

# 解一类弱间断最优控制问题的一个自适应拟谱方法

秦 廷 华<sup>†</sup>

(重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074)

**摘 要:** 针对弱间断最优控制问题, 提出一种自适应拟谱方法. 利用一些点序列分割时间区间为若干子区间; 控制和状态函数使用分段连续多项式逼近; 以数值解的收敛性为基础, 证明分割时间区间的点序列可以收敛到弱间断点; 依据柯西收敛原理, 弱间断点位置可以由前述点序列的变化来估计, 据此设计误差指示量以调整子区间和逼近多项式次数. 在数值算例中, 通过与两种拟谱方法比较, 所提出方法在精度和效率上都有更好的表现.

**关键词:** 最优控制问题; 自适应拟谱方法; 弱间断解; 非线性规划

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## An adaptive pseudospectral method for solving a class of weakly discontinuous optimal control problems

QIN Ting-hua<sup>†</sup>

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

**Abstract:** Aiming to the weakly discontinuous optimal control problems, an adaptive pseudospectral method is proposed. Some point sequences divide the time interval into several subintervals. The control and state functions are considered as piecewise continuous polynomials. On the foundation of the convergence of numerical solutions, it is proved that the point sequences dividing the time interval can converge to the weakly discontinuous points. According to the Cauchy convergence principle, the positions of the weakly discontinuous points can be estimated by the changes of the foregoing point sequences, and therefore an error indicator is designed to adjust the subintervals and the degrees of the approximating polynomials. Several examples are given to compare the proposed method with two pseudospectral methods, and the results show that the accuracy and effectiveness of the proposed method outperform those of the other two methods.

**Keywords:** optimal control problem; adaptive pseudospectral method; weakly discontinuous solution; nonlinear programming

## 0 引 言

在科学与工程各领域内存在大量的最优控制问题, 由于解析解通常难以找到, 直接法和间接法这两大类处理该问题的数值方法得到了很大发展<sup>[1-2]</sup>. 间接法基于 Pontryagin 极小值原理推导最优控制的一阶最优必要条件, 最优控制问题被转化为两点边值问题求解. 直接法将最优控制问题离散为非线性规划问题, 然后用非线性规划算法求解. 已有大量文献<sup>[3-7]</sup>介绍过这两种方法各自的优缺点和相关应用背景.

拟谱方法是直接法的一种, 相关最新的综述是文献<sup>[8-9]</sup>. 该方法对光滑问题具有指数收敛率<sup>[3]</sup>, 这是一个显著优点. Chebyshev 拟谱方法<sup>[10-11]</sup>是各种拟谱

方法<sup>[12]</sup>中常用的一种, 本文方法在数值实验中将与通常的 Chebyshev 拟谱方法比较精度和效率.

注意到不光滑点特别是间断点对拟谱方法收敛率有不利影响<sup>[13]</sup>, 许多学者致力于开发各种自适应方法来捕捉不光滑点以改善逼近效果. 作为不光滑点的一种, 弱间断点<sup>[14]</sup>也不利于拟谱方法的快速收敛. 近年来, 文献<sup>[15-17]</sup>研究了弱间断最优控制问题. 文献<sup>[15]</sup>利用人工观察已有数值解来寻找弱间断点; 文献<sup>[16]</sup>利用相邻配置点的数值解导数值之差来判断弱间断点位置; 文献<sup>[17]</sup>证明了离散问题的可行性和收敛性.

文献<sup>[16-17]</sup>讨论的是一般的弱间断问题, 而本文致力于捕捉触碰到约束界限的弱间断点. 这类特

收稿日期: 2016-04-21; 修回日期: 2016-07-13.

基金项目: 重庆交通大学校内科学基金课题(15JDKJC-A010).

作者简介: 秦廷华(1982-), 男, 讲师, 博士, 从事最优控制、数值计算等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: qintinghua@126.com

殊的弱间断点在各领域的最优控制问题中大量出现,原因是状态和控制存在各种约束,例如:机械臂<sup>[18]</sup>和化学反应<sup>[4]</sup>存在控制的上下界约束。

本文针对弱间断最优控制问题,提出一种自适应拟谱方法.其主要思想是:利用数值解对最优解具有的收敛性,找一个数列收敛到约束界限,在数值解等于数列各元素时求根,从这些根中可以找到一个数列收敛到这类弱间断点.文中证明了数列的收敛性,据此只需构造误差指示量来度量根数列的收敛情况,这种误差指示量具有简洁、便于计算的优点。

## 1 最优控制问题及其离散

### 1.1 问题描述

本文主要研究Bolza型最优控制问题(问题B).首先引入若干记号.令 $M_x, M_u, M_e$ 和 $M_h$ 是正整数, $a$ 和 $b$ 是实数且 $a < b$ .问题B的形式如下:

$$\begin{aligned} \min J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = & \\ & E(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)) + \int_a^b F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt; \quad (1) \\ \text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = & \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (2) \\ & \mathbf{e}(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)) = \mathbf{0}_e, \quad (3) \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{0}_h. \quad (4) \end{aligned}$$

其中: $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_{M_x}(t))^T$ 和 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_{M_u}(t))^T$ 分别是 $M_x$ 个状态函数和 $M_u$ 个控制函数组成的列向量, $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{u}$ 都是未知的; $\dot{\mathbf{x}}$ 表示 $\mathbf{x}$ 关于其自变量 $t$ 的导数; $\mathbf{0}_e = (0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^{M_e}$ ,  $\mathbf{0}_h = (0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^{M_h}$ ;已知函数 $F: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_u} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $E: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_x} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_u} \rightarrow \mathbf{R}^{M_x}$ ,  $\mathbf{e}: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_x} \rightarrow \mathbf{R}^{M_e}$ 和 $\mathbf{h}: \mathbf{R}^{M_x} \times \mathbf{R}^{M_u} \rightarrow \mathbf{R}^{M_h}$ ,像文献[19]那样假设它们关于变元 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{u}$ 连续可微;式(4)中的不等号表示左端向量中的每个元素小于等于右端向量中的相应元素。

本文中假设问题B存在唯一的最优解,由于考虑的是弱间断问题,还假设 $\dot{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{u}$ 在 $[a, b]$ 上连续。

### 1.2 问题离散

把区间 $I = (a, b)$ 分割为 $K$ 个子区间 $I_k = (t_{k-1}, t_k)$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$ ,  $\bar{I} = \bigcup_{k=1}^K \bar{I}_k$ .令 $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_K)$ 是正整数组成的向量, $\mathcal{P}_{M_k}(\bar{I}_k)$ 是闭区间 $\bar{I}_k$ 上不超过 $M_k$ 次多项式组成的空间, $k = 1, 2, \dots, K$ ,令 $C(\bar{I})$ 表示 $\bar{I}$ 上连续函数构成的空间.定义如下分段多项式空间:

$V_M^K = \{y \in C(\bar{I}) : y|_{\bar{I}_k} \in \mathcal{P}_{M_k}(\bar{I}_k), k = 1, 2, \dots, K\}$ .在每个闭区间 $\bar{I}_k = [t_{k-1}, t_k]$ 内,离散问题用 $M_k + 1$ 个Chebyshev-Gauss-Lobatto(CGL)点<sup>[10-11]</sup>作为配置

点,记为 $\{t_0^{M_k}, \dots, t_{M_k}^{M_k}\}$ .对于任意整数 $n \geq 1$ 和 $n$ 维列向量 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ , $\|\mathbf{v}\|_\infty$ 表示最大模。

类似于拟谱方法离散最优控制问题,可以把问题B(1)~(4)离散为一个非线性规划问题,即如下形式的离散问题 $B^M(\delta)$ :

$$\begin{aligned} \min J^M(\mathbf{x}^M, \mathbf{u}^M) = & \\ & E(\mathbf{x}^M(t_0^{M_1}), \mathbf{x}^M(t_{M_K}^{M_K})) + \sum_{k=1}^K \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \times \\ & \sum_{n=0}^{M_k} F(\mathbf{x}^M(t_n^{M_k}), \mathbf{u}^M(t_n^{M_k}))\omega_n^{M_k}. \quad (5) \\ \text{s.t. } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^M(t_n^{M_k}), \mathbf{u}^M(t_n^{M_k})) - \dot{\mathbf{x}}^M(t_n^{M_k})\|_\infty \leq & \delta, \\ n = 1, 2, \dots, M_k - 1, k = 1, 2, \dots, K; \quad (6) \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^M(t_{k-1}), \mathbf{u}^M(t_{k-1})) - \dot{\mathbf{x}}^M(t_{k-1}^+)\|_\infty \leq & \delta, \\ k = 1, 2, \dots, K; \quad (7) \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^M(t_k), \mathbf{u}^M(t_k)) - \dot{\mathbf{x}}^M(t_k^-)\|_\infty \leq & \delta; \\ k = 1, 2, \dots, K; \quad (8) \\ \|e(\mathbf{x}^M(t_0^{M_1}), \mathbf{x}^M(t_{M_K}^{M_K}))\|_\infty \leq & \delta; \quad (9) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}^M(t_n^{M_k}), \mathbf{u}^M(t_n^{M_k})) \leq \delta \cdot \mathbf{1}_h; \\ n = 0, 1, \dots, M_k, k = 1, 2, \dots, K. \quad (10) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^M(t) &= (x_1^M(t), \dots, x_{M_x}^M(t))^T; \\ \mathbf{u}^M(t) &= (u_1^M(t), \dots, u_{M_u}^M(t))^T; \\ x_i^M(t) &\in V_M^K, i = 1, 2, \dots, M_x; \\ u_j^M(t) &\in V_M^K, j = 1, 2, \dots, M_u. \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{x}}^M(t_k^-)$ 和 $\dot{\mathbf{x}}^M(t_{k-1}^+)$ 为相应导函数的左右极限, $\mathbf{1}_h = (1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^{M_h}$ , $\delta > 0$ 是为使离散问题 $B^M(\delta)$ 具有可行性而加入的参数,文献[17]的定理5.3.1有该参数表达式. $\{\omega_0^{M_k}, \dots, \omega_{M_k}^{M_k}\}$ 是Clenshaw-Curtis求积公式<sup>[20-21]</sup>积分权,用于在 $\bar{I}_k = [t_{k-1}, t_k]$ 积分。

因为弱间断问题要求 $\dot{\mathbf{x}}$ 在 $\bar{I}$ 连续,由空间 $V_M^K$ 的定义知, $\mathbf{x}^M$ 在各个内分点 $\{t_1, \dots, t_{K-1}\}$ 上导数可能不存在,所以问题 $B^M(\delta)$ 中用式(7)和(8)对 $\mathbf{x}^M$ 在内分点上的左右导数进行了约束。

## 2 理论结果

离散问题 $B^M(\delta)$ 的可行性参见文献[17]的定理5.3.1及其证明,收敛性参见本文定理1或文献[17]的定理5.4.1及其证明.下文的假设1是文献[17]的假设5.4.1,离散问题 $B^M(\delta)$ 的收敛性需要该假设,它与假设2和定理2构成本文算法的理论基础。

为了论述方便,引入一些记号. $C[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上连续函数构成的空间,对于 $\forall f(t) \in C[a, b]$ ,令

$\|f(t)\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ ,  $N$  表示自然数集.

**假设1** 对于  $\forall j \in N$ , 存在向量  $\mathbf{M}_j = (M_{1,j}, \dots, M_{K,j})$  满足  $M_{k,j} \in N$  和  $\lim_{j \rightarrow \infty} M_{k,j} = +\infty, k = 1, 2, \dots, K$ , 且  $\mathbf{M}_j$  的每个元素都足够大; 问题序列  $\{\mathbf{B}^{\mathbf{M}_j}(\delta)\}_{j=1}^\infty$  有最优解序列  $\{(\mathbf{x}^{\mathbf{M}_j}(t), \mathbf{u}^{\mathbf{M}_j}(t))\}_{j=1}^\infty$ , 而且  $\{(\mathbf{x}^{\mathbf{M}_j}(a), \dot{\mathbf{x}}^{\mathbf{M}_j}(t), \mathbf{u}^{\mathbf{M}_j}(t))\}_{j=1}^\infty$  以  $(\mathbf{x}_0^\infty, \mathbf{q}(t), \mathbf{u}^\infty(t))$  为一致收敛的极限, 其中  $\mathbf{q}(t)$  和  $\mathbf{u}^\infty(t)$  都属于  $C[a, b]$ .

**定理1** 如果假设1成立, 则  $\mathbf{u}^\infty(t)$  和  $\mathbf{x}^\infty(t) = \int_a^t \mathbf{q}(\tau) d\tau + \mathbf{x}_0^\infty$  是问题  $\mathbf{B}$  的最优解.

文献[17]的定理5.4.1已证明本文定理1.

对于问题  $\mathbf{B}$  约束条件(4)的向量函数  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ , 令  $h_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  表示其第  $i$  个分量,  $i = 1, 2, \dots, M_h$ , 又令  $h_i^\infty(t) = h_i(\mathbf{x}^\infty(t), \mathbf{u}^\infty(t))$ , 不难看出  $h_i^\infty(t) \in C[a, b]$ ; 对于离散问题  $\mathbf{B}^{\mathbf{M}}(\delta)$ , 令  $h_i^{\mathbf{M}}(t) = h_i(\mathbf{x}^{\mathbf{M}}(t), \mathbf{u}^{\mathbf{M}}(t))$ .

**假设2** 在问题  $\mathbf{B}$  的  $\{h_1^\infty(t), \dots, h_{M_h}^\infty(t)\}$  中, 至少存在一个  $h_i^\infty(t)$  和相应的两个集合  $S_0^i$  和  $S_1^i$  满足

$$h_i^\infty(t) \begin{cases} < c_i, & t \in S_0^i; \\ = c_i, & t \in S_1^i; \end{cases}$$

$$S_0^i \cup S_1^i = [a, b], S_0^i \cap S_1^i = \emptyset, S_0^i \neq \emptyset, S_1^i \neq \emptyset.$$

其中  $c_i$  为已知常数,  $i \in \{1, 2, \dots, M_h\}$ .

假设2的用处在于, 根据最优解情况下约束条件(4)是否触碰约束界限, 时间区间  $[a, b]$  被分为两类子区间  $S_0^i$  和  $S_1^i$ . 这两类子区间的交界点很可能是弱间断点, 本文的算法正是要捕捉这类弱间断点.

**定理2** 在假设1和假设2成立的情况下, 设  $t_i^\infty$  为一个常数, 如果数列  $\{c_{j,i}\}_{j=1}^\infty$  和  $\{t_{j,i}\}_{j=1}^\infty$  满足

$$t_{j,i} \in [a, b], \forall j \in N, \tag{11}$$

$$t_i^\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} t_{j,i}, \tag{12}$$

$$c_{j,i} = h_i^{\mathbf{M}_j}(t_{j,i}), \forall j \in N, \tag{13}$$

$$c_i = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{j,i}, \tag{14}$$

$$|c_{j,i} - c_i| > \|h_i^{\mathbf{M}_j}(t) - h_i^\infty(t)\|_\infty, \forall j \in N, \tag{15}$$

则有  $t_i^\infty \in \overline{S_0^i} \cap S_1^i$ , 其中  $\overline{S_0^i}$  为  $S_0^i$  的闭包.

**证明** 先用反证法证明

$$t_{j,i} \notin S_1^i, \forall j \in N. \tag{16}$$

假设  $\exists j \in N$  使得  $t_{j,i} \in S_1^i$ , 则由假设2可知

$$h_i^\infty(t_{j,i}) = c_i, \tag{17}$$

于是, 由式(17)、(13)和(11)知

$$|c_{j,i} - c_i| = |h_i^{\mathbf{M}_j}(t_{j,i}) - h_i^\infty(t_{j,i})| \leq \|h_i^{\mathbf{M}_j}(t) - h_i^\infty(t)\|_\infty,$$

这与式(15)矛盾, 所以得证(16).

由式(11)、(16)和假设2可知

$$t_{j,i} \in S_0^i, \forall j \in N, \tag{18}$$

由式(12)和(18)知

$$t_i^\infty \in \overline{S_0^i}. \tag{19}$$

注意到假设1中已经假设  $\{\mathbf{u}^{\mathbf{M}_j}(t)\}_{j=1}^\infty$  在  $[a, b]$  一致收敛于  $\mathbf{u}^\infty(t)$ . 由定理1不难看出  $\{\mathbf{x}^{\mathbf{M}_j}(t)\}_{j=1}^\infty$  也一致收敛于  $\mathbf{x}^\infty(t)$ , 因为1.1节已经像文献[19]那样假设问题  $\mathbf{B}$  最优解唯一且  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  关于变元  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}$  连续可微, 所以易证序列  $\{h_i^{\mathbf{M}_j}(t)\}_{j=1}^\infty$  在  $[a, b]$  上一致收敛于假设2中的  $h_i^\infty(t) \in C[a, b]$ .

由式(12)~(14)和上述一致收敛的结论可知

$$c_i = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{j,i} = \lim_{j \rightarrow \infty} h_i^{\mathbf{M}_j}(t_{j,i}) = h_i^\infty(t_i^\infty). \tag{20}$$

由式(11)和(12)知

$$t_i^\infty \in [a, b], \tag{21}$$

再由式(20)、(21)和假设2知

$$t_i^\infty \in S_1^i, \tag{22}$$

进而, 由式(19)、(22)、假设2知  $t_i^\infty \in \overline{S_0^i} \cap S_1^i$ .  $\square$

### 3 误差指示量和算法

注意到解的一些弱间断点可能是由问题  $\mathbf{B}$  的约束条件(4)造成的, 弱间断点很可能出现在式(4)中某个分量  $h_i^\infty(t) < 0$  和  $h_i^\infty(t) = 0$  这两个区域的交界点上. 定理2表明, 可以通过数列  $\{c_{j,i}\}_{j=1}^\infty$  来找到数列  $\{t_{j,i}\}_{j=1}^\infty$ , 随着数列  $\{t_{j,i}\}_{j=1}^\infty$  收敛到两个区域的交界点  $t_i^\infty$ , 离散问题  $\mathbf{B}^{\mathbf{M}}(\delta)$  的一些网格点可以被设置在弱间断点  $t_i^\infty$  或在附近, 这有利于提高数值解精度.

**定义1** 当  $L, K \in N$  且  $K \geq L \geq 2$  时, 对于网格  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$  和  $a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_L = b$ , 令  $\eta_i = \min\{|t'_i - t_1|, \dots, |t'_i - t_{K-1}|\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, L-1$ , 称  $EI = \max\{\eta_1, \dots, \eta_{L-1}\}$  为误差指示量.

考虑柯西收敛原理, 后边算法1的Step 5用误差指示量  $EI(j+1)$  度量两套网格点彼此的某种距离, 观察该距离可以间接判断网格点是否收敛到弱间断点.

由于很难从定理2的条件(13)解出  $t_{j,i}$  的值, 后边算法1的Step 4用满足

$$0 < h_i^{\mathbf{M}_j}(t) - c_{j,i} < \theta(0 - c_{j,i}) \tag{23}$$

的配置点(CGL点)来近似  $t_{j,i}$ , 由此得到新的网格点, 这会赋予算法1网格自适应加密的能力.

算法1的Step 4用  $h_i^{\mathbf{M}_j}(t) > c_{j,i}$  判断网格类型, 把网格分为接近和远离约束上限0这两类. 由假设2

知,定理2找到的弱间断点很可能是不同类型相邻网格的公共点,所以同类型相邻网格被合并,这赋予算法1网格自适应稀疏的能力.

除了上述内容外,定理2的其余部分也各有用处,其中式(11)、(12)和(14)的用处比较直观,已在算法1中直接或间接体现.需要特别说明的是式(15),因为需要精确的最优解  $u^\infty(t)$  和  $x^\infty(t)$  才能得到s(15)中的  $h_i^\infty$ ,所以算法1没有直接涉及(15).但是,由于定理2的假设1已经确保了收敛性(见定理1),这使得式(15)的右端满足  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|h_i^{M_j} - h_i^\infty\|_\infty = 0$ ,虽然无法在算法1中验证,但(15)却是有可能成立的.

**算法1**

Step 1: 选定  $N_{\min}$ 、 $\delta$ 、 $\theta$  和 Tol. 设置  $j = 1, K = 1, M_j = N_{\min}$ . 求解问题  $B^{M_j}(\delta)$  得到数值解和目标值  $J(j)$ . 记  $h_i^{M_j}(t)$  在各配置点(CGL点)上最大最小值的平均值为  $c_{j,i}, i = 1, 2, \dots, M_h$ .

Step 2: 储存问题  $B^{M_j}(\delta)$  的网格点  $\{t_0, \dots, t_K\}$ .

Step 3: 设置  $c_{j,i} = 0.5c_{j,i}, i = 1, 2, \dots, M_h$ .

Step 4: 对于  $i = 1, 2, \dots, M_h$ , 适当增加 CGL 点, 找出满足式(23)的 CGL 点为新增网格点. 用原数值解在每个网格内  $N_{\min} + 1$  个 CGL 点的值, 得到加密后的参考解.

对于  $i = 1, 2, \dots, M_h$ , 用参考解形成  $h_i^{M_j}(t)$ , 各网格内  $N_{\min} + 1$  个 CGL 点中, 按照是否过半满足  $h_i^{M_j}(t) > c_{j,i}$  分为两类. 设置  $EI(j + 1) = +\infty$ . 如果每对相邻网格都存在  $i \in \{1, 2, \dots, M_h\}$  使之异类, 则转 Step 6.

Step 5: 相邻的几个网格对于  $\forall i \in \{1, 2, \dots, M_h\}$  如果都同类, 则合并为一个. 如果合并后只剩一个网格, 则取消 Step 5 已做的工作并转 Step 6. 利用参考解在每个网格内  $N_{\min} + 1$  个 CGL 点的值, 得到稀疏后的参考解. 如果 Step 2 只有一个网格, 则转 Step 6.

根据定义1, 用当前网格和 Step 2 的网格计算误差指示量  $EI(j + 1)$ . 如果  $EI(j + 1) = 0$ , 则取消 Step 4 和 Step 5 已做的工作, 转 Step 3.

Step 6: 设置  $j = j + 1$ , 以参考解为初始猜测, 每个网格内用  $2N_{\min} + 1$  个 CGL 点形成新问题  $B^{M_j}(\delta)$ , 解得数值解和目标值  $J(j)$ . 如果  $EI(j) \geq \text{Tol}$ , 则转 Step 2; 否则, 刚才得到的即为最终数值解, 程序停止.

**4 数值算例**

本节使用算法1求解两个弱间断最优控制问题, 以验证所提出的算法的精度和效率. 所有问题都在 Matlab6.5 环境下编程, 并在同一台 PC 机上计算. 为了对比, 对常用的 Chebyshev 拟谱方法离散产生的问

题即  $K = 1$  时的问题  $B^M(\delta)$  进行计算, 文献[16-17]提供了处理弱间断最优控制问题的自适应拟谱方法 Matlab 程序, 该程序的试算结果也用于对比优劣. 所有离散问题都用 SNOPT<sup>[22]</sup> 求解, 为了加快计算速度, 所有计算都采用文献[19]中提及的快速变换.

**例1** 考虑一个有解析解的最优控制问题<sup>[23]</sup>

$$\begin{aligned} \min J &= \int_0^2 (u^2(t) + 3u(t) - 2x(t))dt; \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) &= x(t) + u(t), x(0) = 5, 0 \leq u(t) \leq 2. \end{aligned}$$

由文献[23]知,弱间断点是  $t = 2 - \ln 4.5$  和  $t = 2 - \ln 2.5$ , 最优目标值为

$$\begin{aligned} J^* &= \\ &59 + 14 \ln 2 - (81/2) \ln 3 + (25/4) \ln 5 - 14e^2 \approx \\ &-69.177\ 535\ 595\ 535\ 176. \end{aligned}$$

为了利用算法1计算例1, 设置参数  $N_{\min} = 16, \delta = 0, \theta = 0.25$  和  $\text{Tol} = 0.007$ . 图1和图2给出了表1中  $j = 3$  和  $j = 7$  两行数据对应的  $u(t)$  数值解, 两幅图都是3个网格, 都用“o”、“+”和“o”分别画出3个网格各自的 CGL 点. 对比图1和图2的记号“+”可以看出网格变化. 由图2知, 自适应算法1最终把不同子区间的交界点(网格点)设置在两个弱间断点附近.

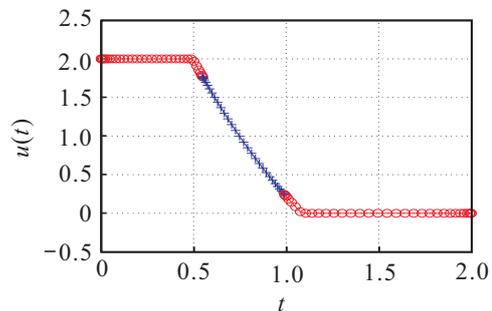


图1 表1中  $j = 3$  时对应的  $u(t)$  数值解

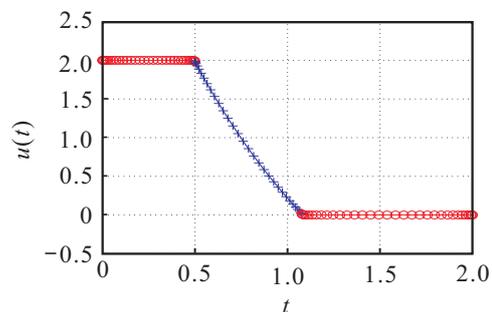


图2 表1中  $j = 7$  时对应的  $u(t)$  数值解

表1列出了算法1历次解离散问题  $B^{M_j}(\delta)$  的情况, 表中相关数据按照误差指示量  $EI(j)$  从小到大排列. 可以看出, 随着误差指示量  $EI(j)$  减小, 数值解的目标值相对误差显示出减小的趋势. 表2列出了常用的 Chebyshev 拟谱方法在一个网格时的数值解.

表1 算法1解例1的结果

$B^{M_j}(\delta)$	目标值相对误差 $\frac{ J^* - J(j) }{ J^* }$	时间/s	误差指示量EI(j)
$j = 7$	$1.9742 \times 10^{-10}$	15.0	$6.8355 \times 10^{-3}$
$j = 6$	$2.0003 \times 10^{-9}$	13.5	$1.1420 \times 10^{-2}$
$j = 5$	$7.1334 \times 10^{-9}$	11.8	$2.0684 \times 10^{-2}$
$j = 3$	$3.6489 \times 10^{-8}$	8.4	$3.9928 \times 10^{-2}$
$j = 4$	$1.5970 \times 10^{-9}$	10.0	$4.8444 \times 10^{-2}$
$j = 1$	$4.2145 \times 10^{-4}$	0.4	无定义
$j = 2$	$3.2537 \times 10^{-8}$	6.1	$+\infty$

表2 Chebyshev拟谱方法解例1的结果

CGL点数 ( $M + 1$ )	目标值相对误差 $\frac{ J^* - J^M }{ J^* }$	时间/s
9	$4.2145 \times 10^{-4}$	0.20
17	$5.5397 \times 10^{-6}$	0.30
33	$5.1118 \times 10^{-7}$	0.69
65	$4.2394 \times 10^{-7}$	3.69
129	$3.8688 \times 10^{-9}$	19.59
257	$2.5788 \times 10^{-10}$	49.16

表3给出了3种方法求解的结果. 由表3可知, 本文算法1在时间和精度上都明显优于另外两种方法, 其中文献[17]方法的计算时间是由秦廷华<sup>[16-17]</sup>提供的Matlab程序试算得出.

表3 3种方法解例1的结果

数据来源	目标值相对误差 $\frac{ J^* - J^M }{ J^* }$	时间/s
表1(本文算法1)	$1.9742 \times 10^{-10}$	15
表2(Chebyshev拟谱法)	$2.5788 \times 10^{-10}$	49.16
文献[17]的表5.6.6	$2.9810 \times 10^{-8}$	—
文献[17]提供程序算出	$2.9810 \times 10^{-8}$	120

例2 考虑一个航天器最优控制问题<sup>[16-17]</sup>

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^{100} (u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t)) dt;$$

s.t.

$$\dot{\omega}_1(t) = -(I_3 - I_2)\omega_2(t)\omega_3(t) + u_1(t)/I_1,$$

$$\dot{\omega}_2(t) = -(I_1 - I_3)\omega_1(t)\omega_3(t) + u_2(t)/I_2,$$

$$\dot{\omega}_3(t) = -(I_2 - I_1)\omega_1(t)\omega_2(t) + u_3(t)/I_3,$$

$$\omega_1(t) - (5 \times 10^{-6}t^2 - 5 \times 10^{-4}t + 0.016) \leq 0,$$

$$[\omega_1(0), \omega_2(0), \omega_3(0)] = [0.01, 0.005, 0.001] \text{ rad/s},$$

$$\omega_1(100) = \omega_2(100) = \omega_3(100) = 0 \text{ rad/s}.$$

其中:  $[I_1, I_2, I_3] = [86.24, 85.07, 113.59] \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  是状态函数;  $u_1, u_2, u_3$  是控制函数.

为了利用算法1计算例2, 设置参数  $N_{\min} = 4, \delta = 0, \theta = 0.25$  和  $\text{Tol} = 0.35$ . 图3和图4给出了表4中  $j = 4$  和  $j = 8$  两行数据对应的数值解, 两幅图都是3个网格, 其中第2个网格都用“+”标出CGL点. 对比图3和图4的记号“+”可以看出网格的变化情况. 从图4不难看出, 自适应算法1最终的确把不同子区间的交界点(网格点)设置在可能存在弱间断点的

的  $t = 40$  附近.

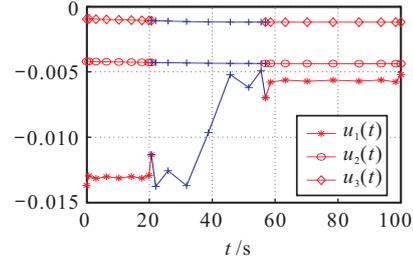


图3 表4中  $j = 4$  时对应的数值解

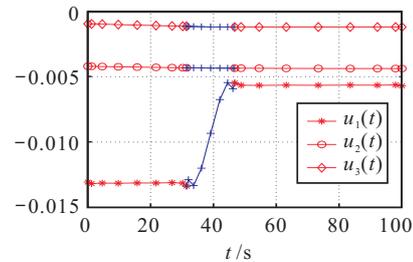


图4 表4中  $j = 8$  时对应的数值解

表4 算法1解例2的结果

$B^{M_j}(\delta)$	数值解目标值 $J(j)$	时间/s	误差指示量EI(j)
$j = 8$	0.005308466873730	63.9	1.0267
$j = 7$	0.005308574816844	55.8	2.4601
$j = 6$	0.005307858856258	48.7	3.1826
$j = 5$	0.005305782732905	42.3	4.1171
$j = 4$	0.005304818116767	32.3	5.3260
$j = 3$	0.005308178375449	23.1	6.8900
$j = 1$	0.005029698365104	1.1	无定义
$j = 2$	0.005313026357211	13.2	$+\infty$

表5 Chebyshev拟谱方法解例2的结果

CGL点数 ( $M + 1$ )	数值解目标值 $J^M$	时间/s
5	0.0050296983651	1.04
9	0.0051620443060	1.89
17	0.0053067517840	3.56
33	0.0053078930206	10.25
65	0.0053085338340	35.73
129	0.0053084531414	141.80

表6 3种方法解例2的结果

数据来源	CGL点数	目标值	时间/s
表4(本文算法1)	25	0.00530847	63.9
表5(Chebyshev拟谱法)	129	0.00530845	141.80
文献[17]的表5.6.15	86	0.00530844	—
文献[17]提供程序算出	86	0.00530843	243.59

表4是算法1历次解离散问题  $B^{M_j}(\delta)$  的情况, 其中数据按误差指示量EI(j)从小到大排列. 表5是常用的Chebyshev拟谱方法在一个网格时的数值解. 由于无解析解, 只能对比目标值. 由表6可知, 在目标值大致相同的情况下, 本文算法1用的计算时间明显少于另外两种方法, 其中文献[17]方法的计算时间(243.59s)是由秦廷华等<sup>[16-17]</sup>提供的Matlab程序试算得出. 需要注意的是, 表6最后两行目标值存在细微差异, 这是由于作者使用的电脑不同造成的.

## 5 结 论

针对拟谱方法对弱间断解收敛速度慢这一问题, 本文提出了捕捉最优控制问题一类弱间断点的方法, 证明了该方法在一些假设条件下能找出以弱间断点为极限的点序列. 本文的自适应拟谱方法据此可以调整网格和配置点. 数值实验表明, 在计算时间和解的精度这两方面, 本文的自适应拟谱方法明显优于常用的 Chebyshev 拟谱方法和文献 [16-17] 的自适应算法.

尽管本文方法是基于 Chebyshev 拟谱方法设计的, 但是用本文理论成果也可为其他常用方法 (例如 Legendre 拟谱方法和 Gauss 拟谱方法) 设计相应的自适应算法, 从而提高其解弱间断问题的效率和精度.

### 参考文献 (References)

- [1] Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, 21(2): 193-207.
- [2] Bruce A, Conway. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems[J]. *J of Optimization Theory and Applications*, 2012, 152(2): 271-306.
- [3] Gong Q, Kang W, Ross I M. A pseudospectral method for the optimal control of constrained feedback linearizable systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(7): 1115-1129.
- [4] Jain S, Tsiotras P. Trajectory optimization using multi-resolution techniques[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, 31(5): 1424-1436.
- [5] Gong Q, Kang W, Bedrossian N S, et al. Pseudospectral optimal control for military and industrial applications[C]. *Proc of the 46th IEEE Conf on Decision and Control*. LA: IEEE Press, 2007: 4128-4142.
- [6] Sun Z Y, Ding S J. SGCMG nonsingularity steering based on adaptive Gauss pseudospectral method[C]. *Proc of the 2014 Int Conf on Informative and Cybernetics for Computational Social Systems*. Qingdao: IEEE Press, 2014: 96-101.
- [7] Kong M X, Chen Z S, Ji C, et al. Optimal point-to-point motion planning of flexible parallel manipulator with adaptive Gauss pseudo-spectral method[C]. *Proc of the 2014 IEEE/ASME Int Conf on Advanced Intelligent Mechatronics*. Besacon: IEEE Press, 2014: 852-858.
- [8] Fahroo F, Ross I M. Advances in pseudospectral methods for optimal control[C]. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conf*. Honolulu: AIAA Press, 2008: 7309.
- [9] Ross I M, Mark K. A review of pseudospectral optimal control: From theory to flight[J]. *Annual Reviews in Control*, 2012, 36(2): 182-197.
- [10] Elnagar G N, Kazemi M A. Pseudospectral Chebyshev optimal control of constrained nonlinear dynamical systems[J]. *Computational Optimization and Applications*, 1998, 11(2): 195-217.
- [11] Fahroo F, Ross I M. Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudospectral method[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, 25(1): 160-166.
- [12] Zhao J, Zhou R, Jin X L. Reentry trajectory optimization based on a multistage pseudospectral method[J]. *The Scientific World J*, 2014, 2014(878193): 1-13.
- [13] Darby C L, Hager W W, Rao A V. An hp-adaptive pseudospectral method for solving optimal control problems[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2011, 32(4): 476-502.
- [14] Guo F. Global existence of weakly discontinuous solutions to a kind of mixed initial-boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems[J]. *Applied Mathematics J of Chinese Universities Series B*, 2007, 22(2): 181-200.
- [15] 张稳. 非光滑最优控制问题的一种数值解法[J]. *高校应用数学学报 A 辑*, 2009, 24(2): 207-220. (Zhang W. A numerical method for solving nonsmooth optimal control problems[J]. *Applied Mathematics J of Chinese Universities Series A*, 2009, 24(2): 207-220.)
- [16] 秦廷华, 马和平. 最优控制问题弱间断解的一个自适应算法[J]. *控制与决策*, 2013, 28(2): 313-316. (Qin T H, Ma H P. Adaptive algorithm for weakly discontinuous solutions of optimal control problems[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(2): 313-316.)
- [17] 秦廷华. 微分方程最优控制问题自适应方法[D]. 上海: 上海大学理学院, 2012. (Qin T H. Adaptive methods for optimal control problems governed by differential equations[D]. Shanghai: College of Sciences, Shanghai University, 2012.)
- [18] Fahroo F, Ross I M. A unified computational framework for real-time optimal control[C]. *Proc of the 42th IEEE Conf on Decision and Control*. Hawaii: IEEE Press, 2003: 2210-2215.
- [19] Ma H P, Qin T H, Zhang W. An efficient Chebyshev algorithm for the solution of optimal control problems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2011, 56(3): 675-680.
- [20] Gong Q, Ross I M, Fahroo F. A Chebyshev pseudospectral method for nonlinear constrained optimal control problems[C]. *Proc of the 48th IEEE Conf on Decision and Control*, 2009 Held Jointly with the 28th Chinese Control Conf. Shanghai: IEEE Press, 2009: 5057-5062.
- [21] Trefethen L N. Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis?[J]. *SIAM Review*, 2008, 50(1): 67-87.
- [22] Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization[J]. *SIAM Review*, 2005, 47(1): 99-131.
- [23] 康宇, 王俊, 杨孝先. 控制理论基础[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014: 183-184. (Kang Y, Wang J, Yang X X. Fundamentals of control theory[M]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2014: 183-184.)