

一类具有输入时滞的切换系统的正性镇定

刘 教[†], 连 捷, 庄 严

(大连理工大学控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 研究一类含有输入时滞的切换系统正性镇定问题. 通过引入增广系统, 将时滞作为一个切换参数, 原系统的正性镇定问题转化为增广系统异步切换下的控制问题. 利用对偶系统的特性, 得到增广系统在平均驻留时间切换下为正且稳定的充分条件, 进而设计控制器以保证闭环系统的正性和稳定性. 得到的充分条件可转化为标准的线性规划问题, 利用 Matlab 的 linprog 工具箱进行求解. 最后, 通过仿真示例验证了所得结果的有效性.

关键词: 切换系统; 平均驻留时间; 正性镇定

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Positive stabilization for a class of switched systems with input time-delay

LIU Jiao[†], LIAN Jie, ZHUANG Yan

(School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: This paper focuses on the positive stabilization problem for a class of switched systems with input time-delay. By introducing the augmented system and taking time-delay as a switching parameter, the positive stabilization problem is converted to the control problem of the augmented system under asynchronous switching. Taking advantage of the properties of dual systems, a sufficient condition is derived to ensure that the augmented system is both positive and stable under the average dwell time switching. Then, a controller is designed to guarantee the prescribed performance of closed-loop systems. Such sufficient condition can be transformed to the normal linear programming problem, which can be solved by using the linprog toolbox in Matlab. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the obtained results.

Keywords: switched systems; average dwell time; positive stabilization

0 引 言

切换系统是一类特殊的混杂系统, 由一组连续或离散时间子系统以及确定这些子系统之间是如何切换的一条切换规则组成. 近几十年来, 人们对切换系统的研究取得了很多成果^[1-5]. 另一方面, 在实际系统中经常遇到一些变量, 例如绝对温度、反应物浓度和生物数量等. 这些物理量的共同点是其取值都被限制为非负, 可以建模为正系统. 正系统是一类特殊的系统, 只要初始条件非负, 其任意时刻的状态变量都被限制为非负. 如果切换系统的状态被限制为非负, 则得到了切换正系统. 因为正系统中状态的非负限制, 针对一般切换系统得到的很多成果不能直接应用到切换正系统, 所以, 对切换正系统的研究是有必要的. 很多文献研究了切换正系统的稳定性分析和

控制器设计问题^[6-11].

二次型李亚普诺夫函数方法是分析一般切换系统动力学性质的重要工具, 它要求对于所有非零状态取值为正、导数为负, 所得条件可写为线性矩阵不等式形式, 利用 LMI 工具箱进行求解. 余正李亚普诺夫函数是状态的线性函数, 仅要求对于正状态取值为正、导数为负. 相对于传统的二次型李亚普诺夫函数, 余正李亚普诺夫函数可以充分利用正系统状态非负这一特点, 减少设计的保守性. 但是, 利用余正李亚普诺夫函数方法所得的稳定性条件被表示为线性不等式形式, 这类条件不像线性矩阵不等式那样可以灵活变换, 这便给切换正系统的稳定性分析和控制器设计带来一些困难. 另外, 由于闭环系统的状态需要保证为非负, 这也在一定程度上增加了研究的复杂程度.

收稿日期: 2016-04-28; 修回日期: 2016-07-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374070); 辽宁省自然科学基金项目(2015020075); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(DUT15LN04).

作者简介: 刘教(1987—), 女, 博士生, 从事切换正系统稳定性分析的研究; 连捷(1980—), 女, 教授, 博士生导师, 从事切换系统与非线性系统等研究.

[†]通讯作者. E-mail: jiaoliu@mail.dlut.edu.cn

很多关于控制器设计的文献都假设控制器的切换与子系统的切换是一致的,这一假设在实际系统中很难实现. 由于识别运行子系统和激活相应控制器不可避免地需要花费一些时间,子系统与控制器的切换不能同时发生,这便导致了异步切换现象. 文献[12]通过给出系统状态解,分析了异步切换现象,设计控制器保证闭环系统为正且稳定. 然而,文中并没有考虑输入时滞存在的情况,对含有输入时滞的切换正系统的研究仍是一个开放性的问题,这推动了本文的研究.

本文研究一类含有输入时滞的切换系统的正性镇定问题. 当存在输入时滞时,系统状态解非常复杂,甚至难以得到具体的表达形式. 本文利用余正李亚普诺夫函数方法,将状态进行增广并将时滞作为一个切换参数,把切换系统的正性镇定问题转化为增广系统在异步切换下的控制问题. 构造一种新的依赖于子系统和控制器切换信号的余正李亚普诺夫函数. 为了降低设计的保守性,允许余正李亚普诺夫函数在不匹配区间增加,得到保证增广系统在平均驻留时间切换下为正且稳定的充分条件,进而设计状态反馈控制器保证闭环系统为正且稳定. 以上结果都可以转化为线性规划问题,利用 Matlab 里的 linprog 工具箱进行求解. 最终,通过一个仿真例子验证了所得结果的有效性.

1 问题描述和预备知识

符号介绍: 矩阵 $A \succ 0$ ($\succeq 0$, $\prec 0$, $\preceq 0$) 意味着矩阵 A 的所有元素为正 (非负、负、非正), 称矩阵 A 为正 (非负、负、非正) 矩阵. 梅茨勒矩阵是非对角元素非负的矩阵.

考虑如下带有输入时滞的切换线性系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k-d); \\ u(k) &= K_{\sigma(k)}x(k); \\ x(\ell) &= \phi(\ell), \quad \ell = k_0 - d, k_0 - d + 1, \dots, k_0; \\ \sigma(\ell) &= \epsilon(\ell), \quad \ell = k_0 - d, k_0 - d + 1, \dots, k_0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量; $u(k) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入; d 为已知常时滞; $\phi(\ell) \succeq 0$ 和 $\epsilon(\ell)$ 为区间 $[-d, 0]$ 内的初值; 分段常值函数 $\sigma: \mathbf{N} \rightarrow \underline{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ 为切换信号, $M \in \mathbf{N}^+$ 为系统 (1) 中子系统的个数; $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为具有合适维数的系数矩阵, $i \in \underline{M}$. 切换序列为 $\sigma(k) : \{(k_0, \sigma(k_0)), \dots, (k_l, \sigma(k_l)), \dots, l = 0, 1, \dots\}$. 其中: k_0 为初始时刻, k_l 为第 l 次切换时刻. 因此, 可以得到控制器的切换序列为

$$\sigma(k-d) : \{(k_0 + d, \sigma(k_0)), \dots, (k_l + d, \sigma(k_l)), \dots, l = 0, 1, \dots\}.$$

不失一般性, 假设 $k_0 = 0$.

定义 1^[13] 如果对于任意初始条件 $\phi(\ell) \succeq 0$, 输入 $u(k) \succeq 0$ 和任意切换信号 $\sigma(k)$, 系统 (1) 的状态轨迹总保持在非负象限内, $x(k) \in \mathbf{R}_+^n$, $k \in \mathbf{N}$, 则系统 (1) 称为正系统.

引理 1 系统 (1) 为正系统的充分必要条件是对于所有 $i \in \underline{M}$, 有 $A_i \succeq 0$, $B_i \succeq 0$.

证明 充分性. 利用归纳法证明充分性. 假设对于所有 $i \in \underline{M}$, 有 $A_i \succeq 0$, $B_i \succeq 0$, 初始条件 $\phi(l) \succeq 0$, 输入 $u(k) \succeq 0$. 根据式 (1) 有

$$x(1) = A_{\sigma(0)}x(0) + B_{\sigma(0)}u(-d) \succeq 0.$$

因此有 $x(k) \succeq 0$, $-d \leq k \leq 1$. 假设 $x(k) \succeq 0$, $-d \leq k \leq k'$, 根据式 (1) 有

$$x(k'+1) = A_{\sigma(k')}x(k') + B_{\sigma(k')}u(k'-d) \succeq 0.$$

因此有 $x(k) \succeq 0$, $-d \leq k \leq k'+1$. 由归纳法可得 $x(k) \succeq 0$, $k \in \mathbf{N}$.

必要性. 利用反证法证明必要性. 假设 $A_i \succeq 0$ 不成立, 存在 $a_{ipq} < 0$. 令 $\phi(0) = [\phi_1(0), \dots, \phi_n(0)]^T$, 选择 $\phi_q(0) > 0$, $\phi_s(0) = 0$, $s \neq q$, $u(-d) = 0$, 有

$$\begin{aligned} x_p(1) &= \sum_{r=1}^n a_{ipr}x_r(0) + \sum_{r=1}^m b_{ipr}u_r(-d) = \\ &a_{ipq}\phi_q(0) < 0, \end{aligned}$$

这与 $x(k) \succeq 0$, $k \in \mathbf{N}$ 相矛盾, 因此 $A_i \succeq 0$. 同理, 假设 $B_i \succeq 0$ 不成立, 存在 $b_{ipq} < 0$. 令 $u(-d) = [u_1(-d), \dots, u_m(-d)]^T$, 选择 $\phi(0) = 0$, $u_q(-d) > 0$, $u_s(-d) = 0$, $s \neq q$, 有

$$\begin{aligned} x_p(1) &= \sum_{r=1}^n a_{ipr}x_r(0) + \sum_{r=1}^m b_{ipr}u_r(-d) = \\ &b_{ipq}u_q(-d) < 0, \end{aligned}$$

这与 $x(k) \succeq 0$, $k \in \mathbf{N}$ 相矛盾, 因此 $B_i \succeq 0$. \square

注 1 系统 (1) 的开环系统并没有被限制为正系统, 因此需要设计状态反馈控制器迫使闭环系统为正系统. 由引理 1 可知, 系统 (1) 为正系统的一个充分必要条件是 $A_i \succeq 0$ 且 $B_i \succeq 0$. 本文不要求系统矩阵 $B_i \succeq 0$, 仅需通过设计状态反馈控制器保证闭环系统的正性.

为了方便以后分析, 给出如下引理.

引理 2 令 A 为非负矩阵, 如果存在常数 $\varsigma > 0$ 和向量 $v \succ 0$, 满足 $(A - \varsigma I)v \prec 0$, 则存在向量 $w = (A - \varsigma I)^{-T}(A - \varsigma I)v \succ 0$ 使得 $(A - \varsigma I)^T w \prec 0$.

证明 由于 A 的非负性, $A - \varsigma I$ 是梅茨勒矩阵.

由文献[14]的引理2可得, $(A-\zeta I)v \prec 0$ 意味着 $A-\zeta I$ 是赫尔维茨矩阵. 进而利用文献[14]的引理4可以得到, 存在向量 $w = (A-\zeta I)^{-T}(A-\zeta I)v \succ 0$ 使得 $(A-\zeta I)^T w \prec 0$. \square

令 $\gamma(k) = \sigma(k-d)$ 表示控制器的切换函数, 得到相应的闭环系统为

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}K_{\gamma(k)}x(k-d). \quad (2)$$

已知输入时滞的存在可能导致系统性能变坏甚至不稳定. 对于切换正系统, 还可能造成系统状态丢失非负特性. 因此, 本文的主要目的是设计状态反馈控制器并找到可行切换信号, 使得闭环系统(2)为正且指数稳定. 在此给出平均驻留时间和指数稳定性的定义.

定义2^[1] 对于切换信号 σ 和任意两个时刻 $k_2 > k_1$, 令 $N_\sigma(k_1, k_2)$ 为区间 $[k_1, k_2)$ 内 $\sigma(k)$ 的切换次数. 如果 $N_\sigma(k_1, k_2) \leq N_0 + \frac{k_2 - k_1}{\tau_a}$ 成立, 则 $\tau_a > 0$, $N_0 > 0$ 分别称为平均驻留时间和震颤界.

定义3^[15] 在切换信号 $\sigma(k)$ 下, 如果存在常数 $c > 0$ 和 $\lambda > 1$, 对于任意初始条件 $x(\ell) \succeq 0$, 系统状态解都满足 $\|x(k)\| \leq c\lambda^{-(k-k_0)}\|\phi\|_L, k \in \mathbf{N}$, 则称系统(2)是指数稳定的. 其中: $\|\phi\|_L = \sup_{k_0-d \leq \ell \leq k_0} \|\phi(\ell)\|, c$ 为衰减系数, λ 为衰减率.

2 主要结果

研究带有输入时滞的切换系统的正性镇定问题. 为了降低时滞给讨论带来的难度, 引入增广状态向量 $z(k) = [x^T(k), x^T(k-1), \dots, x^T(k-d)]^T$. 闭环系统(2)可以写为

$$z(k+1) = (\bar{A}_{\sigma(k)} + \bar{B}_{\sigma(k)}\bar{K}_{\gamma(k)})z(k). \quad (3)$$

其中

$$\bar{A}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} B_{\sigma(k)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{K}_{\gamma(k)} = \underbrace{[0 \ \cdots \ 0]}_d K_{\gamma(k)}.$$

则带有输入时滞的切换系统(1)的正性镇定问题便转化为增广系统(3)的异步切换控制问题. 假设第 i 个子系统在切换时刻 k_{l-1} 被激活, 即 $\sigma(k_{l-1}) = i$, 第 j 个子系统在切换时刻 k_l 被激活, 即 $k_l = j$, 那么相应控制器的切换时刻分别为 $k_{l-1} + d$ 和 $k_l + d$. 因此, 系

统(3)可以写为

$$z(k+1) = \begin{cases} (\bar{A}_i + \bar{B}_i\bar{K}_i)z(k), & k \in [k_{l-1} + d, k_l); \\ (\bar{A}_j + \bar{B}_j\bar{K}_i)z(k), & k \in [k_l, k_l + d). \end{cases} \quad (4)$$

增广系统(4)为正且指数稳定的充分条件由如下定理给出.

定理1 给定常数 $0 < \alpha < 1$ 和 $\beta > 1$, 假设存在一组向量 $v_i \succ 0$, 使得对于 $\forall i, j \in \underline{M}, i \neq j$, 有

$$\bar{A}_i + \bar{B}_i\bar{K}_i \succeq 0, \quad (5)$$

$$\bar{A}_j + \bar{B}_j\bar{K}_i \succeq 0, \quad (6)$$

$$\bar{A}_i v_i + \bar{B}_i\bar{K}_i v_i - \alpha v_i \prec 0, \quad (7)$$

$$\bar{A}_j v_i + \bar{B}_j\bar{K}_i v_i - \beta v_i \prec 0 \quad (8)$$

成立, 则闭环系统(4)在满足平均驻留时间

$$\tau_a > \tau_a^* = -\frac{2 \ln \mu + d(\ln \beta + \ln \alpha)}{\ln \alpha} \quad (9)$$

的切换律下是正的且是指数稳定的.

证明 根据文献[12]的引理5, 由条件(5)和(6)可得系统(4)是正系统, 因此只需要证明系统(4)的指数稳定性. 构造如下余正李亚普诺夫函数:

$$V(k) = V_{\gamma(k)\sigma(k)}(k) = z^T(k)w_{\gamma(k)\sigma(k)}. \quad (10)$$

其中

$$w_{ii} = (\bar{A}_i + \bar{B}_i\bar{K}_i - \alpha I)^{-T}(\bar{A}_i + \bar{B}_i\bar{K}_i - \alpha I)v_i,$$

$$w_{ij} = (\bar{A}_j + \bar{B}_j\bar{K}_i - \beta I)^{-T}(\bar{A}_j + \bar{B}_j\bar{K}_i - \beta I)v_i.$$

控制器的滞后切换导致每个子系统的运行区间分为匹配区间和不匹配区间. 首先考虑匹配区间 $[k_{l-1} + d, k_l)$, 条件(7)意味着

$$(\bar{A}_i + \bar{B}_i\bar{K}_i - \alpha I)v_i = \bar{A}_i v_i + \bar{B}_i\bar{K}_i v_i - \alpha v_i \prec 0. \quad (11)$$

由于 $\bar{A}_i + \bar{B}_i\bar{K}_i \succeq 0$, 利用引理2, 式(11)意味着

$$w_{ii} \succ 0, (\bar{A}_i + \bar{B}_i\bar{K}_i)^T w_{ii} - \alpha w_{ii} \prec 0. \quad (12)$$

考虑到系统(4)状态的正性限制, 由式(12)有

$$\begin{aligned} V_{ii}(k+1) &= z^T(k+1)w_{ii} = \\ & z^T(k)(\bar{A}_i + \bar{B}_i\bar{K}_i)^T w_{ii} < \\ & \alpha z^T(k)w_{ii} = \alpha V_{ii}(k). \end{aligned} \quad (13)$$

对于任意 $k \in [k_{l-1} + d, k_l)$, 在区间 $[k_{l-1} + d, k)$ 内重复利用式(13)可得

$$V_{ii}(k) \leq \alpha^{k-(k_{l-1}+d)} V_{ii}(k_{l-1} + d). \quad (14)$$

另一方面, 考虑不匹配区间 $[k_l, k_l + d)$, $l = 1, 2, \dots$, 由于 $\bar{A}_j + \bar{B}_j\bar{K}_i \succeq 0$, 利用引理2, 条件(8)意味着

$$w_{ij} \succ 0, (\bar{A}_j + \bar{B}_j\bar{K}_i)^T w_{ij} - \beta w_{ij} \prec 0. \quad (15)$$

考虑到系统(4)的正性限制,由式(15)可得

$$\begin{aligned} V_{ij}(k+1) &= z^T(k+1)w_{ij} = \\ z^T(k)(\bar{A}_j + \bar{B}_j\bar{K}_i)^T w_{ij} &< \\ \beta z^T(k)w_{ij} &= \beta V_{ij}(k). \end{aligned} \quad (16)$$

对于任意 $k \in [k_l, k_l + d)$, 在区间 $[k_l, k)$ 内重复利用式(16)有

$$V_{ij}(k) \leq \beta^{k-k_l} V_{ij}(k_l). \quad (17)$$

下面考虑余正李亚普诺夫函数在子系统和控制器切换时刻的变化情况,令

$$\mu = \max_{i,j \in \underline{M}} \left\{ \frac{w_{iip}}{w_{ijp}}, \frac{w_{ijp}}{w_{iip}}, p \in \underline{P} \right\}, \quad (18)$$

其中 $\underline{P} = 1, 2, \dots, n(d+1)$. 容易得到

$$w_{ii} \leq \mu w_{ij}, \quad w_{ij} \leq \mu w_{ii}. \quad (19)$$

由闭环系统(4)状态 $z(k)$ 的非负性可得

$$\begin{aligned} V_{jj}(k_l + d) &\leq \mu V_{ij}(k_l + d), \\ V_{ij}(k_l) &\leq \mu V_{ii}(k_l). \end{aligned} \quad (20)$$

结合式(14)、(17)和(20),对于任意 $k \in [k_l, k_{l+1})$,有

$$\begin{aligned} V_{\gamma(k)\sigma(k)}(k) &\leq \\ \mu^{N_{\gamma}(k_l, k)} \mu^{N_{\sigma}(k_l, k)} \alpha^{T_-(k_l, k)} \beta^{T_+(k_l, k)} V_{\gamma(k_l)\sigma(k_l)}(k_l) &\leq \\ \dots &\leq \\ \mu^{N_{\gamma}(k_0, k)} \mu^{N_{\sigma}(k_0, k)} \alpha^{T_-(k_0, k)} \beta^{T_+(k_0, k)} V_{\gamma(k_0)\sigma(k_0)}(k_0). \end{aligned}$$

由于控制器的切换滞后于子系统的切换,子系统的切换次数不小于相应控制器的切换次数,即 $N_{\gamma}(k_0, k) \leq N_{\sigma}(k_0, k)$. 容易得到

$$\begin{aligned} V_{\gamma(k)\sigma(k)}(k) &\leq \\ \mu^{2N_{\sigma}(k_0, k)} \alpha^{T_-(k_0, k)} \beta^{T_+(k_0, k)} V_{\gamma(k_0)\sigma(k_0)}(k_0) &= \\ \mu^{2N_{\sigma}(k_0, k)} e^{(k-k_0)\ln \alpha + T_+(k_0, k)(\ln \beta + \ln \alpha)} V_{\gamma(k_0)\sigma(k_0)}(k_0) &= \\ \mu^{2N_{\sigma}(k_0, k)} e^{(k-k_0)\ln \alpha + d(\ln \beta + \ln \alpha)N_{\sigma}(k_0, k)} V_{\gamma(k_0)\sigma(k_0)}(k_0), \end{aligned}$$

其中 $T_+(k_0, k)$ 和 $T_-(k_0, k)$ 分别表示在时间区间 $[k_0, k)$ 内不匹配和匹配区间的总时间长度. 由

$$N_{\sigma}(k_0, k) \leq N_0 + \frac{k - k_0}{\tau_a}$$

可得

$$\begin{aligned} V_{\gamma(k)\sigma(k)}(k) &\leq \\ e^{2N_{\sigma}(k_0, k) \ln \mu + (k-k_0) \ln \alpha + d(\ln \beta + \ln \alpha)N_{\sigma}(k_0, k)} &\times \\ V_{\gamma(k_0)\sigma(k_0)}(k_0) &\leq \\ e^{[2 \ln \mu + d(\ln \beta + \ln \alpha)]N_0} &\times \\ e^{-[-\ln \alpha - \frac{2 \ln \mu + d(\ln \beta + \ln \alpha)}{\tau_a}](k-k_0)} V_{\gamma(k_0)\sigma(k_0)}(k_0). \end{aligned} \quad (21)$$

令

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \min_{(i,j,p) \in \underline{M} \times \underline{M} \times \underline{P}} \{w_{ijp}\}, \\ \varepsilon_2 &= \max_{(i,j,p) \in \underline{M} \times \underline{M} \times \underline{P}} \{w_{ijp}\}, \end{aligned}$$

结合式(10)和(21)有

$$\begin{aligned} \|z(k)\| &\leq \frac{1}{\varepsilon_1} V_{\gamma(k)\sigma(k)}(k) \leq \\ \frac{c}{\varepsilon_1} e^{-[-\ln \alpha - \frac{2 \ln \mu + d(\ln \beta + \ln \alpha)}{\tau_a}](k-k_0)} V_{\gamma(k_0)\sigma(k_0)}(k_0) &\leq \\ \frac{c\varepsilon_2}{\varepsilon_1} e^{-[-\ln \alpha - \frac{2 \ln \mu + d(\ln \beta + \ln \alpha)}{\tau_a}](k-k_0)} \|z(k_0)\|, \end{aligned}$$

其中 $c = e^{[2 \ln \mu + d(\ln \beta + \ln \alpha)]N_0}$. 根据定义3,可以得到闭环系统(4)在满足平均驻留时间(9)的切换信号下是指数稳定的. \square

注2 通常采用的二次型李亚普诺夫函数是状态的二次形式,用于处理系统的稳定性,当然也可以用来研究切换正系统的稳定性. 但在研究切换正系统时,为了充分利用其状态非负这一特性,本文采用了余正李亚普诺夫函数分析系统稳定性. 相对于二次型李亚普诺夫函数,余正李亚普诺夫函数为状态的线性形式,充分利用系统状态正性的同时减少了设计的保守性并降低了计算复杂度.

注3 在定理1的证明过程中,选择 α, β 使得 $A_i + B_i K_i + (1 - \alpha)I$ 和 $A_j + B_j K_j - (\beta - 1)I$ 是舒尔矩阵,其中 $(1 - \alpha)$ 和 $(\beta - 1)$ 分别表示子系统在匹配区间的稳定容量和不匹配区间的不稳定度. 这意味着异步切换现象可能造成子系统在不匹配区间运行状态不稳定,但是本文要求不稳定度必须有界.

注4 本文将具有输入时滞的切换系统的正性镇定问题转化为增广系统异步切换下的控制问题. 在分析异步切换时,限制条件 $(\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{K}_i)^T \omega_{ii} - \alpha \omega_{ii} < 0$ 与 $(\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{K}_j)^T \omega_{ij} - \alpha \omega_{ij} < 0$ 同时存在,导致不能求出控制器. 因此,本文利用对偶系统理论进行分析. 文中第 i 个子系统在匹配区间内 $z(k+1) = (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{K}_i)z(k)$ 和系统 $z(k+1) = (\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{K}_i)^T z(k)$ 是对偶系统,由于对偶系统与原系统稳定性一致,即 $(\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{K}_i)v_i - \alpha v_i < 0$ 等价于 $(\bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{K}_i)^T \omega_{ii} - \alpha \omega_{ii} < 0$. 同理,在不匹配区间, $(\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{K}_j)v_i - \alpha v_i < 0$ 等价于 $(\bar{A}_j + \bar{B}_j \bar{K}_j)^T \omega_{ij} - \alpha \omega_{ij} < 0$,因此可以求出控制器的解.

基于定理1,下面的定理2给出了控制器的解.

定理2 假设 $A_i \geq 0$, 给定常数 $0 < \alpha < 1, \beta > 1$ 和向量 $\tilde{v}_{i(d+1)} \in R^n$, 如果存在向量 $v_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i(d+1)}]^T > 0$ 和 s_i , 使得 $\forall i, j \in \underline{M}, i \neq j, \kappa \in \underline{d} = \{1, 2, \dots, d\}$, 有

$$(\tilde{v}_{i(d+1)}^T v_{i(d+1)}) B_i s_i \tilde{v}_{i(d+1)}^T \geq 0, \quad (22)$$

$$(\tilde{v}_{i(d+1)}^T v_{i(d+1)}) B_j s_i \tilde{v}_{i(d+1)}^T \geq 0, \quad (23)$$

$$A_i v_{i1} + B_i s_i - \alpha v_{i1} < 0, \quad (24)$$

$$v_{i\kappa} - \alpha v_{i(\kappa+1)} < 0, \tag{25}$$

$$A_j v_{i1} + B_j s_i - \beta v_{i1} < 0, \tag{26}$$

$$v_{i\kappa} - \beta v_{i(\kappa+1)} < 0 \tag{27}$$

成立, 则存在控制器

$$u(k) = K_i x(k) = \frac{1}{\tilde{v}_{i(d+1)}^T v_{i(d+1)}} s_i \tilde{v}_{i(d+1)}^T, \tag{28}$$

使得闭环系统(2)在满足平均驻留时间(9)的切换律下为正且指数稳定.

证明 证明过程可以分为正性和指数稳定性两部分. 首先证明系统(2)为正系统. 在式(22)两边同时除以 $(\tilde{v}_{i(d+1)}^T v_{i(d+1)})^2$, 可以得到

$$B_i \frac{1}{\tilde{v}_{i(d+1)}^T v_{i(d+1)}} s_i \tilde{v}_{i(d+1)}^T \geq 0. \tag{29}$$

式(29)意味着 $B_i K_i \geq 0$. 同样地, 在式(23)两边同时除以 $(\tilde{v}_{i(d+1)}^T v_{i(d+1)})^2$, 有

$$B_j \frac{1}{\tilde{v}_{i(d+1)}^T v_{i(d+1)}} s_i \tilde{v}_{i(d+1)}^T \geq 0, \tag{30}$$

这意味着 $B_j K_i \geq 0$, 因此系统(2)是正系统.

下面证明系统(2)的指数稳定性. 利用式(24)、(25)和(28), 可以得到

$$\begin{aligned} & \bar{A}_i v_i + \bar{B}_i \bar{K}_i v_i - \alpha v_i = \\ & \begin{bmatrix} A_i v_{i1} + B_i K_i v_{i(d+1)} - \alpha v_{i1} \\ v_{i1} - \alpha v_{i2} \\ v_{i2} - \alpha v_{i3} \\ \vdots \\ v_{id} - \alpha v_{i(d+1)} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} A_i v_{i1} + B_i s_i - \alpha v_{i1} \\ v_{i1} - \alpha v_{i2} \\ v_{i2} - \alpha v_{i3} \\ \vdots \\ v_{id} - \alpha v_{i(d+1)} \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

同样地, 由式(26)~(28)有

$$\bar{A}_j v_i + \bar{B}_j \bar{K}_i v_i - \beta v_i < 0.$$

通过定理1可以得到系统(2)是指数稳定的, 因此闭环系统(2)在满足平均驻留时间(9)的切换信号下是正的且是指数稳定的. \square

注5 在定理2中, 式(22)可以写为

$$\begin{cases} \tilde{v}_{i(d+1)}^T v_{i(d+1)} > 0, \\ B_i s_i \tilde{v}_{i(d+1)}^T \geq 0, \end{cases} \tag{31}$$

或

$$\begin{cases} \tilde{v}_{i(d+1)}^T v_{i(d+1)} < 0, \\ B_i s_i \tilde{v}_{i(d+1)}^T \leq 0, \end{cases} \tag{32}$$

其中向量 $\tilde{v}_{i(d+1)}$ 的选择是自由的, 为了计算方便可为任意给定值. 为了减少计算的困难, 在式(31)中选择 $\tilde{v}_{i(d+1)} \geq 0$, 这时第1个不等式自然满足. 更特殊地, 给定 $\tilde{v}_{i(d+1)} = [1, 1]^T, i \in \underline{M}$, 这种情况下, 条件变为凸条件, 优于文献[18]中的非凸条件.

注6 定理2给出的条件可以通过线性规划求出, 然而条件(22)不是标准的线性不等式形式, 即使得式(31)或(32)代替(22). 为了解决这个问题, 引入克罗内克积 \otimes 和 $\text{vec}(\cdot)$ 运算(包含给定矩阵的列, 并将所有列从左到右罗列起来). 对于任意合适维数的矩阵 M, N 和 X , 有 $\text{vec}(MXN) = [N^T \otimes M] \text{vec}(X)$. 那么式(31)中的第2个不等式可以写为

$$(\tilde{v}_{i(d+1)} \otimes B_i) s_i \geq 0.$$

3 仿真实例

考虑系统(1)包含两个子系统, 参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad d = 1.$$

在此, 选择 $\alpha = 0.8, \beta = 1.1$. 利用 `linprog` 解不等式(22)~(27), 得到控制器增益

$$\begin{aligned} K_1 &= [-0.0436 \quad -0.0726], \\ K_2 &= [-0.0392 \quad -0.0653]. \end{aligned}$$

根据式(18)可以得到 $\mu = 2.2127$. 平均驻留时间为

$$\tau_a > \tau_a^* = -\frac{2 \ln \mu + d(\ln \beta + \ln \alpha)}{\ln \alpha} = 6.5456.$$

系统的切换信号如图1所示. 其中: `ssignal` 表示子系统的切换信号, `csignal` 表示控制器的切换信号. 在图1的切换信号下, 系统(2)的状态轨迹如图2所示. 由仿真结果可见, 闭环系统(2)在满足平均驻留时间(9)的切换信号下是正的并且是指数稳定的.

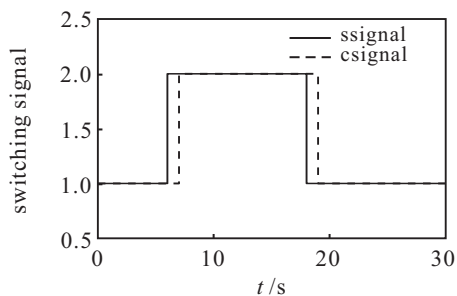


图1 系统(2)的切换信号

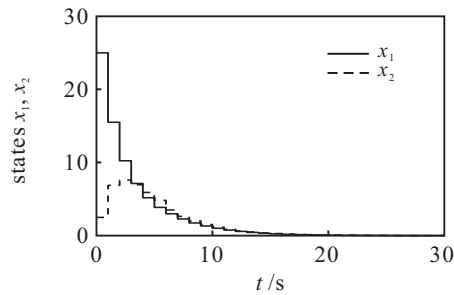


图2 系统(2)的状态轨迹

4 结论

本文研究了一类含有输入时滞的切换系统的正性镇定问题. 通过增广原系统, 将正性镇定问题转化为增广系统异步切换下的控制问题. 通过考虑匹配区间以及不匹配区间余正李亚普诺夫函数的变化, 得到了在平均驻留时间切换信号下保证闭环系统为正且指数稳定的充分条件. 最后, 通过仿真实例验证了所得结果的有效性. 当输入存在时变时滞时, 不能确定增广系统状态的维数, 本文结果不再适用. 因此, 研究具有时变时滞输入的切换系统的正性镇定问题是今后亟待开展的工作.

参考文献(References)

- [1] Hespanha J, Morse A. Stability of switched systems with average dwell-time[C]. Proc of the 38th IEEE Conf on Decision and Control. New York: Arizona, 1999: 2655-2660.
- [2] Sun X, Zhao J, Hill D. Stability and L_2 -gain analysis for switched delay systems: A delay-dependent method[J]. Automatica, 2006, 42(10): 1769-1774.
- [3] Fiacchini M, Girard A, Jungers M. On the stabilizability of discrete-time switched linear systems: novel conditions and comparisons[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2016, 61(5): 1181-1193.
- [4] Chen W, Zeng W. Delay-independent minimum dwell time for exponential stability for uncertain switched delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(10): 2406-2413.
- [5] 熊建栋, 刘永奇, 沈志萍, 等. 连续线性切换系统的镇定满切换设计[J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 797-804. (Xiong J D, Liu Y Q, Shen Z P, et al. Stabilizing slow-switching strategy for continuous-time switched linear systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 797-804.)
- [6] Liu J, Lian J, Zhuang Y. Output feedback L_1 finite-time control of switched positive delayed systems with MDADT[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2015, 15: 11-22.
- [7] Zhao X, Zhang L, Wang Z. State-feedback control of discrete-time switched positive linear systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2012, 6(18): 2829-2834.
- [8] Liu X. Stability analysis of switched positive systems: A switched linear copositive Lyapunov function method[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2009, 56(5): 414-418.
- [9] Pastrovanu O, Matcovschi M. Max-type copositive Lyapunov functions for switching positive linear systems[J]. Automatica, 2014, 50(12): 3323-3327.
- [10] Blanchini F, Colaneri P, Valcher M. Co-positive Lyapunov functions for the stabilization of positive switched systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(12): 3038-3050.
- [11] Liu J, Zhang K, Pang G, et al. Controller synthesis for constrained discrete-time switched positive linear systems[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2016, 19: 1-12.
- [12] Liu J, Wang D, Wang W, et al. Postive stabilization for switched linear systems under asynchronous switching[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(11): 2338-2354.
- [13] Farina L, Rinaldi S. Positive linear systems: theory and applications[M]. New York: Wiley-Interscience, 2000: 7-15.
- [14] Zhang J, Huang J, Zhao X. Further results on stability and stabilization of switched positive systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2015, 9(14): 2132-2139.
- [15] Liu J, Lian J, Wang M. Stability analysis for a class of switched positive systems with time delay[C]. Proc of the 32nd Chinese Control Conf. Xi'an: IEEE, 2013: 2114-2119.
- [16] Zhao X, Liu X, Yin S, et al. Improved results on stability of continuous time switched positive linear systems[J]. Automatica, 2014, 50(2): 614-621.
- [17] Liu X. Switched homogeneous copositive Lyapunov function approach to switched positive systems[C]. Proc of the 33th Chinese Control Conf. Nanjing, 2014: 3982-3987.
- [18] Xiang M, Xiang Z. Finite-time L_1 control for positive switched linear systems with time-varying delay[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(11): 3158-3166.
- [19] Linh V, Kristi A. Stability of time-delay feedback switched linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(10): 2385-2390.

(责任编辑: 郑晓蕾)