第 32卷 第 6期
2017年 6月
控 制 与 决 策
Control and Decision
Vol.32 No.6
Jun. 2017

文章编号: 1001-0920(2017)06-1041-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0425

基于广义解的网络合作博弈收益分配模型

李 翠[1,2†], 薛惠锋[1,3]

(1. 西安理工大学 经济与管理学院，西安 710048；2. 西安财经学院 信息学院，西安 710100；3. 西北工业大学 自动化学院，西安 710072)

摘 要: 网络合作博弈主要研究如何将联盟收益分配给网络合作联盟的每个参与者. 考虑到现实生活中很多联盟倾向于保留一部分合作收益用于再发展的情况, 对网络合作博弈模型进行扩展, 定义广义分配、广义核心和广义谈判集等解的概念, 并证明当满足超可加性时, 网络合作博弈的广义核心与其广义谈判集存在等价性质. 因广义谈判集非空, 进而刻画了网络合作博弈广义核心的非空性. 算例分析结果表明了广义分配方案的存在性及合理性.

关键词: 收益分配；广义 reactive 谈判集；广义核心；网络合作博弈
中图分类号: O225 **文献标志码:** A

Model of profit allocation based on generalized solution in network cooperative game

LI Cui[1,2†], *XUE Hui-feng*[1,3]

(1. School of Economics and Management，Xi'an University of Technology，Xi'an 710048，China；2. School of Information，Xi'an University of Finance and Economics，Xi'an 710100，China；3. School of Automation，Northwestern Polytechnical University，Xi'an 710072，China)

Abstract: The network cooperative game mainly studies how to distribute the coalition profit to each participant of the network coalition. Considering that many alliances tend to retain part of the profits for redevelopment in the real life, the network game is extended based on the solution definition of the generalized imputation, generalized core and generalized bargaining set, and it is proved that the generalized core of the network cooperative game is equivalent to the generalized reactive bargaining set when the super additive is satisfied. The generalized reactive bargaining set is not empty, and then the nonempty of the generalized core of the network cooperative game is described. Example analysis results show the existence and rationality of the generalized distribution scheme.

Keywords: profit allocation；generalized reactive bargaining set；generalized core；network cooperative game

0 引 言

制定科学合理的收益分配方案是联盟合作成功的关键, 不仅要从全局角度考虑资源的优化配置, 实现效益的最大化, 还要兼顾联盟内各参与者的利益.

国内外许多学者对合作博弈模型及其解集进行了深入研究[1-2], 合作博弈主要关注参与者如何构成联盟, 及联盟的总收益如何进行最优分配的问题. 合作博弈的解即为一个映射函数, 是由多个实数组成的支付向量集, 每个支付向量集表示合作联盟中的每个参与者的一种分配结果, 其中最为广泛的一种解概念, 就是 Gillies 提出的核心解[3]. 存在核心的合作联盟一定是稳定的, 因为包含在核心中的分配结果不会被其他分配结果所优超, 但有时合作联盟的核心会不存在, 而 Shapley 提出凸博弈的核心总是存在的[4]. 另一种研究及应用最为广泛的解概念是谈判集, 是 Granot 提出的一种解, 并证明了它总是存在且非空的. Aubin 等[5] 将模糊理论与经典合作博弈相结合, 建立了模糊合作博弈模型. 李翠等[6] 将模糊理论引入网络合作博弈中, 提出了模糊网络博弈模型.

前人对合作博弈所作的研究大都是在传统解的

收稿日期: 2016-04-12；**修回日期:** 2016-09-05.
基金项目: 国防基础科研计划基金项目 (A0420131501)；全国经济管理院校工业技术学研究会项目 (16GYJS016)；中国 (西安) 丝绸之路研究院科学研究项目 (2016SDZ07, 2016SY11)；陕西省教育厅科学研究计划项目 (16JK1286).
作者简介: 李翠 (1979−), 女, 讲师, 博士, 从事博弈论、知识管理等研究；薛惠锋 (1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统工程、信息化管理等研究.
†通讯作者. E-mail: bxdlicui@163.com

意义下,将合作联盟收益一次性全部分配给参与者,但为了确保合作联盟的可持续发展,应考虑不将所有合作收益全部分配完,而是保留一部分用于再发展. 鉴于这种思想,为合作收益值和每个参与者的收益分配值引入了分配系数(或称为调整系数),从而产生了各种广义解的概念. 刘小冬等[7]扩展了合作博弈解的概念,定义了广义分配及广义核心解. 在此基础上,本文将网络合作博弈模型进行拓展,通过收益分配调整系数实现对网络合作博弈收益值的部分保留,以解决联盟收益再分配问题,并对网络合作博弈广义核心解及广义谈判集解的等价关系加以证明,最后的应用数值算例对网络合作博弈广义核心解的合理有效性进行了论证分析.

1 网络合作博弈的广义解

网络合作博弈是合作博弈的子类,在n人合作博弈中,令$N = \{1, 2, \cdots, n\}$为所有参与者的集合,其中N的任意非空子集称为联盟. n人合作博弈(N, v)即为一个映射: $v : 2^N \to R$,其特征函数满足[7]:

1) $v(\varnothing) = 0$(空性);

2) $v(S \bigcup T) \geqslant v(S) + v(T)$,如果$S \bigcap T = \varnothing$(超可加性).

每一联盟通过合作所获得的收益用一实数R表示,并借助v对其进行分配. 超可加性的思想主要体现在不同联盟通过合作带来了比不合作时更多的收益. $v(S)$和$v(T)$表示联盟S和T不合作时各自获得的收益, $v(S \bigcup T)$表示联盟S和T通过合作所获得的收益.

关于参与者集合N的合作博弈的集合可记为G^N.

定义1 网络合作博弈就是一个向量对$(A; v)$,记为

$$\Gamma(\mathcal{G}^u) = (A; v). \tag{1}$$

其中: $\mathcal{G}^u = (V, A; u)$为有向网络, V为结点的集合, A为弧的集合, u_a表示通过弧a从单位流中所获得的实际收益, $a \in A$,有向网络$\mathcal{G}^u$的单源点及汇点分别用S和T表示, $S, T \in V$.

1) 有向网络$\mathcal{G}^u$如果满足每条弧拥有一个单位的流容量,且网络博弈中所有联盟的参与者共同拥有每条弧,则称$\mathcal{G}^u$为简单网络. 如果u_a表示从单位流中所获得的实际收益,则其值为正;如果u_a代表流的成本,则其值可能为负.

2) 网络$\mathcal{G}^u$的子网,可用A的子集$S \subseteq A$进行刻画,记为$\mathcal{G}^u_S$,即子网络通过S中的弧所组成的集合加以表示,其中$v(S)$为关于目标值向量$(u_a; a \in S)$的最大值,代表从S到T最优流的最优收益.

网络合作博弈模型的热点问题在于,如果网络$\mathcal{G}^u$的每条弧由联盟中所有参与者所拥有,则将如何分配所有参与者通过最优流所获得的收益.

令R^N代表实值向量x的空间, $x = (x_i)_{i \in N}$, $R^N_+ = \{x \in R^N; x_i \geqslant 0, \forall i \in N\}$, $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$, $x(\varnothing) = 0$, $x_{|S} = (x_i)_{i \in S}$.

定义2 现令r和$c_i (1 \leqslant i \leqslant n)$为实数,满足$0 < r \leqslant 1$, $0 < c_i \leqslant 1$,并且$r \geqslant \max\{c_i : i \in N\} \geqslant \max\{c_i : i \in S\}, \forall S \subseteq N$. 合作博弈的一个广义收益分配向量$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,满足

$$\sum_{i \in N} x_i = x(N) = rv(N),\ r \geqslant \max\{c_i : i \in N\}, \tag{2}$$

$$x_i \geqslant c_i v(\{i\}),\ i \in N. \tag{3}$$

其中:式(2)说明结合实际情况,通过调整系数r可实现保留博弈总收益值的一部分用于再分配或再发展,而不是毫无保留地一次性全部分配给所有参与者;式(3)表明每个参与者通过参与联盟合作所获得的收益不会少于其不加入联盟时所获得的收益. 此外, $r \geqslant \max\{c_i : i \in N\}$为式(2)和(3)保持一致的必要条件.

令$I^*(v, r, c) = \{x \in R^N | x(N) = rv(N)\}$为有效向量集,称作广义预分配向量集,实现对博弈$(N, v)$总值$v(N)$的部分保留,进而用于再分配. 令$I(v, r, c) = \{x \in I^*(v, r, c) | x_i \geqslant c_i v(i), i = 1, 2, \cdots, n\}$为博弈$v$的广义分配向量集.

定义3 令$C(v, r, c)$为博弈v的广义核心,记为

$$C(v, r, c) = \{x \in I(v, r, c) | x(S) \geqslant \max\{c_i : i \in S\} \cdot v(S), \forall S \subseteq N\}.$$

也就是说,在合作博弈(N, v)中,向量x为(N, v)的广义核心,当且仅当S满足$\forall S \subseteq N$, $r = \max\limits_{i \in N} c_i \geqslant \max\limits_{i \in S} c_i$时,有

$$\sum_{i \in N} x_i = rv(N), \tag{4}$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geqslant \max_{i \in S} c_i \cdot v(S). \tag{5}$$

如果博弈v具有广义核心,则称v为均衡的. 如果博弈所有的子博弈均有广义核心,则该博弈称为完全均衡的.

Granot等[8]提出了reactive谈判集定义, reactive谈判集存在且非空[9-11],在此基础上,本文将此定义扩展为广义reactive谈判集,广义reactive谈判集也是存在且非空的.

定义4 令$x \in I^*(v, r, c) \setminus C(v, r, c)$为任意网络博弈$v$广义核心之外的预分配向量,定义联盟$S$关于

x的广义超量为

$$e(S,x,c)=\max_{i\in S}c_i\cdot v(S)-x(S),\ \forall S\subseteq N. \quad (6)$$

令$T\subseteq N$为最大广义超量的最大联盟,即

$$e(T,x,c)=\max_{i\in T}c_i\cdot v(T)-x(T)\geqslant$$
$$\max_{i\in S}c_i\cdot v(S)-x(S)=e(S,x,c), \quad (7)$$
$$\forall S\subseteq N \text{ 且 } e(T,x,c)>e(S,x,c),\forall\, T\subset S.$$

利用此最大联盟构造关于x的广义异议,进而证明关于网络合作博弈的广义核心与广义谈判集相等.

定义5 网络合作博弈中,令x为博弈的广义分配向量,则二元偶(Q,y)表示参与者i针对参与者j关于广义分配向量x的广义异议,其中Q为包含i而不包含j的联盟. 令$k,l\in N,k\neq l$,记

$$\Gamma_{kl}(N)=\Gamma_{kl}=\{S\subseteq N\setminus\{l\}|k\in S\},$$

Γ_{kl}为包含k而不包含l的联盟的集合. 所以,$Q\in\Gamma_{ij}$,并且R^Q中的参与者收益分配向量$y\in R^Q$满足

$$y_k>x_k,\ \forall k\in Q, \quad (8)$$

$$y(Q)=\max_{i\in Q}c_i\cdot v(Q). \quad (9)$$

令(Q,y)为参与者i针对参与者j关于x的广义异议,则二元偶(M,z)为广义异议(Q,y)的广义反异议,当且仅当$M\in\Gamma_{ji},z\in R^M$使得

$$z_k\geqslant y_k,\forall\, k\in M\bigcap T, \quad (10)$$

$$z_k\geqslant x_k,\forall\, k\in M\setminus T, \quad (11)$$

$$z(M)=\max_{i\in M}c_i\cdot v(M). \quad (12)$$

联盟的广义reactive谈判集由以下集合$M^r(v,c)$给定:

$$M^r(v,c)=$$
$$\{x\in I(v)|\text{针对参与者的有序二元偶}(k,l),$$
$$\text{参与者}k\text{针对参与者}l\text{没有广义异议}\}. \quad (13)$$

广义reactive谈判集的主要思想体现为,反对方在被反对方宣布其抵制联盟前,允许保持广义异议的特性,以便能够对竞争对手作出反应,即提出合理的广义异议. 显然,如果参与者i能够证实参与者j为保持其当前的广义分配x_j,而不组织任何包含自身而不包含i的合作联盟,则针对广义分配x,参与者i对参与者j存在一个合理的广义异议. 相反,若参与者j为保持其当前的广义分配,则至少能组织一个包含自身但不包含i的联盟,该联盟可称为参与者j的保护联盟,参与者i不管怎样形成联盟Q,且对获得的收益进行分配,则关于广义分配向量x,参与者i针对参与者j便没有合理的广义异议.

若取$c_i=1,\ 1\leqslant i\leqslant n$,$r=1$时的广义分配为通常意义下的分配,广义核心为通常意义下的核心,则广义reactive谈判集也成为通常意义下的reactive谈判集.

命题1 令f为$\mathcal{G}^u$中任一最优流,$x\in R_+^A$满足$\sum_{j\in A}x_j=rv(A),0<r\leqslant 1$,当且仅当$\mathcal{G}^{u-x}$中最优流$f$的最优值为零,$x\in C(\Gamma(\mathcal{G}^u),r,c)$.

证明 现对目标函数f展开变换,关于新目标的函数值为

$$f(u-x)=$$
$$\sum_{j\in A}(u_j-x_j)=\sum_{j\in A}u_j-\sum_{j\in A}x_j=rv(A)-\sum_{j\in A}x_j.$$

假设$x\in C(\Gamma(\mathcal{G}^u),r,c)$,由条件$x_j\geqslant 0$,$f$为最优流,得$\sum_{j\in A}x_j=rv(A)$.

如果关于网络$\mathcal{G}^{u-x}$的流f值为零,则f在这个网络中为最优的,当且仅当每一个联盟$S,S\subseteq A$,满足$\sum_{j\in S}(u_j-x_j)\leqslant 0$,即

$$\sum_{j\in S}x_j\geqslant\sum_{j\in S}u_j\geqslant\max_{j\in S}c_j\cdot v(S),\ \forall\, S\subseteq A. \qquad \square$$

由命题1可知,当且仅当$x\in C(\Gamma(\mathcal{G}^u),r,c)$时,满足最后一个条件.

现有简单网络博弈$\Gamma(\mathcal{G}^{u-x})$,其特征函数用$v^*$表示,则有如下引理.

引理1 对于$x\in R_+^A$,令$\mathcal{G}^{u-x}$为$\mathcal{G}^u$中用$u-x$代替u而得到的简单网络合作博弈,则针对$\forall T\subseteq A$,有

$$\max_{S\subseteq T}\{\max_{j\in S}c_j\cdot v(S)-x(S)\}=v^*(T). \quad (14)$$

证明 为推导等式(14),可证明以下两个不等式成立,即

$$\max_{S\subseteq T}\{\max_{j\in S}c_j\cdot v(S)-x(S)\}\leqslant v^*(T),$$
$$v^*(T)\leqslant\max_{S\subseteq T}\{\max_{j\in S}c_j\cdot v(S)-x(S)\}.$$

现令$S=R$,可推导不等式$\max_{S\subseteq T}\{\max_{j\in S}c_j\cdot v(S)-x(S)\}\leqslant v^*(T)$成立,因为$x\geqslant 0$,在网络$\mathcal{G}^u$中的每条弧,都拥有单位流容量,由$R$所有弧形成的子网中,其最优流均拥有单位容量,所以

$$\max_{S\subseteq T}\{\max_{j\in S}c_j\cdot v(S)-x(S)\}=$$
$$\max_{j\in R}c_j\cdot v(R)-x(R)=(u-x)(R)=$$
$$rv^*(T)\leqslant v^*(T).$$

下面证明另一个不等式. 令f为$\mathcal{G}^{u-x}$中的最优流,R为拥有f单位流的弧所组成的联盟,有

$$v^*(t)=u(R)-x(R)\leqslant$$

$$\max_{j\in R} c_j\cdot v(R)-x(R)\leqslant$$
$$\max_{S\subseteq T}\{\max_{j\in S} c_j\cdot v(S)-x(S)\}.$$

因此

$$\max_{S\subseteq T}\{\max_{j\in S} c_j\cdot v(S)-x(S)\}=v^*(T).\qquad\Box$$

对于简单网络合作博弈,有如下定理.

定理1 对于任意简单网络合作博弈$\Gamma(\mathcal{G}^u)$,其广义reactive谈判集$M^r(\Gamma(\mathcal{G}^u),c)$与广义核心$C(\Gamma(\mathcal{G}^u),r,c)$相等.

证明 因为$C(\Gamma(\mathcal{G}^u),r,c)\subseteq M^r(\Gamma(\mathcal{G}^u_{\mathcal{F}}),c)$,只需证明$M^r(\Gamma(\mathcal{G}^u),c)\subseteq C(\Gamma(\mathcal{G}^u),r,c)$.

现用反证法,假设存在$x\in M^r(\Gamma(\mathcal{G}^u),c)$满足$x\notin C(\Gamma(\mathcal{G}^u),r,c)$,则由命题1可知,$v^*(A)>0$,由引理1可知

$$v^*(A)=\max_{S\subseteq A}\{\max_{j\in S} c_j\cdot v(s)-x(S)\}>0.$$

令$w\in C(\Gamma(\mathcal{G}^{u-x}),r,c)$,因为$v^*(A)>0$,存在弧$i\in A$满足$w_i>0$,结合$w\in C(\Gamma(\mathcal{G}^{u-x}),r,c)$及$0\leqslant r\leqslant 1$,有

$$rv^*(A)=w(A)=\sum_{i\in A}w_i=\sum_{j\in A\backslash\{i\}}w_j+w_i\geqslant$$
$$\sum_{j\in S,\ S\subseteq A\backslash\{i\}}w_j+w_i=r\cdot v^*(A\backslash\{i\})+w_i>$$
$$rv^*(A\backslash\{i\}),$$

即

$$v^*(e^A)>v^*(e^{A\backslash\{i\}}).\tag{15}$$

在网络合作博弈$\Gamma(\mathcal{G}^u,r,c)$中,$i$被包含在每一个$S$中,有

$$e(S,x,c)=\max_{j\in S} c_j\cdot v(S)-x(S)=v^*(A).$$

实际上,如果$i\notin S$,则由引理1和式(15)可知

$$e(S,x,c)\leqslant\max_{R\subseteq A\backslash\{i\}} e(R,x,c)=$$
$$\max_{R\subseteq A\backslash\{i\}}\{\max_{j\in R} c_j\cdot v(R)-x(R)\}=$$
$$v^*(A\backslash\{i\})<v^*(A).$$

现令s^*为最大联盟,有

$$e(S^*,x,c)=\max_{j\in S^*} c_j\cdot v(S^*)-x(S^*)=v^*(A).$$

显然,$i\in S^*$,同时由于$rv(A)-x(A)=0,S^*\neq A$,令$j\in(A\backslash S^*)$,则在网络合作博弈$\Gamma(\mathcal{G}^u)$中,关于广义分配x,参与者i通过联盟S^*针对参与者j存在一个广义异议,由于$x\in M^r(\Gamma(\mathcal{G}^u),c)$,参与者$j$应组织一个包含自身但不包含参与者$i$的联盟$Q$,即$j\in Q,i\notin Q$,这样,对于任一参与者$i$反对$j$的广义异议$(S^*,y)$,在$Q$上都存在一分配向量$z$,满足式(10)$\sim$(12).

现证明$S^*\bigcap Q\neq\varnothing$,实际上,如果$S^*\bigcap Q=\varnothing$,则

$$e(S^*\bigcup Q,x,c)=$$
$$\max_{j\in S^*\cup Q} c_j\cdot v(S^*\bigcup Q)-x(S^*\bigcup Q)\geqslant$$
$$\max_{j\in S^*\bigcup Q} c_j\cdot(v(S^*)+v(Q))-x(S^*)-x(Q)\geqslant$$
$$\max_{j\in S^*} c_j\cdot v(S^*)-x(S^*)+\max_{j\in Q} c_j\cdot v(Q)-x(Q)=$$
$$e(S^*,x,c)+e(Q,x,c)\geqslant e(S^*,x,c),$$

因为$x\notin C(\Gamma(\mathcal{G}^u),r,c)$,$e(Q,x,c)=\max\limits_{j\in Q} c_j\cdot v(Q)-x(Q)\geqslant 0$,这与$S^*$为最大联盟矛盾,因此

$$S^*\bigcap Q\neq\varnothing,\ e(S^*,x,c)>e(Q,x,c)\geqslant 0,\tag{16}$$

其中严格大于不等式可从$i\notin Q$中得出.

令$q_1=|S^*\bigcap Q|$,现构造广义分配向量y,其中

$$y_k=\begin{cases}x_k+\dfrac{1}{q_1}(e(S^*,x,c)-\varepsilon),\ k\in S^*\bigcap Q;\\[2mm] x_k+\dfrac{1}{q_1}\varepsilon,\ k\in S^*\backslash Q.\end{cases}$$

注意到

$$\sum_{j\in S^*}y_j=$$
$$\sum_{j\in S^*\cap Q}x_j+\frac{|S^*\bigcap Q|}{q_1}e(S^*,x,c)-$$
$$\frac{|S^*\bigcap Q|}{q_1}\varepsilon+\sum_{j\in S^*\backslash Q}x_j+\frac{|S^*\backslash Q|}{q_2}\varepsilon=$$
$$\sum_{j\in S^*}x_j+e(S^*,x,c)=$$
$$\sum_{j\in S^*}x_j+\max_{j\in S^*} c_j\cdot v(S^*)-x(S^*)=$$
$$\sum_{j\in S^*}x_j+\max_{j\in S^*} c_j\cdot v(S^*)-\sum_{j\in S^*}x_j=$$
$$\max_{j\in S^*} c_j\cdot v(S^*).$$

显然,(S^*,y)为i反对j的广义异议.现因Q为j反对i的联盟,在Q上存在一分配向量z,又结合式(8)、(9)、(16)及$e(Q,x,c)$的定义,有式(10) $\sim$ (12)成立,因此

$$z(Q)=z(S^*\bigcap Q)+z(Q\backslash S^*)\geqslant$$
$$y(S^*\bigcap Q)+x(Q\backslash S^*)=$$
$$x(S^*\bigcap Q)+e(S^*,x,c)-\varepsilon+x(Q\backslash S^*)=$$
$$x(Q)+e(S^*,x,c)-\varepsilon>$$
$$x(Q)+e(Q,x,c)=$$
$$x(Q)+\max_{j\in Q} c_j\cdot v(Q)-x(Q)=$$

$$\max_{j\in Q} c_j \cdot v(Q).$$

此结论与 (Q,z) 为广义反异议的条件 (12) 相矛盾,反证成立,可得出结论:广义核心之外的广义分配不在广义reactive谈判集内,即网络合作博弈的广义核心与广义reactive谈判集相等. □

2 算例分析

伴随国际经济形势及市场竞争环境的日益严峻,任何企业均不是孤立存在的,其联盟及竞争方式也发生了根本性变化,企业为了提高自身的综合竞争力,与其他企业形成知识联盟[12-15]. 每个企业单独行动时必定需要投入大量资源,甚至不能获取收益,而多家企业进行合作带来的总收益将比单独行动时带来的收益大得多,可为企业可持续发展提供资源条件.

现有3家企业进行合作,其合作关系图可抽象为有向网络 $\mathcal{G}^u$,各合作伙伴利用自身资源组建知识联盟进行优化整合的过程,即视为网络合作博弈 $\Gamma(\mathcal{G}^u)$ 的形成过程,各家企业及联盟利益分配问题即为网络合作博弈模型求解过程. 令3家企业合作而形成企业知识联盟的网络合作博弈 $\Gamma(\mathcal{G}^u)$ 的参与者集合为 $\{A,B,C\}$,每家企业单独行动、2家或3家企业共同合作时获得收益的特征函数值如下所示:

1) 企业 A,B,C 单独完成时可获得收益0百万元,即 $v(\{A\})=v(\{B\})=v(\{C\})=0$.

2) 企业 A,B,C 两两合作时可获得收益75百万元,即 $v(\{A,B\})=v(\{A,C\})=v(\{B,C\})=75$.

3) 企业 A,B,C 共同合作时可获得收益100百万元,即 $v(\{A,B,C\})=100$.

由以上的基本情况可知,企业A,B,C组成任意联盟获得的收益都不会小于每个企业单独行动时带来的收益,验证计算如表1所示.

表1 各企业及任意联盟获得收益的比较

企业 A	企业 B	企业 C
$v(\{A\})+v(\{B\})=0<$ $v(\{A,B\})=75$	$v(\{B\})+v(\{A\})=0<$ $v(\{B,A\})=75$	$v(\{C\})+v(\{A\})=0<$ $v(\{C,A\})=75$
$v(\{A\})+v(\{C\})=0<$ $v(\{A,C\})=75$	$v(\{B\})+v(\{C\})=0<$ $v(\{B,C\})=75$	$v(\{C\})+v(\{B\})=0<$ $v(\{C,B\})=75$
$v(\{A\})+v(\{B,C\})=75<$ $v(\{A,B,C\})=100$	$v(\{B\})+v(\{A,C\})=75<$ $v(\{B,A,C\})=100$	$v(\{C\})+v(\{A,B\})=75<$ $v(\{C,A,B\})=100$

表1表明该博弈是非负超可加的. 假设成员企业 i 的收益分配为 $x_i, i\in\{A,B,C\}$. 将所得的收益全部分配给成员企业时,其核心分配是空集. 因为核心中的分配 (x_A,x_B,x_C) 必须满足: 1) $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$; 2) $\sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S), S\subseteq N$. 即

$$x_A\geqslant 0, x_B\geqslant 0, x_C\geqslant 0,$$
$$x_A+x_B+x_C=100,$$
$$x_A+x_B\geqslant v(\{A,B\})=75,$$
$$x_A+x_C\geqslant v(\{A,C\})=75,$$
$$x_B+x_C\geqslant v(\{B,C\})=75.$$

然而,由后3个不等式得

$$x_A+x_B+x_C\geqslant 112.5>100,$$

这与 $x_A+x_B+x_C=100$ 相矛盾,所以核心是空集,找不到最优分配方案.

若将所得的总收益不全分配给成员企业时,则可根据每个企业在提供资源过程中的贡献率及服务情况进行权衡,保留部分收益. 也就是说,可以找到向量 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,其中 $0<c_i\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$, $r=\max\{c_i: i\in N\}$,使得广义核心 $c(v,r,c)$ 非空,即满足 $\sum_{i\in N} x_i = rv(N)$; $\sum_{i\in S} x_i \geqslant \max_{i\in S} c_i\cdot v(S), S\subseteq N$.

例如,确定的分配系数分别为 $c_A=0.6, c_B=0.3, c_C=0.3$,其中 c_i 表示企业 i 的分配系数, $r=\max\{c_i: i\in N\}=0.6$,各广义联盟收益 $=\max\{c_i: i\in S\}\times$ 联盟收益, $S\subseteq N$,保留 $(1-r)v(N)=0.4\times 100=40$ 的总收益不进行分配,用于再发展. 假设现有网络合作博弈广义分配 $x_A=30, x_B=15, x_C=15$,由广义核心的定义及定理1可知,其广义分配是包含在广义核心中的,即广义核心解存在且不为空,分配结果计算过程如下:

$$x_A\geqslant 0, x_B\geqslant 0, x_C\geqslant 0,$$
$$x_A+x_B+x_C=60,$$
$$x_A+x_B=30+15=45\geqslant$$
$$\max_{i\in\{A,B\}} c_i\cdot v(\{A,B\})=0.6\times 75=45,$$
$$x_A+x_C=30+15=45\geqslant$$
$$\max_{i\in\{A,C\}} c_i\cdot v(\{A,C\})=0.6\times 75=45,$$
$$x_B+x_C=15+15=30>$$

$$\max_{i\in\{B,C\}} c_i \cdot v(\{B,C\}) = 0.3 \times 75 = 22.5.$$

研究表明:3家企业形成的知识联盟网络合作博弈的广义核心分配非空,即存在用于企业知识联盟再发展的最优分配方案,为企业知识联盟可持续发展提供可能. 当然,根据网络合作博弈广义核心的非空性及其广义谈判集与广义核心的等价性,可任选广义核心或广义谈判集模型,解决企业知识联盟的利益分配问题.

3 结 论

网络合作博弈的解主要研究将联盟收益全部分配给联盟所有参与者,为了满足现实中存在的再发展或再分配的广泛需求,可以不将总收益一次性全部分配完,而是保留一部分. 本文在网络合作博弈模型的基础上,对广义分配、广义核心和广义reactive谈判集解进行刻画,并证明了网络合作博弈的广义核心等于广义reactive谈判集,表明了广义核心非空,即存在最优分配或再分配方案,最后给出了应用算例加以验证. 探索其他广义解扩展模型,需要更多研究者的共同努力.

参考文献(References)

[1] Liu J, liu X. Existence of edgeworth and competitive equilibria and fuzzy cores in coalition production economies[J]. Int J of Game Theory, 2014, 43(4): 1-16.

[2] Malkawi G, Ahmad N, Ibrahim H. Solving fully fuzzy linear system with the necessary and sufficient condition to have a positive solution[J]. Applied Mathematics & Information Sciences, 2014, 8(3): 1003-1019.

[3] Gillies D B. Some theorems on n-person games[M]. Princeton: Princeton University Press, 1953: 307-317.

[4] Shapley L S. Cores of convex games[J]. Int J of Game Theory, 1971, 1(1): 11-26.

[5] Aubin J P. Cooperative fuzzy games[J]. Mathematics of Operations Research, 1981, 1(6): 1-13.

[6] 李翠, 薛昱. 基于谈判集的模糊合作博弈的收益分配方案[J]. 控制与决策, 2014, 29(11): 2101-2107.
(Li C, Xue Y. Scheme of profit allocation based on fuzzy cooperative game in bargaining set[J]. Control and Decision, 2014, 29(11): 2101-2107.)

[7] 刘小冬, 刘九强, 胡健. 具有受限支付的合作博弈研究[J].应用数学学报, 2012, 35(5): 845-854.
(Liu X D, Liu J Q, Hu J. On cooperative games with restricted payoffs[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2012, 35(5): 845-854.)

[8] Granot D, Granot F, Zhu W O. The reactive bargaining set of some flow games and of superadditive simple games[J]. Int J of Game Theory, 1997, 26(2): 207-214.

[9] Liu J, Zhang H. Coincidence of the Mas-Colell bargaining set and the set of competitive equilibria in a continuum coalition production economy[J]. Int J of Games Theory, 2016, 45(4): 1095-1109.

[10] Izquierdo J M, Rafels C, Izquierdo J M, et al. On the coincidence of the core and the bargaining sets[J]. Economics Bulletin, 2012, 32(3): 2035-2043.

[11] Yang W, Liu J, Liu X. Aubin cores and bargaining sets for convex cooperative fuzzy games[J]. Int J of Games Theory, 2011, 40(3): 467-479.

[12] 孙新波, 刘博. 基于结构方程模型的知识联盟激励协同序参量关系研究[J]. 管理学报, 2012, 9(12): 1826-1831.
(Sun X B, Liu B. A study on the relation of knowledge alliance incentive synergy order parameter based on the structure dquation[J]. Chinese J of Management, 2012, 9(12): 1826-1831.)

[13] 刘二亮, 纪艳彬. 不完全信息下知识联盟内知识共享博弈研究[J]. 西南交通大学学报: 社会科学版, 2011, 12(6): 83-88.
(Liu E L, Ji Y B. Research on knowledge sharing game among knowledge alliance members based on the condition of incomplete information[J]. J of Southwest Jiaotong University: Social Science Edition, 2011, 12(6): 83-88.)

[14] 杨哲. 基于讨价还价理论的企业集团中的利益分配[J]. 管理工程学报, 2015, 29(4): 140-145.
(Yang Z. Benefit distribution of industrial group based on the bargaing theory[J]. J of Industrial Engineering/Engineering Management, 2015, 29(4): 140-145.)

[15] 关菲, 张强, 栗军. 基于λ-最大相容类的粗糙规划模型及其在企业战略联盟形成决策问题中的应用[J]. 运筹与管理, 2015, 24(2): 229-236.
(Guan F, Zhang Q, Li J. A λ-maximal compatible classes-based rough programming model and its application to coalition formation decision making problems of enterprise strategic alliance[J]. Operations Research and Management Science, 2015, 24(2): 229-236.)

(责任编辑：孙艺红)