_{j \in N_i} w_{ij}$ 称为节点 v_i 的入度. 一般情况下, 有向图的Laplacian矩阵不是对称的.

为了统一论文符号, 规定 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 和 $\mathbf{C}^{n \times m}$ 分别代表 $n \times m$ 维实矩阵和复矩阵, \mathbf{I}_N 代表 N 维单位矩阵, $\mathbf{1}(0)$ 代表元素全为零的矢量, $\text{Re}(\lambda)$ 代表复数 λ 的实部, \otimes 代表Kronecker积.

1.2 问题描述

考虑如下一个由 N 个同构智能体构成的连续时间线性时不变系统, 每个智能体的动力学方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(t), & i = 1, 2, \dots, N. \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_i(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{q \times n}$ 为常数矩阵; $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 为每个智能体的状态变量, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{y}_i \in \mathbf{R}^p$ 分别为系统的控制输入和输出.

基于PID控制, 本文提出以下一致性算法:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) = & \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{K}_2 \sum_{j \in N_i} \omega_{ij} \left(T_P (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)) + \right. \\ & \left. T_I \int_0^t (\mathbf{x}_j(\tau) - \mathbf{x}_i(\tau)) d\tau + T_D \frac{d(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$; $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in \mathbf{R}^{p \times n}$, \mathbf{K}_1 为状态反馈矩阵, \mathbf{K}_2 为一致性增益矩阵; N_i 为节点 i 的邻接节点集合; $T_P > 0, T_I > 0, T_D > 0$ 分别为比例、积分和微分系数.

令 $\mathbf{x}(t) = [x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_N^T(t)]^T$, 则系统可以写成如下紧凑形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = & (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1) - T_P \mathcal{L} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}_2) \mathbf{x}(t) - \\ & T_I \mathcal{L} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}_2 \int_0^t \mathbf{x}(\tau) d\tau - T_D \mathcal{L} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}_2 \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

定义1 对于给定的初始条件, $\forall i, j = 1, 2, \dots, N$, 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| = 0$ 时, 称系统(3)渐近达到一致.

注1 定义1只是要求各智能体的状态之间的差值渐近到零, 但不要求每个智能体的状态收敛到零.

注2 显然, 若 \mathbf{A} 是Hurwitz的, 则各智能体的状态最终都会收敛到零, 一致性必然能够实现, 因此本文假设系统矩阵 \mathbf{A} 不是Hurwitz的.

针对提出的一致性算法(2), 本文主要讨论3个问题: 1) 系统(3)达到一致性的条件; 2) 如何设计增益矩阵 \mathbf{K}_1 和 \mathbf{K}_2 来保证系统实现一致性; 3) 如何选择合适的PID参数使系统实现一致性.

2 一致性分析

2.1 问题转换

通过变量转换将一致性问题转换为误差系统的渐近稳定问题.

对于图 G 的Laplacian矩阵, 总是存在一个非奇异矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{N \times N}$ 使得 $\mathbf{U}^{-1} \mathcal{L} \mathbf{U} = \mathbf{J}_{\mathcal{L}}$, 其中 $\mathbf{J}_{\mathcal{L}}$ 是

Laplacian矩阵的Jordan标准型,矩阵 \mathcal{L} 的特征值的实部满足 $0 = \text{Re}(\lambda_1) < \text{Re}(\lambda_2) \leq \dots \leq \text{Re}(\lambda_N)$.

将式(3)等号右侧的微分部分移到等号左边,得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_n + T_D \mathcal{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2) \dot{\mathbf{x}}(t) = \\ & (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}_1) - T_p \mathcal{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2) \mathbf{x}(t) - \\ & T_I \mathcal{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2 \int_0^t \mathbf{x}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_n + T_D \mathcal{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2, \\ \mathbf{z}_i(t) &= -T_I \mathbf{B} \mathbf{K}_2 \sum_{j=1}^N l_{ij} \int_0^t \mathbf{x}_j(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= [\mathbf{z}_1^T(t), \mathbf{z}_2^T(t), \dots, \mathbf{z}_N^T(t)]^T = \\ & -T_I (\mathcal{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2) \int_0^t \mathbf{x}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

令 $Y_1 = (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}_1) - T_p \mathcal{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2)$, 整理式(4),对式(5)求导并写成紧凑形式,可得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathcal{L}}^{-1} Y_1 \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathcal{L}}^{-1} \mathbf{z}(t), \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = -T_I (\mathcal{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2) \mathbf{x}(t), \quad (7)$$

联合式(6)和(7),系统(5)可转换为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N \otimes \mathbf{0}_n & -T_I \mathcal{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2 \\ \tilde{\mathcal{L}}^{-1} & \tilde{\mathcal{L}}^{-1} Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

PID控制中的积分调节用来消除系统余差,提高各智能体之间的无差度,因此只要有余差存在,积分调节就一直起作用,直至系统余差消失,即

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t \mathbf{e}_{ij}(\tau) d\tau \right\| &= \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t (\mathbf{x}_j(\tau) - \mathbf{x}_i(\tau)) d\tau \right\| &= 0. \end{aligned}$$

因此有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}_i(t)\| = 0, i = 1, 2, \dots, N$. 令

$$\Delta_i(t) = \mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_1(t),$$

$$\delta_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_1(t), i = 2, 3, \dots, N,$$

有

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \Delta_2(t) \\ \Delta_3(t) \\ \vdots \\ \Delta_N(t) \end{bmatrix} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_N(t) \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_2(t) \\ \delta_3(t) \\ \vdots \\ \delta_N(t) \end{bmatrix} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{bmatrix}. \quad (9b)$$

其中 $\mathbf{E} = [-\mathbf{1}_{N-1} \ \mathbf{I}_{N-1}] \in \mathbf{R}^{(N-1) \times N}$. 则 $\tilde{\Delta}(t) =$

$(\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\mathbf{z}}(t), \tilde{\delta}(t) = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\mathbf{x}}(t)$. 设 $\mathbf{F} = \mathbf{E}^{-1}$,由文献[23]可知 $\mathbf{F} = [\mathbf{0}_{N-1} \ \mathbf{I}_{N-1}]^T \in \mathbf{R}^{N \times (N-1)}$,则式(8)可转化为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(t) \\ \tilde{\delta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1} \otimes \mathbf{0}_n & -T_I \mathbf{E} \mathcal{L} \mathbf{F} \mathbf{B} \mathbf{K}_2 \\ (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathcal{L}}^{-1} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) & (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathcal{L}}^{-1} Y_1 (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

因为

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathcal{L}} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) &= \mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{I}_n + T_D \bar{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2; \\ \bar{\mathcal{L}} &= \mathcal{L}_{22} - \mathbf{1}_{N-1} \alpha^T, \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{22} = \begin{bmatrix} \text{deg}_{in}(2) & -w_{23} & \dots & -w_{2N} \\ -w_{32} & \text{deg}_{in}(3) & \dots & -w_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{N2} & -w_{N2} & \dots & \text{deg}_{in}(N) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} -w_{12} \\ \vdots \\ -w_{1N} \end{bmatrix}.$$

可得

$$\begin{aligned} ((\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathcal{L}} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n))^{-1} &= \\ (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n)^{-1} \tilde{\mathcal{L}}^{-1} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n)^{-1} &= \\ (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathcal{L}}^{-1} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n). \end{aligned} \quad (12)$$

令 $Y_2 = \mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{I}_n + T_D \bar{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2$, 式(10)可等价于

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(t) \\ \tilde{\delta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1} \otimes \mathbf{0}_n & -T_I \bar{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}_2 \\ Y_2^{-1} & Y_2^{-1} Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

因为 \mathcal{L} 的特征值是 $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_N$,可得 $\bar{\mathcal{L}}$ 的特征值为 $\lambda_2, \dots, \lambda_N$ [24]. 因此,存在非奇异矩阵 \mathbf{S} 使得

$$\mathbf{S}^{-1} \bar{\mathcal{L}} \mathbf{S} = \mathbf{J}_{\bar{\mathcal{L}}}. \quad (14)$$

令

$$\tilde{\Delta}(t) = (\mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \Delta(t), \tilde{\delta}(t) = (\mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \delta(t),$$

则有

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(t) \\ \tilde{\delta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n & \\ & \mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

令 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \otimes \mathbf{I}_n & \\ & \mathbf{S} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$,有

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n & \\ & \mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix}. \quad (16)$$

令

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1} \otimes \mathbf{0}_n & -T_I \bar{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{B}K_2 \\ Y_2^{-1} & Y_2^{-1} Y_1 \end{bmatrix},$$

有

$$[T^{-1}HT] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N \otimes \mathbf{0}_n & -T_I J_{\bar{\mathcal{L}}} \otimes \mathbf{B}K_2 \\ J_{\bar{\mathcal{L}}}^{-1} & J_{\bar{\mathcal{L}}}^{-1} Y_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

其中

$$J_{\bar{\mathcal{L}}}^{-1} = \text{diag}\{J_{\bar{\mathcal{L}}_i}^{-1}\} J_{\bar{\mathcal{L}}_i} = \mathbf{I}_n + T_D \lambda_i \mathbf{B}K_2, \\ i = 2, 3, \dots, N; \\ Y_3 = \mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}K_1) - T_p J_{\bar{\mathcal{L}}} \otimes \mathbf{B}K_2.$$

因此,微分方程组(13)通过非奇异转换为

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\Delta}}(t) \\ \dot{\tilde{\delta}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N \otimes \mathbf{0}_n & -T_I J_{\bar{\mathcal{L}}} \otimes \mathbf{B}K_2 \\ J_{\bar{\mathcal{L}}}^{-1} & J_{\bar{\mathcal{L}}}^{-1} Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(t) \\ \tilde{\delta}(t) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

通过式(13)和(18),本文将系统的一致性问題转化为系统的渐近稳定问题.为得到一致性的条件,式(18)需作进一步初等变换.

定义2 初等矩阵 $\mathbf{E}(i, j)$ 表示对调单位矩阵的第 i 行(列)和第 j 行(列),矩阵 \mathbf{A} 左乘 $\mathbf{E}(i, j)$ 相当于把 \mathbf{A} 的第 i 行和第 j 行对调,右乘 $\mathbf{E}(i, j)$ 相当于把 \mathbf{A} 的第 i 列和第 j 列对调.因此可以得到下面的引理.

引理1 假设矩阵 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}_n & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{C}_n \\ \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{D}_n & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_n \end{bmatrix}$,

$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{I}_N \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{C}_n \\ \mathbf{D}_n & \mathbf{B}_n \end{bmatrix}$,满足 $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{Q}$,并且 $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$.其中 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 是一系列初等矩阵的乘积.

令

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1} \otimes \mathbf{0}_n & -T_I J_{\bar{\mathcal{L}}} \otimes \mathbf{B}K_2 \\ J_{\bar{\mathcal{L}}}^{-1} & J_{\bar{\mathcal{L}}}^{-1} Y_3 \end{bmatrix},$$

可以得到

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\Delta}}(t) \\ \dot{\tilde{\delta}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(t) \\ \tilde{\delta}(t) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

由式(19)可得,每一个经过变换后的变量满足

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\Delta}}_i(t) = -T_I \lambda_i \mathbf{B}K_2 \tilde{\delta}_i(t), \\ \dot{\tilde{\delta}}_i(t) = J_{\bar{\mathcal{L}}_i}^{-1} \tilde{\Delta}_i(t) + J_{\bar{\mathcal{L}}_i}^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{B}K_1 - T_p \lambda_i \mathbf{B}K_2) \tilde{\delta}_i(t), \end{cases} \quad (20)$$

其中 $i = 2, 3, \dots, N$.令 $\tilde{\xi}_i(t) = [\tilde{\Delta}_i^T(t) \ \tilde{\delta}_i^T(t)]^T$, $Y_4 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}K_1 - T_p \lambda_i \mathbf{B}K_2)$,因为 $J_{\bar{\mathcal{L}}} = \text{diag}\{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N\}$,所以

$$\dot{\tilde{\xi}}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & -T_I \lambda_i \mathbf{B}K_2 \\ J_{\bar{\mathcal{L}}_i}^{-1} & J_{\bar{\mathcal{L}}_i}^{-1} Y_4 \end{bmatrix} \tilde{\xi}_i(t). \quad (21)$$

设 $\tilde{\xi}(t) = [\tilde{\xi}_2^T(t), \tilde{\xi}_3^T(t), \dots, \tilde{\xi}_N^T(t)]^T$,根据引理1,可得

$$\tilde{\xi}(t) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(t) \\ \tilde{\delta}(t) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\dot{\tilde{\xi}}(t) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\Delta}}(t) \\ \dot{\tilde{\delta}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{J} \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}(t) \\ \tilde{\delta}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1} \tilde{\xi}(t) = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{Q} \tilde{\xi}(t). \quad (23)$$

令 $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{Q}$,其中

$$\tilde{\mathbf{J}} = \text{diag}\{\tilde{\mathbf{J}}_i\}, \\ \tilde{\mathbf{J}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & -T_I \lambda_i \mathbf{B}K_2 \\ J_{\bar{\mathcal{L}}_i}^{-1} & J_{\bar{\mathcal{L}}_i}^{-1} Y_4 \end{bmatrix}, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (24)$$

则有

$$\dot{\tilde{\xi}}(t) = \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\xi}(t). \quad (25)$$

如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\xi}(t)t\| = 0$,则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\delta}(t)\| = 0$,系统实现一致.系统(25)将系统(3)的一致性问題转化为渐近稳定性问題,因此只需要求解系统(25)实现渐近稳定的条件.

2.2 一致性条件

系统(25)的系统矩阵 $\tilde{\mathbf{J}}$ 的特征值是由 $\tilde{\mathbf{J}}_i (i = 2, 3, \dots, N)$ 的特征值组成的.多智能的拓扑图是有向的,因此Laplacian矩阵的特征值可能会包含复数根.令 $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$,根据复矩阵的求逆公式,可得

$$J_{\bar{\mathcal{L}}_i}^{-1} = (\mathbf{I}_n + T_D \sigma_i \mathbf{B}K_2 + jT_D \omega_i \mathbf{B}K_2)^{-1} = (\mathbf{I}_n + T_D \sigma_i \mathbf{B}K_2 + T_D^2 \omega_i^2 \mathbf{B}K_2 (\mathbf{I}_n + T_D \sigma_i \mathbf{B}K_2)^{-1} \mathbf{B}K_2)^{-1} - jT_D \omega_i (\mathbf{I}_n + T_D \sigma_i \mathbf{B}K_2)^{-1} \mathbf{B}K_2 ((\mathbf{I}_n + T_D \sigma_i \mathbf{B}K_2) + T_D^2 \omega_i^2 \mathbf{B}K_2 (\mathbf{I}_n + T_D \sigma_i \mathbf{B}K_2)^{-1} \mathbf{B}K_2)^{-1}, \quad (26)$$

因此分块矩阵 $\tilde{\mathbf{J}}_i$ 的复数表达式为

$$\tilde{\mathbf{J}}_i = \Theta_1 + j\Theta_2. \quad (27)$$

其中

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & -T_I \sigma_i \mathbf{B}K_2 \\ Y_5 & Y_5 M_2 - T_D T_p \omega_i^2 M^{-1} \mathbf{B}K_2 Y_5 \mathbf{B}K_2 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & T_I \omega_i \mathbf{B}K_2 \\ T_D \omega_i M^{-1} \mathbf{B}K_2 Y_5 & T_p \omega_i Y_5 \mathbf{B}K_2 + T_D \omega_i M^{-1} \mathbf{B}K_2 Y_5 M_2 \end{bmatrix}.$$

其中: $Y_5 = ((\mathbf{I}_n + T_D \sigma_i \mathbf{B}K_2) + T_D^2 \omega_i^2 \mathbf{B}K_2 (\mathbf{I}_n + T_D \sigma_i \mathbf{B}K_2)^{-1} \mathbf{B}K_2)^{-1}$; $M = \mathbf{I}_n + T_D \sigma_i \mathbf{B}K_2$; $M_2 = \mathbf{A} + \mathbf{B}K_1 - T_p \sigma_i \mathbf{B}K_2$.式(27)将系统(21)的系统矩阵分解成了实部和虚部两部分,求解 $\tilde{\mathbf{J}}_i$ 的特征值相当于求解复矩阵(27)的特征值,由于复矩阵 $\mathbf{Z} =$

$A + jB$ 可以由实矩阵 $\hat{Z} = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ 表示, 求解复矩阵的特征值相当于求解 \hat{Z} 的特征值. 而系统(21)若要实现渐近稳定, 则要求系统矩阵的特征值的实部小于零. 系统(21)可以转化为

$$\dot{\hat{\xi}}_i(t) = \begin{bmatrix} \Theta_1 & -\Theta_2 \\ \Theta_2 & \Theta_1 \end{bmatrix} \hat{\xi}_i(t), \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (28)$$

其中 $\hat{\xi}_i(t) = [\text{Re}(\tilde{\xi}_i(t))^T, \text{Im}(\tilde{\xi}_i(t))^T]^T$. 判断系统(21)的稳定性等价于判断系统(28)的稳定性.

在系统(3)中, 通过设计增益矩阵 K_1 来调整每个的运动特性, 通过设计增益矩阵 K_2 来实现多智能体的状态一致性. 下面的定理给出了系统一致的条件, 并给出了确定增益矩阵 K_2 的方法.

定理1 如果系统网络拓扑图包含有生成树, 则系统(3)要获得一致, 当且仅当存在正定对称矩阵 $R \in R^{n \times n}$, 使增益矩阵 K_2 满足

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} 0 & \Xi_{i12} & 0 & \Xi_{i14} \\ * & \Xi_{i22} & \Xi_{i23} & \Xi_{i24} \\ * & * & 0 & \Xi_{i34} \\ * & * & * & \Xi_{i44} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 2, \dots, N. \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_{i12} &= Y_5^T R + R Y_5, \\ \Xi_{i14} &= -T_D \omega_i Y_5^T K_2^T B^T (M^{-1})^T R + T_I \omega_i R B K_2, \\ \Xi_{i22} &= M_2^T Y_5^T R - T_D T_p \omega_i^2 K_2^T B^T Y_5^T K_2^T B^T (M^{-1})^T R + R Y_5 M_2 - T_D T_p \omega_i^2 R M^{-1} B K_2 Y_5 B K_2, \\ \Xi_{i23} &= -T_I \omega_i K_2^T B^T R + T_D \omega_i R M^{-1} B K_2 Y_5, \\ \Xi_{i24} &= -T_p \omega_i K_2^T B^T Y_5^T R - T_D \omega_i M_2^T Y_5^T K_2^T B^T (M^{-1})^T R + T_p \omega_i R Y_5 B K_2 + T_D \omega_i R M^{-1} B K_2 Y_5 M_2, \\ \Xi_{i34} &= Y_5^T R - T_I \sigma_i R B K_2, \\ \Xi_{i44} &= M_2^T Y_5^T R - T_D T_p \omega_i^2 K_2^T B^T Y_5^T K_2^T B^T (M^{-1})^T R + R Y_5 M_2 - T_D T_p \omega_i^2 R M^{-1} B K_2 Y_5 B K_2. \end{aligned}$$

因此协议(2)可一致系统(3).

证明 对于系统(28), 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V_i(t) = \hat{\xi}_i^T(t) (I_4 \otimes R) \hat{\xi}_i(t). \quad (30)$$

若 R 是正定对称的, 则 $I_4 \otimes R$ 也是正定对称的. 沿系统(28)的解对 $V_i(t)$ 求导, 可得

$$\dot{V}_i(t) =$$

$$\begin{aligned} & \hat{\xi}_i^T(t) (I_4 \otimes R) \dot{\hat{\xi}}_i(t) + \dot{\hat{\xi}}_i^T(t) (I_4 \otimes R) \hat{\xi}_i(t) = \\ & \hat{\xi}_i^T(t) \begin{bmatrix} \Theta_1^T & \Theta_2^T \\ -\Theta_2^T & \Theta_1^T \end{bmatrix} (I_4 \otimes R) \hat{\xi}_i(t) + \\ & \hat{\xi}_i^T(t) (I_4 \otimes R) \begin{bmatrix} \Theta_1 & -\Theta_2 \\ \Theta_2 & \Theta_1 \end{bmatrix} \hat{\xi}_i(t) = \\ & \hat{\xi}_i^T(t) \left(\begin{bmatrix} \Theta_1^T & \Theta_2^T \\ \Theta_2^T & \Theta_1^T \end{bmatrix} (I_4 \otimes R) + \right. \\ & \left. (I_4 \otimes R) \begin{bmatrix} \Theta_1 & -\Theta_2 \\ \Theta_2 & \Theta_1 \end{bmatrix} \right) \hat{\xi}_i(t). \quad (31) \end{aligned}$$

若系统渐近稳定, 则 $\dot{V}_i(t) < 0$, 因此可知矩阵

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Theta_1^T & \Theta_2^T \\ -\Theta_2^T & \Theta_1^T \end{bmatrix} (I_4 \otimes R) + \\ & (I_4 \otimes R) \begin{bmatrix} \Theta_1 & -\Theta_2 \\ \Theta_2 & \Theta_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (32) \end{aligned}$$

将 Θ_1, Θ_2 代入式(32)可得式(31)成立. \square

注3 定理1中确定 K_1 时至少要求解 $N - 1$ 个线性矩阵不等式, 随着智能体数量的增加, 要求解的不等式的数量也会增大, 因此一致性条件显得较为保守.

推论1 如果系统的拓扑图不包含有向生成树, 则系统获得一致, 当且仅当 $A + BK_1$ 和 $\tilde{J}_i (i = 2, \dots, N)$ 是 Hurwitz 的.

证明 由于作用拓扑 G 不包含生成树, 而由文献[25]可知, \mathcal{L} 至少有两个零特征值. 因此矩阵 \tilde{J} 中至少包含一个对角块 $\begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ I_n & A + BK_1 \end{bmatrix}$, 这个 Jordan 块的特征值完全由 $A + BK_1$ 决定, 而且只有 $A + BK_1$ 的特征值实部小于零, 才有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\delta}_i(t)\| = 0$. \square

由定理1可以得出, 普通高阶群系统的一致性由控制协议、主体动力学特性和智能体间的作用拓扑共同决定, 同时由推论1还可知道, 如果作用拓扑不包含生成树, 则一致性问题便转变为渐近稳定问题.

2.3 PID 参数的设计

为了检验本文所提出的一致性算法, 假设系统是不稳定的, 即系统矩阵不是 Hurwitz 的. 显然, PID 参数首先要满足不等式(29); 然后根据定理1, 利用 LMI 工具箱求解出所需的增益矩阵 K_1 和 K_2 . 根据实验条件的不同, PID 参数的设计为以下两种情况:

1) 假设系统没有噪声, 系统是不稳定的, 即各智能体要在震荡中实现一致, PID 控制与纯比例控制作比较. 文献[26]提出了基于遗传算法求解 PID 参数的方法, 优化指标主要包括上升时间、控制能量和跟踪误差. 本文不要求求解出的最优调节参数兼顾一致

性收敛速度和震荡程度,而是根据经验法选择合适的PID调节参数,并在收敛速度、震荡程度、余差度等几个指标上与纯比例控制作计较。

2)假设系统存在随机噪声,系统仍然是不稳定系统.根据经验法选择合适的PID参数,并与纯比例控制作比较.观察PID控制在抑制系统的噪声并实现其在渐近一致过程中的作用。

3 计算机仿真实验

假设系统(3)包含6个多智能体,且拓扑结构如图2所示.由图2可知,该拓扑图是一个有向图,节点1为全局可达节点,可作为该有向图的根节点。

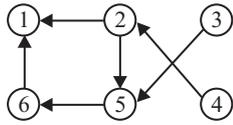


图2 多智能体拓扑结构

该图对应的邻接矩阵为

$$W = (w_{ij})_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

假设系统矩阵 $A = [0.2, 0, 0, 0; 0.5, 0.1, 0.1, -2.5; -1.5, 0, -0.4, 0; -1.0, 2.0, 0, 1.0]$, 输入矩阵 $B = [0, 1; 1, 0; 1, 0; 0, 1]$. 各智能体的初始状态分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(0) &= [15, -15, -10, -50]^T, \\ \mathbf{x}_2(0) &= [10, -10, 5, -10]^T, \\ \mathbf{x}_3(0) &= [5, -5, 1, -15]^T, \\ \mathbf{x}_4(0) &= [0, 5, -4, -3]^T, \\ \mathbf{x}_5(0) &= [-5, 10, -8, 15]^T, \\ \mathbf{x}_6(0) &= [-10, 15, -20, 20]^T. \end{aligned}$$

实验 1 首先通过极点配置使智能体的系统矩阵 $A + BK_1$ 非 Hurwitz, PID 参数设定为 $T_P = 8.8371, T_I = 0.4945, T_D = 0.4847$; 然后通过求解不等式(29)确定一个增益矩阵 K_2 , 可得到

$$K_1 = \begin{bmatrix} 4.7158 & -0.2303 & -2.9133 & -4.6176 \\ -4.2423 & -0.6593 & -1.4864 & -3.5140 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3.7227 & 3.0269 & -0.1578 & 3.0844 \\ 0.5896 & -0.8861 & 0.2478 & -0.0932 \end{bmatrix}.$$

系统(3)的仿真实验结果如图3和图4所示.可以看出,虽然各智能体的状态没有趋向于零,但最终趋于一致;同时可以看出,相对于纯比例控制, PID 控制可以迅速消除系统的余差,加快系统的一致性收敛。

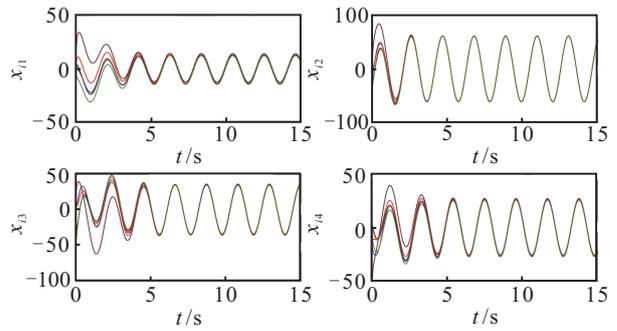


图3 纯比例控制时系统的一致性曲线

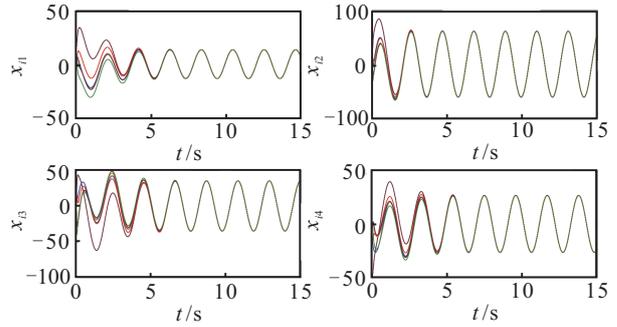


图4 PID控制时系统的一致性曲线

实验2 PID 参数选择 $T_P = 10, T_I = 1.4945, T_D = 0.4847$, 系统矩阵 K_2 经过验证, 可以保持不变, 假设系统噪声为 $\omega(t) = 10[\eta(t), \eta(t), \eta(t), \eta(t)]^T$, 其中 $\eta(t)$ 为白噪声. 仿真实验如图5和图6所示. 可以看出, 在存在随机噪声的情况下, PID 控制要明显优于纯比例控制, 能够较快地消除系统余差, 实现一致性。

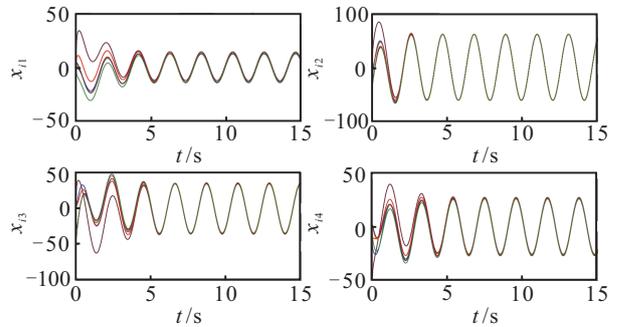


图5 带噪声时纯比例控制的系统一致性曲线

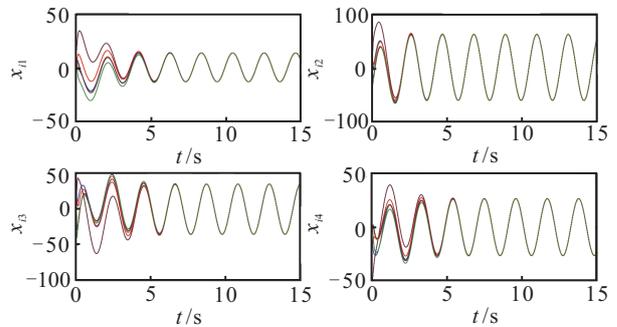


图6 带噪声时PID控制的系统一致性曲线

4 结论

本文针对任意阶线性连续时间多智能体系统, 提出了基于分布式PID控制的一致性协议. 首先通过变

量转换将一致性问题转化为系统的渐近稳定问题; 然后基于图论、矩阵论和李亚普诺夫函数, 给出了系统在有向拓扑结构且存在一个全局可达节点的条件 下实现一致性的充分条件. 仿真结果验证了所提出 协议的有效性, 表明系统的一致性与增益矩阵和PID 参数有关. 本文研究的对象具有代表性和通用性, 一 致性协议相比于类似文献更具普适性. 但随着智能 体数量的增加, 需要计算的不等式判据会增多, 而且 本文没有考虑通信时延, 需要作更深入的研究.

参考文献(References)

- [1] Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [2] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
- [3] Lin J, Morse A S, Anderson B D O. The multi-agent rendezvous problem[C]. Proc IEEE Conf Decision Control. Hawaii, 2003: 1508-1513.
- [4] Lin Z J, Hong T, Liu H. Consensus based on learning game theory with a UAV rendezvous application[J]. Chinese J of Aeronautics, 2004, 28(1): 191-199.
- [5] Park H, Hutchinson S. A distributed optimal strategy for rendezvous of multi-robots with random node failures[C]. IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems. Chicago, 2014: 1155-1160.
- [6] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [7] Liu Y F, Geng Z Y. Finite-time formation control for linear multi-agent systems: A motion planning approach[J]. Systems & Control Letters, 2015, 85(5): 54-60.
- [8] Meng D Y, Jia Y M, Du J P. High-precision formation control of nonlinear multi-agent systems with switching topologies: A learning approach[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(13): 1993-2018.
- [9] Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(3): 401-420.
- [10] Zhang H T, Cheng Z M, Chen G R. Model predictive flocking control for second-order multi-agent systems with input constraints[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I-Regular Papers, 2015, 62(6): 1599-1606.
- [11] Spanos D P, Murray R M. Distributed sensor fusion using dynamic consensus[C]. Proc IFAC World Congress. Prague, 2005: We-E04-TP/3.
- [12] Di P D, Petitti A, Rizzo A. Distributed Kalman filtering via node selection in heterogeneous sensor networks[J]. Int J of Systems Sciences, 2015, 46(14): 2572-2583.
- [13] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [14] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [15] Sun G S. Second-order consensus of multiple agents with bounded control inputs and preserved network connectivity[J]. Communications in Theoretical Physics, 2012, 57(4): 624-628.
- [16] Su H S, Zhang W. Second-order consensus of multiple agents with coupling delay[J]. Communications in Theoretical Physics, 2009, 51(1): 101-109.
- [17] Yang X G, Xi J X, Wu J Y, et al. Consensus transformation for multi-agent systems with topology variances and time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2015, 168(5): 1059-1064.
- [18] Li Z K, Ren W, Liu X D, et al. Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols[J]. Automatica, 2013, 49(4): 1986-1995.
- [19] Mu X W, Yang Z, Liu K, et al. Containment control of general multi-agent systems with directed random switching topology[J]. J of the Franklin Institute, 2015, 352(6): 4067-4080.
- [20] Carli R, D'Elia E, Zampieri S. A PI controller based on asymmetric gossip communications for clocks synchronization in wireless sensors networks[C]. Proc the 50th IEEE Conf Dec Control Eur Control Conf. Orlando, 2011: 7512-7517.
- [21] Ji L H, Liao X F, Chen X. Pinning consensus analysis of multi-agent networks with arbitrary topology[J]. Chinese Physics B, 2013, 22(9): 183-189.
- [22] Daniel A B L, Mario D B. Distributed PID control for consensus of homogeneous and heterogeneous networks[J]. IEEE Trans on Control of Network Systems, 2015, 22(2): 154-163.
- [23] Chen K R, Wang J W, Zhang Y, et al. Consensus of second-order nonlinear multi-agent systems under state-controlled switching topology[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(3): 1871-1878.
- [24] Ma C Q, Zhang J F. Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-Agent systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(5): 1263-1268.
- [25] 王忠, 席建祥, 姚志成, 等. 时变概率随机拓扑条件下高阶群系统一致性分析[J]. 控制与决策, 2014, 29(7): 1153-1159.
(Wang Z, Xi J X, Yao Z C, et al. Consensus problems of high-order swarm system over random topologies with time-varying probability[J]. Control and Decision, 2014, 29(7): 1153-1159.)
- [26] Yang C X, Hong W X, Huang L Y, et al. Fast consensus tracking of multi-agent systems with diverse communication delays and input delays[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014(3): 1-10.