

具有 $1 + N$ 节点的多重边赋权驱动响应 复杂网络复域函数投影同步

韩敏[†], 张雅美

(大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116023)

摘要: 针对复数域上具有 $1 + N$ 节点的多重边赋权驱动响应复杂网络的函数投影同步问题, 提出一种简单有效的控制方法. 首先, 构建 $1 + N$ 多重边赋权驱动响应复杂网络模型, 网络节点为复混沌系统; 然后, 定义同步尺度函数为复变量, 设计混合反馈控制器, 并构造相应的正定函数, 利用李雅普诺夫稳定性定理和线性矩阵不等式变换给出同步的充分条件. 仿真结果验证了所提出方法的有效性, 同时揭示了网络节点重边数对同步速度的影响.

关键词: 多重边赋权; 复杂网络; 复域函数投影同步

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Complex function projective synchronization in drive-response complex networks with $1 + N$ nodes and multi-links

HAN Min[†], ZHANG Ya-mei

(Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: To deal with the problem of complex function projective synchronization in drive-response dynamical networks with $1 + N$ nodes and multi-links in complex domain, an effective control scheme is proposed. Firstly, a more general drive-response complex network model is constructed by introducing $1 + N$ nodes and multi-links. Then, the synchronization scheme is defined by making the scalar function a complex variable. Hybrid feedback controllers are designed and the corresponding positive definite function is constructed. Based on the Lyapunov stability theory and the linear matrix inequality, the sufficient condition of synchronization is given. Finally, the simulation results show the effectiveness of the synchronized methods, and the remarkable influences of multi-links on the synchronization speed are also revealed.

Keywords: multi-links; complex networks; complex function projective synchronization

0 引言

复杂网络同步^[1-2]指的是, 在不同初始条件下, 各种演化的复杂网络^[3-4]的节点状态逐渐接近或以一定的关系接近. 现有的同步研究多局限于实域, 但在现实生活中, 很多真实的系统需要利用复数变量进行描述. 复域系统在物理学的众多研究分支中发挥了重要作用, 尤其是在混沌通讯研究领域, 复变量增加了所传输信息的内容, 并增强了信息的安全性^[5]. 因此, 近年来复混沌系统的特性及其同步研究引起了人们的极大关注. Mahmoud 等^[6]研究了复混沌 chen 和复混沌 Lü 系统的同步问题; Wu 等^[7]利用自适应反馈和间歇控制实现了具有复混沌系统节点的复杂网络的同步.

在现有的同步类型中, 投影同步备受关注^[8]. 通过引入尺度因子, 实现同步状态间的比例关系, 应用于保密通信中可增强信息的安全性. 在现有的复混沌系统投影同步的研究中, 研究人员大多没有考虑到尺度因子为复数的情况. 同步的网络系统只能实现模值的同步, 不能体现角度的关系. 而当尺度因子为复变函数时, 称该种同步方式为复域函数投影同步, 同步系统同时实现模值及相角关系同步, 进一步增强了信息的安全性, 实现了同步类型的扩展.

上述研究中, 主要是关于简单图的复杂网络同步, 对于多重边复杂网络同步的研究工作很少. 文献 [9] 根据网络边耦合时滞的不同, 将多重边网络拆分成多个子网络进行同步研究, 但只针对了一个网络内

收稿日期: 2016-03-24; 修回日期: 2016-09-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374154)

作者简介: 韩敏(1959—), 女, 教授, 博士生导师, 从事控制理论、神经网络预测等研究; 张雅美(1991—), 女, 硕士生, 从事复杂网络和同步控制的研究.

[†]通讯作者. E-mail: minhan@dlut.edu.cn

的节点同步问题. 时滞是影响动力学行为的重要特性, 通常由有限的信号传输和记忆效应所引起^[10]. 按照耦合时滞不同进行拆分的多重边复杂网络模型涵盖了现有的具有单一或多个耦合时滞的模型, 更具一般性. $1 + N$ 节点网络最早在文献[11]中被提出, 指的是驱动网络为一个节点, 响应网络为 N 个节点, 表示多个响应系统不仅会受到驱动系统的影响还会通过耦合相互作用. 本文建立具有 $1 + N$ 节点的多重边赋权驱动响应复杂网络模型, 在复数域上研究了该网络模型的函数投影同步问题.

注1 对于复(实)矩阵 $M, M^s = M^T + \bar{M}$.

1 网络模型与预备条件

考虑具有 $1 + N$ 个节点的多重边赋权驱动响应复杂网络模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M}(z(t))\mathbf{x}(t), \\ \dot{z}(t) = f(\mathbf{x}(t), z(t)), \\ \dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{M}(z(t))\mathbf{y}_i(t) + \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=1}^N c_l a_{ij}^l \mathbf{H}_l \mathbf{y}_j(t - \tau_l(t)) + u_i(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in C^n$ 是驱动节点的状态向量; $\mathbf{y}_i(t) = (y_{i1}(t), y_{i2}(t), \dots, y_{in}(t))^T \in C^n$ 是响应网络中第 i 个节点的状态向量; $f: R^n \rightarrow R^n$ 是一个非线性光滑函数; 驱动系统和响应网络通过变量 $z(t)$ 连接, 根据响应网络中耦合时滞的特性, 该网络可分为 m 个子网络; $c_l > 0$ 是第 l 个子网络的耦合强度, $\tau_l(t) \geq 0$ 是第 l 个子网络的时变耦合时滞; \mathbf{H}_l 是第 l 个子网络各个节点状态变量之间的内部耦合矩阵; $\mathbf{A}_l = (a_{ij}^l) \in R^{N \times N}$ 是第 l 个子网络的外部耦合矩阵, 表示该子网络的拓扑结构, 满足如下条件: 如果节点 i 和 j 存在时滞为 $\tau_l(t)$ 的耦合 ($i \neq j$), 则 $a_{ij}^l(t) > 0$, 否则 $a_{ij}^l(t) = 0$.

定义1 如果存在连续可微的复变函数 $\alpha(t)$, 使得 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \alpha(t)\mathbf{x}(t) \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, N$, 则称驱动响应网络(1)取得复数域上渐近函数投影同步. 其中: $\mathbf{e}_i(t)$ 为同步误差, $\alpha(t) = \alpha^r(t) + \alpha^i(t)j \in C$ 为尺度函数. 即等价于如下的模值同步和相角同步:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_i^r(t)\| = 0 \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_i^i(t)\| = 0, \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_{e_i} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_{y_i} - (\theta_x + \theta_\alpha)) = 0. \quad (3)$$

引理1 令 $\mathbf{H} \in C^{n \times n}$ 为 Hermite 矩阵, 则对于所有 $\mathbf{x} \in C^n, \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$ 是实数, \mathbf{H} 的所有特征值是实数.

引理2 对于任意的 $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C^n$ 和常数 $\zeta > 0$, 如果 Hermite 矩阵 $\mathbf{H} > 0$, 则 $\mathbf{X}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{X}} \leq \zeta \mathbf{X}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{X}} + \zeta^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{Y}}$.

假设1 假设存在常数 L , 满足 $M^s(z(t))$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}(M^s(z(t))) \leq L$.

注2 由于 $z(t)$ 有界, 所有混沌系统满足假设1.

假设2 假设 $\tau(t)$ 是一个可微的函数, 且满足 $0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \varepsilon < 1$.

2 控制器设计与同步分析

驱动响应网络节点状态变量之间的误差为

$$\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \alpha(t)\mathbf{x}(t), \quad (4)$$

则误差随时间的演化关系为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) &= \dot{\mathbf{y}}_i(t) - \dot{\alpha}(t)\mathbf{x}(t) - \alpha(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = \\ &= \mathbf{M}(z(t))\mathbf{e}_i(t) + \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=1}^N c_l a_{ij}^l \mathbf{H}_l \mathbf{e}_j(t - \tau_l(t)) - \dot{\alpha}(t)\mathbf{x}(t) + u_i(t). \end{aligned} \quad (5)$$

定理1 对于具有 $1 + N$ 节点的多重边赋权驱动响应复杂网络模型(1), 如果假设1和假设2成立, 则采用如下的控制器:

$$u_i(t) = \dot{\alpha}(t)\mathbf{x}(t) - d\mathbf{e}_i(t), \quad (6)$$

其中 d 为反馈控制器增益, 若满足

$$d > \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} c_l^2 \lambda_{\max}(\mathbf{T}_l) + \frac{m}{2(1-\varepsilon)}, \quad (7)$$

则该驱动响应复杂网络可实现复域函数投影同步.

证明 选取如下的 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \overline{\mathbf{e}_i(t)} + \\ &= \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_l(t)}^t \mathbf{e}_i^T(s) \overline{\mathbf{e}_i(s)} ds. \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $\mathbf{e}_i(t) = (e_{i1}(t), e_{i2}(t), \dots, e_{in}(t))^T \in C^n, \overline{\mathbf{e}_i(t)} = (\overline{e_{i1}(t)}, \overline{e_{i2}(t)}, \dots, \overline{e_{in}(t)})^T \in C^n$. 将 $V(t)$ 沿误差系统(5)求导, 代入式(5), 整理得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{M}^T(z(t)) + \overline{\mathbf{M}(z(t))\mathbf{e}_i(t)} + \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_l a_{ij}^l \mathbf{e}_j^T(t - \tau_l(t)) \mathbf{H}_l^T \overline{\mathbf{e}_i(t)} + \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_l a_{ij}^l \mathbf{e}_i^T(t) \overline{\mathbf{H}_l \mathbf{e}_j^T(t - \tau_l(t))} - \\ &= d \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \overline{\mathbf{e}_i(t)} + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \overline{\mathbf{e}_i(t)} - \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \frac{1 - \dot{\tau}_l(t)}{2(1-\varepsilon)} \mathbf{e}_i^T(t - \tau_l(t)) \overline{\mathbf{e}_i(t - \tau_l(t))}. \end{aligned} \quad (9)$$

由假设1得到

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{M}^T(z(t)) + \overline{\mathbf{M}(z(t))\mathbf{e}_i(t)} \leq \\ &= \frac{L}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \overline{\mathbf{e}_i(t)}. \end{aligned} \quad (10)$$

令 $\mathbf{P}_l = \mathbf{A}_l \otimes \mathbf{H}_l$ (\otimes 为克罗内克积), 由引理2可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_l a_{ij}^l e_j^T(t - \tau_l(t)) \overline{\mathbf{H}_l^T e_i(t)} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_l a_{ij}^l e_i^T(t) \overline{\mathbf{H}_l e_j(t - \tau_l(t))} \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} \zeta_l c_l e^T(t - \tau_l(t)) \overline{\mathbf{P}_l^T \mathbf{P}_l e(t - \tau_l(t))} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} \zeta_l^{-1} c_l e^T(t) \overline{e(t)}. \end{aligned} \quad (11)$$

又由假设2可知

$$\begin{aligned} & - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \frac{1 - \hat{\tau}_l(t)}{2(1 - \varepsilon)} e_i^T(t - \tau_l(t)) \overline{e_i(t - \tau_l(t))} \leq \\ & - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} e^T(t - \tau_l(t)) \overline{e(t - \tau_l(t))}. \end{aligned} \quad (12)$$

令 $\mathbf{T}_l = \mathbf{P}_l^T \mathbf{P}_l$, 由式(9)~(12)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & \leq \left(\frac{L}{2} - d\right) e^T(t) \overline{e(t)} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} \zeta_l^{-1} c_l e^T(t) \overline{e(t)} + \\ & \frac{m}{2(1 - \varepsilon)} e^T(t) \overline{e(t)} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} e^T(t - \tau_l(t)) \overline{e(t - \tau_l(t))} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} \zeta_l c_l \lambda_{\max}(\mathbf{T}_l) e^T(t - \tau_l(t)) \overline{e(t - \tau_l(t))}. \end{aligned} \quad (13)$$

令 $\zeta_l c_l \lambda_{\max}(\mathbf{T}_l) = 1$, 即 $\zeta_l = \frac{1}{c_l \lambda_{\max}(\mathbf{T}_l)}$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & \leq \left(\frac{L}{2} - d + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} c_l^2 \lambda_{\max}(\mathbf{T}_l) + \right. \\ & \left. \frac{m}{2(1 - \varepsilon)}\right) e^T(t) \overline{e(t)}. \end{aligned} \quad (14)$$

取

$$d > \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} c_l^2 \lambda_{\max}(\mathbf{T}_l) + \frac{m}{2(1 - \varepsilon)}, \quad (15)$$

有 $\dot{V}(t) < 0$, 得到网络同步, 且同步解局部稳定. \square

注3 由理论推导的同步条件(15)可知, 当其他条件不变时, 网络节点间的重边越多(即 m 越大), 所需的控制器增益越大. 又由文献[12]可知, 控制器增益增大, 同步速度增大, 同步时间缩短. 因此, 当控制器增益相同时, 网络节点间的重边越多, 同步速度越慢, 同步时间越长.

3 数值仿真

为了验证定理1的有效性, 在 Matlab 2013 环境下, 给出数值仿真. 考虑如下三维复 Lorenz 系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}(z)\mathbf{x}, \\ \dot{z} = -a_2 z + \frac{1}{2}(\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2). \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\mathbf{M}(z) = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_3 - z & -a_4 \end{bmatrix}$, 取参量 $a_1 = 2, a_2 = 0.8, a_3 = 60 + 0.02j, a_4 = 1 - 0.06j$. 初值为 $(1 + 2j, 3 +$

$4j, 5)$ 时, 系统出现混沌特性.

假设响应网络是含有10个节点的三重边复杂网络, 即 $N = 10, m = 3$, 网络结构如图1所示. 按照网络的拆分思想, 将复杂网络(a)按照耦合时滞的不同拆分成3个子网络(b)、(c)和(d).

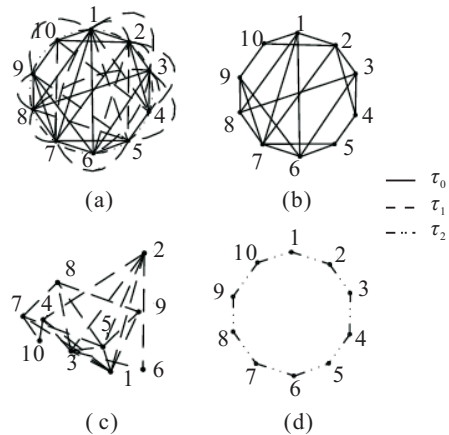


图1 网络结构及拆分示意图

依据网络的拓扑结构得到外部耦合矩阵 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ 和 \mathbf{A}_2 , 则所构建的 $1 + 10$ 节点的三重边赋权驱动响应复杂网络可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_3 - z & -a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\ \dot{z} = -a_2 z + \frac{1}{2}(\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2), \\ \dot{\mathbf{y}}_i(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_3 - z & -a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{10} c_0 a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \mathbf{y}_j(t - \tau_0(t)) + \\ \sum_{j=1}^{10} c_1 a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \mathbf{y}_j(t - \tau_1(t)) + \\ \sum_{j=1}^{10} c_2 a_{ij}^2 \mathbf{H}_2 \mathbf{y}_j(t - \tau_2(t)) + u_i(t). \end{cases} \quad (17)$$

令耦合强度 $c_0 = 0.1, c_1 = 0.3, c_2 = 0.4$; 耦合时滞 $\tau_0(t) = 0, \tau_1(t) = 0.1, \tau_2(t) = 0.3$; 内部耦合矩阵 $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1$ 和 \mathbf{H}_2 为单位阵. 控制器中的反馈增益 $d = 13$, 选择尺度函数 $\alpha(t) = 2 \sin(0.5\pi t) + j \cos(\pi t)$. 图2为复域函数投影同步实部、虚部误差曲线. 图3为复域函数投影同步相角误差曲线, 相角误差为 $\theta_{e_i} = \theta_{y_i} - (\theta_x + \theta_\alpha)$.

从图2和图3可以看出, 经过短暂调节时间后, 该复杂网络可实现所提复域函数投影同步.

根据注3, 给出网络节点间重边数与同步速度的关系验证. 定义平均误差为

$$E = \frac{\sum_{i=1}^N (|e_{i1}| + |e_{i2}|)}{N}. \quad (18)$$

此处, $N = 10$. 选择参数不变, 分别给出响应网络为三重边, 二重边和单边时的平均同步误差如图4所示. 从图4可以看出, 网络的重边数越大, 同步速度越慢, 同步时间越长, 与理论推导一致.

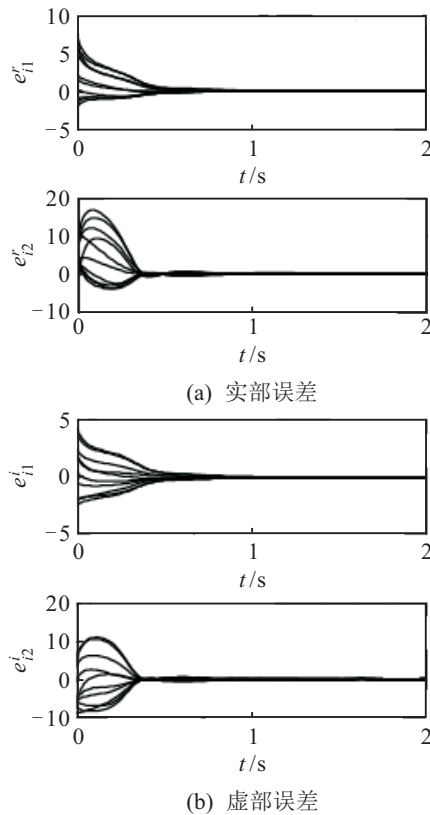


图2 复域函数投影同步模值误差曲线

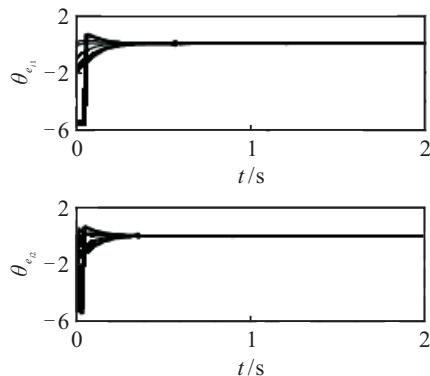


图3 复域函数投影同步相角误差曲线

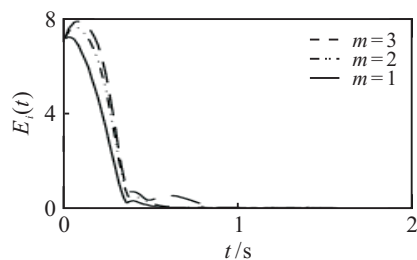


图4 平均同步误差曲线

4 结论

本文在文献[10]的基础上, 构建了具有 $1 + N$ 节点的多重边赋权驱动响应复杂网络模型, 研究了其复域上的函数投影同步问题. 通过设计合适的控制器,

利用李雅普诺夫稳定性定理和线性矩阵不等式变换, 给出了同步的充分条件. 借助于具体的网络模型, 计算机仿真的结果不但验证了理论推理的有效性, 也揭示了网络节点间的重边与同步速度的关系.

参考文献(References)

- [1] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, et al. The synchronization of chaotic systems[J]. *Physics Reports*, 2002, 366(1): 1-101.
- [2] 张丽丽, 王银河, 王钦若. 不同维数非线性节点非线性耦合复杂动态网络渐近同步[J]. *控制与决策*, 2014, 29(3): 537-540.
(Zhang L L, Wang Y H, Wang Q R. Asymptotic synchronization for nonlinear coupled complex dynamical networks with different-dimension nonlinear nodes[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(3): 537-540.)
- [3] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440-442.
- [4] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509-512.
- [5] Liu S, Zhang F. Complex function projective synchronization of complex chaotic system and its applications in secure communication[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 76(2): 1087-1097.
- [6] Mahmoud G M, Bountis T, Abdel-Latif G M, et al. Chaos synchronization of two different chaotic complex Chen and Lü systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 55(1/2): 43-53.
- [7] Wu Z, Chen G, Fu X. Synchronization of a network coupled with complex-variable chaotic systems[J]. *Chaos*, 2012, 22(2): 023127.
- [8] Feng C F. Projective synchronization between two different time-delayed chaotic systems using active control approach[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 62(1/2): 453-459.
- [9] 卞秋香, 姚洪兴. 非线性耦合多重边赋权复杂网络的同步[J]. *物理学报*, 2010, 59(5): 3027-3034.
(Bian Q X, Yao H X. Synchronization of weighted complex networks with multi-links and nonlinear coupling[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(5): 3027-3034.)
- [10] Li K, Guan S, Gong X, et al. Synchronization stability of general complex dynamical networks with time-varying delays[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(48): 7133-7139.
- [11] Jie L, Jun L, Qiang T. Projective synchronization in chaotic dynamical networks[C]. *The 1st Int Conf on Innovative Computing, Information and Control*. Beijing: IEEE, 2006: 729-732.
- [12] Wu X, Lu H. Generalized function projective(lag, anticipated and complete) synchronization between two different complex networks with nonidentical nodes[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(7): 3005-3021.

(责任编辑: 齐 霖)