第 32卷 第 6期 控 制 与 决 策 Vol.32 No.6
2017年 6月 Control and Decision Jun. 2017

文章编号: 1001-0920(2017)06-1143-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0554

语言迭代算子及其在多准则中的应用

岳立柱†, 李良琼

(辽宁工程技术大学 公共管理与法学院，辽宁 阜新 123000)

摘 要: 针对语言集结算子不能反映变量集结的离散程度问题,提出语言均值迭代算子. 首先,通过定义证明该算子具有单调性、有界性和幂等性;然后,发现均值迭代算子在锚定集上的取值为一随机变量,在锚定集上能够测量算子集结的离散程度和集中程度;最后,在多准则的实际应用中,给出由均值迭代算子构造的应用公式和操作步骤. 通过实例分析,说明了以往语言集结算子的局限性以及所提出算子的有效性.

关键词: 集结函数；多准则决策；评价集；语言变量

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Mean iterative operator for linguistic and application during multi criteria determination

YUE Li-zhu†, *LI Liang-qiong*

(School of Public Administration and Law，Liaoning Technical University，Fuxin 123000，China)

Abstract: For the problem that the lingnistic aggregation operater can’t reflect degree of dispersion about variable, the linguistic mean iterative operator is presonted. Firstly, it is proven that the operator is monotonic, bounded, idempotent by definition. Then, it is discovered that the value of mean iterative operator on the set of thd anchor is random. It can be measured that the degree of central tendency and dispersion of index polymerization on the set of the anchor. Ffinally, in the practical application of the multi criteria determination, the application formula and the operation steps are given by using the mean iteration operator. The limitations of the previous language aggregation operators and the effectiveness of the proposed operators are illustrated by an example.

Keywords: aggregation function；multiple criteria decision making；evaluation set；linguistic variables

0 引 言

自美国学者Yager[1]提出了有序加权平均算子(OWA)以来,集结算子已经成为多准则决策领域的重要研究对象. 随着研究的深入,人们发现应用语言算子能够更好地处理情境复杂、非结构化问题,能兼顾专业人士与非专业人士的背景,更易于决策者与参与者之间互动. 因此,语言算子研究迅速发展,并得到了广泛应用[2-3].

至今,学者们提出了很多语言集结算子,Xu等[4]将这些集结算子划分为5类: 1) 基于线性序的语言值聚合算子,例如语言加权均值算子[3]; 2) 基于扩展原理的语言值聚合算子,例如语言值加权OWA算子[5]; 3) 基于二元语言表示模型的语言值聚合算子,例如二元语言OWA算子[6]; 4) 直接处理语言值的语言值聚合算子,例如直觉不确定语言的Choque加权算术平均算子(IULCWA)和直觉不确定语言的Choquet加权几何平均算子(IULCGM)[7]、诱导的不确定的语言值OWA算子[8]; 5) 基于符号的语言值聚合算子[9]. 以上5类算子从不同角度揭示语言集结的特征,并从各自视角给出了集结方法.

从研究的进程上看,围绕各类经典算子,广义语言算子被相继提出. Yager[10]推广了OWA算子,提出了广义有序加权算子(GOWA),在此基础上,Merigó等[11]给出了语言广义有序加权算子(LGOWA). 徐泽水[12]在诱导有序加权算子(IOWA)的基础上,提出了广义诱导语言有序加权(GILOWA)算子; Li等[13]运用二元语言模型,提出了二元语义诱导广义有序加权平均距离(2LIGOWAD)算子. 在广义混合平均(GHA)算子的基础上,Merigó等[14]又提出了模糊广义混合平均(FGHA)算子. 与此相关,Liu[15]应用直

收稿日期: 2016-05-04；**修回日期:** 2016-08-13.

基金项目: 辽宁省教育厅基金项目(LJCR010)；辽工大第四批生产技术问题创新研究基金项目.

作者简介: 岳立柱(1976−), 男, 讲师, 博士生导师, 从事决策理论与方法等研究；李良琼(1979−), 女, 讲师, 从事决策理论与方法的研究.

†通讯作者. E-mail: simaxinjing@163.com

接模糊集提出了直觉语言混合加权广义相关集结(ILGDHWA)算子. 沿袭经典幂(PA)算子, Zhou等[16]界定了广义幂(GPA)算子的概念,进一步提出了语言广义幂平均(LGPA)算子. 各类广义语言算子的出现,标志着对经典算子的语言拓展趋于成熟.

现有的语言集结算子,测量语言变量的集中趋势,但在实际决策中,经常需要变量集结的离散程度信息. 首先,缺少离散信息会导致判断错误. 例如,我国空气质量指标由6类污染物指标构成,且各类污染物对应同一语言标度,假设A城市所有指标取值为“良”, B城市有一个指标取值为“重度污染”,当平均水平相同时,两个城市空气对人体的影响一样么?显然B城市的对人体的危害大于A城市(各类污染物对人体的危害是不能相互补偿的). 其次,集结的离散指标能够提供独特的决策信息. 例如,语言变量表示专家评价水平,离散程度越大,表示专家分歧程度越高;语言变量表示获利水平,离散程度越大,越表明存在着较大的获利不确定性. 鉴于离散信息的重要作用, Gagolewski[17]研究了经典算子集结的离散程度. 因为该文针对的是连续型变量,语言变量属于序数型,所以不能将其直接移植到语言集结算子之中. 因此,本文围绕语言变量的序数运算特征构造集结算子,研究测量离散趋势的方法.

1 语言均值迭代算子

1.1 语言标度及其运算法则

目前,应用最为广泛的语言标度如下[12]:

$$S = \{s_\alpha | \alpha = 0, 1, \cdots, k\},$$

其中s_α表示语言术语. 特别地, s_0和s_k分别表示评估标度中语言术语的下限和上限,且满足下列条件:

1) 若$\alpha > \beta$,则$s_\alpha > s_\beta$;

2) 存在负算子$\mathrm{neg}(s_\alpha) = s_\beta$,使得$\alpha + \beta = k$.

为了避免决策信息的丢失,需在原语言评估标度S的基础上定义一个拓展标度

$$\overline{S} = \{s_\alpha | \alpha \in [0, q]\},$$

其中$q \geqslant k$是一个充分大的正数. 若$s_\alpha \in S$,则称s_α为本原术语;否则,称s_α为拓展术语或虚拟术语[12]. 对上述语言标度有如下运算法则:

定义1[15] 设$s_\alpha, s_\beta \in \overline{S}$,则:

1) $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha = s_{\alpha+\beta}$;

2) $\lambda s_\alpha = s_{\lambda\alpha}$.

1.2 语言均值迭代算子定义

Tao等[18]认为,定义1给出的语言标度运算存在运算结果与逻辑解释不符、加法运算不封闭两个缺陷. 语言标度属于序数型数据,不符合加减运算规则. 语言变量虽不能加减,但可以计算两个语言变量的中间状态. 例如, $s_1 =$差, $s_2 =$中, $s_3 =$良, s_1和s_3相加无意义,但可以记二者的中间状态为s_2. 为此,构造如下集结算子:

定义2 设$I : \overline{S}^m \to \overline{S}$,若

$$I(a_1, \cdots, a_i) = I(I(a_1, \cdots, a_{i-1}), a_i), \qquad (1)$$

其中$I(a_1, a_2) = (a_1 \oplus a_2)/2, i = 3, 4, \cdots, m$. 则称$I$为均值迭代算子.

值得注意,式(1)是从向量左侧开始计算的. 例如,给定语言向量(s_3, s_1, s_2, s_3),首先计算最左侧两个指标的均值$I(s_3, s_1) = (s_3 \oplus s_1)/2 = s_2$,之后计算$I(s_3, s_1, s_2) = I(I(s_3, s_1), s_2) = I(s_2, s_2) = s_2$,直至得到$I(s_3, s_1, s_2, s_3) = I(I(s_3, s_1, s_2), s_3) = I(s_2, s_3) = s_{2.5}$.

定理1 设$(s_{a_1}, s_{a_2}, \cdots, s_{a_m}) \in \overline{S}^m$,则迭代均值算子$I(s_{a_1}, s_{a_2}, \cdots, s_{a_m}) = s_\theta$,其中

$$\theta = \frac{1}{2^{m-1}}[(a_1 + a_2) + 2a_3 + \cdots + 2^{m-2}a_m]. \qquad (2)$$

证明 对于$\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$,元素$s_i$与其下标$i$之间存在严格单调关系,语言变量的运算等价变量下标的运算,即令$f(a_1, a_2, \cdots, a_m) = f(f(a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}), a_m)$,且$f(a_1, a_2) = (a_1 + a_2)/2$,只需证明$f(a_1, a_2, \cdots, a_m) = \theta$.

由$f(f(a_1, \cdots, a_{m-1}), a_m) = (f(a_1, \cdots, a_{m-1}) + a_m)/2$,整理得

$$2f(a_1, a_2, \cdots, a_k) = f(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}) + a_k. \qquad (3)$$

将式(3)两端乘以不同的常数,分别得

$$2 \cdot 2^{k-2} f(a_1, a_2, \cdots, a_k) =$$
$$2^{k-2} f(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}) + 2^{k-2} a_k,\ k = 2, 3, \cdots, m.$$

将如上$m - 1$个展开式左右两端相加,可消去$f(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}), k = 2, 3, \cdots, m - 1$,于是整理得到$2^{m-1} f(a_1, a_2, \cdots, a_m) = a_1 + a_2 + 2a_3 + \cdots + 2^{m-2} a_m$. 证$f(a_1, a_2, \cdots, a_m) = \theta$,即式(2)成立. □

1.3 语言均值迭代算子性质

定义3[17] 令$L = [a, b]$, $A : L^m \to L$是一个集结函数,若满足:对于每个变量是单调增的,即对$x, x' \in L^m$,若$x \preceq x' (\forall i, x_i \leqslant x'_i)$,则有$A(x) \leqslant A(x')$,且边界条件满足: $\inf\limits_{x \in L^m} A(x) = \inf L$, $\sup\limits_{x \in L^m} A(x) = \sup L$.

定理2 设$A = (s_{a_1}, \cdots, s_{a_m})$, $B = (s_{b_1}, \cdots, s_{b_m}) \in \overline{S}^m$,均值迭代算子$I(\cdot)$有如下性质:

1) 幂等性. 若各分类相同,即$(s_a, \cdots, s_a) \in \overline{S}^m$,则$I(s_a, \cdots, s_a) = s_a$.

2) 单调性. 若$A \leqslant B$,则$I(s_{a_1}, s_{a_1}, \cdots, s_{a_m}) \leqslant$

$I(s_{b_1}, s_{b_2}, \cdots, s_{b_m})$.

3) 有界性. $\min\{s_{a_1}, s_{a_2}, \cdots, s_{a_m}\} \leqslant I(s_{a_1}, s_{a_2}, \cdots, s_{a_m}) \leqslant \max\{s_{a_1}, s_{a_2}, \cdots, s_{a_m}\}$.

证明 不失一般性,设$\overline{S} = [l, u]$. 当$a_i = x, i = 1, 2, \cdots, m$时,由定理1可知,$\theta = \frac{1}{2^{m-1}}(x + x + 2x + \cdots + 2^{m-2}x) = x$,幂等性成立. 若$A \leqslant B$,则由定理1可知

$$I(s_{b_1}, s_{b_2}, \cdots, s_{b_m}) - I(s_{a_1}, s_{a_2}, \cdots, s_{a_m}) = s_\alpha.$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{2^{m-1}}(\varDelta_1 + \varDelta_2) + 2\varDelta_3 + \cdots + 2^{m-2}\varDelta_m,$$
$$\varDelta_i = b_i - a_i,\ i = 1, 2, \cdots, m.$$

因为对任意$\varDelta_i = b_i - a_i \geqslant 0$,有$\alpha \geqslant 0$,故单调性成立. 由$A \in \overline{S}^m$可知,$(s_l, s_l, \cdots, s_l) \leqslant A \leqslant (s_u, s_u, \cdots, s_u)$; 由单调性可知,$I(s_l, s_l, \cdots, s_l) \leqslant I(A) \leqslant I(s_u, s_u, \cdots, s_u)$;由幂等性可知,$I(s_l, s_l, \cdots, s_l) = s_l, I(s_u, s_u, \cdots, s_u) = s_u$,故有界性成立. □

由定理2不难验证,均值迭代算子I满足定义3,即为一集结函数.

2 语言变量集结离散程度测量

2.1 锚定集

不难验证,均值迭代算子不满足交换性,即不同的位置交换,可能会出现不同的结果.

由数集$\{1, 2, \cdots, m\}$共得到$m!$个全排列,将每个排列表示为一个m维向量,总共可以得到$m!$个向量,其全体记为$\tau = \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{m!}\}$,其中$\tau_i$表示由排列生成的一个$m$维向量. 称$\tau$ 为锚定集,τ_i为锚定向量.

2.2 集结的均值与标准差

设$A = (s_{a_1}, s_{a_2}, \cdots, s_{a_m})$,映射$\varphi: A \to \{1, 2, \cdots, m\}$,若$x, y \in A, x \preceq y$,有$\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$,则称$\varphi$是保序映射. 若$\varphi$为保序的双射,且$\varphi(x) \leqslant \varphi(y) \Rightarrow x \preceq y$,则称$\varphi$ 为同构映射[19].

例如,设$A = (s_3, s_1, s_2, s_5), \tau_i = (4, 2, 1, 3) \in \tau$, φ为同构映射,则$\varphi_A^{-1}(\tau_i) = (\varphi_A^{-1}(4), \varphi_A^{-1}(2), \varphi_A^{-1}(1), \varphi_A^{-1}(3)) = (s_5, s_2, s_1, s_3)$.

定理3 设$A = (s_{a_1}, s_{a_2}, \cdots, s_{a_m}) \in \overline{S}^m$,$\tau$为锚定集,$\varphi$为$A$的同构函数,则有

$$\frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{m!} I(\varphi_A^{-1}(\tau_i)) = s_{(a_1+a_2+\cdots+a_m)/m}. \tag{4}$$

证明 对于任意$\tau_i = (\tau_{i1}, \tau_{i2}, \cdots, \tau_{im}), \tau_j = (\tau_{j1}, \tau_{i2}, \cdots, \tau_{jm}) \in \tau$,由定理1可知

$$I(\varphi_A^{-1}(\tau_i)) + I(\varphi_A^{-1}(\tau_j)) =$$
$$\frac{1}{2^{m-1}}[(\varphi_A^{-1}(\tau_{i1}) + \varphi_A^{-1}(\tau_{j1}) + \varphi_A^{-1}(\tau_{i2}) + \varphi_A^{-1}(\tau_{j2})) + 2(\varphi_A^{-1}(\tau_{i3}) + \varphi_A^{-1}(\tau_{j3})) + \cdots + 2^{m-2}(\varphi_A^{-1}(\tau_{im}) + \varphi_A^{-1}(\tau_{jm}))].$$

进一步,可得

$$\sum_{t=1}^{m!} I(\varphi_A^{-1}(\tau_t)) =$$
$$\frac{1}{2^{m-1}}\Big[\Big(\sum_{t=1}^{m!}\varphi_A^{-1}(\tau_{t1}) + \sum_{i=1}^{m!}\varphi_A^{-1}(\tau_{t2})\Big) + 2\sum_{t=1}^{m!}\varphi_A^{-1}(\tau_{t3}) + \cdots + 2^{m-2}\sum_{t=1}^{m!}\varphi_A^{-1}(\tau_{tm})\Big].$$

由锚定集概念可知,共有$m!$个锚定向量. 由于任意分量被"分配"到每个位置的概率是等同的,即$1/m$,集合中每个元素在任意位置上出现的总次数为$m! \times 1/m = (m-1)!$,故

$$\sum_{t=1}^{m!}\varphi_A^{-1}(\tau_{tk}) =$$
$$(m-1)! s_{a_1+a_2+\cdots+s_m} = m! s_{(a_1+a_2+\cdots+s_m)/m},$$
$$k = 1, 2, \cdots, m.$$

进一步整理,有

$$\sum_{t=1}^{m!}\mathrm{IMO}(\varphi_A^{-1}(\tau_t)) =$$
$$\frac{m! s_{(a_1+a_2+\cdots+s_m)/m}}{2^{m-1}}(1 + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-2}) =$$
$$m! s_{(a_1+a_2+\cdots+s_m)/m}.$$

上式两端同除以m ,得式(4). □

由定理3可知,均值迭代算子在锚定集上的概率分布的均值等于语言标度的算术平均值. 在锚定集上可构造均值迭代算子的标准差$\sigma(A)$来测量算子集结的离散程度. 其中

$$\sigma(A) = \sqrt{\frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{m!}\left[\mathrm{IMO}(\varphi_A^{-1}(\tau_i)) - s_{(a_1+\cdots+a_m)/m}\right]^2}. \tag{5}$$

3 语言均值迭代算子的决策应用

标准差$\sigma(A)$为决策提供了有用信息,但随之而来,通过聚集指标和离散指标(例如标准差)无法对方案进行排序便成为应用中的一个困扰. 比如A方案的均值优于B方案、标准差劣于B方案,二者如何进行比较?因此,在锚定集基础上设计方案的比较方法.

3.1 比较公式与矩阵

称sig(x)为示性函数,即sig:$R \to \{0, 0.5, 1\}$,且满足

$$\mathrm{sig}(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\0.5,\ x=0;\\1,\ x>0.\end{cases}$$

定义4 设$A=\{s_{a_1},s_{a_2},\cdots,s_{a_m}\}$, $B=\{s_{b_1},s_{b_2},\cdots,s_{b_m}\}\in\overline{S}^m$, τ为锚定集,若

$$P(A\geqslant B)=\frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{m!}\mathrm{sig}[I(\varphi_A^{-1}(\tau_i))-I(\varphi_B^{-1}(\tau_i))],\tag{6}$$

则称$P(A\geqslant B)$(简记P_{AB})为A优于B的优势度.

易知$0\leqslant P_{AB}\leqslant 1$,若$P_{AB}=0.5$,则称$A$与$B$是无差异的;若$P_{AB}=1$,则表明$A$完全优于$B$,数值越大表明$A$优于$B$的程度越高.

对于n个决策方案,根据式(8)得到比较矩阵$P=(P_{ij})_{n\times n}$,不难验证P为一模糊关系矩阵,可以采用文献[20]给出的比较公式,即

$$P(x_i)=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}P(x_i\geqslant x_j).\tag{7}$$

在此基础上,构造细化比较方法,即令

$$P_\lambda(x_i)=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}P_\lambda(x_i\geqslant x_j),\tag{8}$$

其中

$$P_{ij}^\lambda=\begin{cases}1,\ P_{ij}\geqslant\lambda;\\0,\ P_{ij}<\lambda.\end{cases}$$

3.2 操作步骤

Step 1: 语言变量的等权化处理. 将初始语言变量乘以相应权重,得到新的等权的语言变量A.

Step 2: 计算语言向量A在锚定集上的取值. 利用式(4)得到集结均值,应用式(5)得到集结标准差(标准差要结合情境特征进行解读).

Step 3: 根据式(6)得到比较矩阵$P=(P_{ij})_{n\times n}$.

Step 4: 对不同优势度水平,即$\lambda\in[0.5,1]$取不同值时,应用式(8)计算各方案的优势总值.

4 实例应用

实例来源于文献[18]. 现今,对葡萄酒的评价,由于尚不存在具体的理化标准进行评估,更多的还是依赖于专业品酒师的主观评价. 针对葡萄酒的评价,著名的葡萄酒作家兼评论家罗伯特帕克(Robert Parker)给出了评价葡萄酒的4类指标:颜色与外观(C&A)、气味与芳香(A&B)、味道与回味(F&F)以及综合质量水平(OQL),4个指标的权重信息为$w=(0.1,0.3,0.4,0.2)$.

设专业品酒师依据下列语言术语集进行评价:$S=\{s_1=$不可接受的,$s_2=$低于平均水平的,$s_3=$低于平均水平的,$s_4=$中等的,$s_5=$高于平均水平的,$s_6=$高品质的,$s_7=$顶级水平的$\}$. 现有编号为$A_1\sim A_5$的5种品牌的葡萄酒,表1给出了专业品酒师的评价结果.

表1 原始数据

编号	C & A	A & B	F & F	OQL
A_1	$s_{5.2}$	$s_{3.3}$	$s_{2.1}$	$s_{5.8}$
A_2	$s_{2.4}$	$s_{4.8}$	$s_{3.3}$	$s_{5.1}$
A_3	$s_{5.9}$	$s_{2.1}$	$s_{5.2}$	$s_{3.3}$
A_4	$s_{5.1}$	$s_{5.7}$	$s_{6.8}$	$s_{2.4}$
A_5	$s_{3.7}$	$s_{1.4}$	$s_{4.5}$	$s_{4.9}$

Step 1: 获取指标等化指标. 由表1和权重向量,即$s_{b_{ij}}=\omega_j\otimes s_{a_{ij}}$,得到各方案对应的语言向量分别为

$$A_1=(s_{0.52},s_{0.99},s_{0.82},s_{1.16}),$$

$$A_2=(s_{0.24},s_{1.44},s_{1.32},s_{1.02}),$$

$$A_3=(s_{0.59},s_{0.63},s_{2.08},s_{0.66}),$$

$$A_4=(s_{0.51},s_{1.71},s_{2.72},s_{0.48}),$$

$$A_5=(s_{0.37},s_{0.42},s_{1.68},s_{0.98}).$$

Step 2: 利用式(4)和(5)得到方案$A_1\sim A_5$的值对(均值,标准差)依次分别为(0.876,0.089)、(0.996,0.163)、(0.991,0.227)、(1.329,0.336)和(0.874,0.196). 5个方案中A_4平均水平和标准差明显高于其他4个方案,均值最大,说明A_4各评价要素整体水平最优,标准差最大,说明该产品特色突出. 方案中A_1均值较小、标准差最小,说明该产品特色不鲜明.

Step 3: 由式(6)计算得到比较矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0.500&0.208&0.292&0&0.542\\0.792&0.500&0.458&0&0.792\\0.708&0.542&0.500&0&0.750\\1&1&1&0.500&1\\0.458&0.208&0.250&0&0.500\end{bmatrix}.\tag{9}$$

Step 4: $\lambda\in[0.5,1]$取不同值时,应用式(8)计算各方案的优势总值,得到图1.

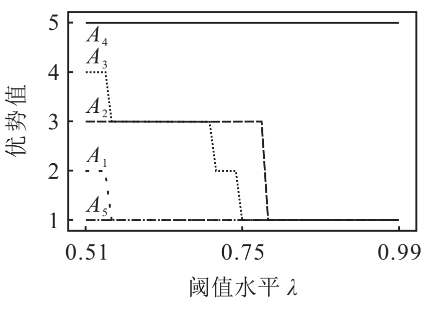

图1 不同阈值下的方案取值

从图1可以观察到,方案A_4最好,明显优于其他方案. 整体上看,A_1与A_5水平较为接近,A_2与A_3水

平较为接近. 当$\lambda \in (0.5, 0.542)$时,有$A_4 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5$,这与Wan[21]结果是一致的,当$\lambda \in [0.542, 1]$时,有$A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5$,与文献[18]结果一致.

那么,文献[18]和文献[21]哪个结果更好?实际上两者都不够好,虽然体现为精确排序,但排序的稳定性较差. 随着排序优势度的增加,方案间排序随机性在下降. 随着排序把握程度的增加,最终发现A_4优于其他方案,剩余4个方案最终归为一个等价类.

5 结　论

迭代均值算子是在语言均值基础上设计的,能够计算语言变量的聚合函数. 在锚定集基础上,应用迭代均值算子计算出每个置换后向量的迭代均值,得到该向量均值变量的概率分布,根据该分布可以计算集结函数变量的期望和变异程度. 本文提出的语言向量比较方法是一种能对非等距语言数据进行运算的方法,语言向量的比较是通过两个分布的对应关系,得到了二者的优劣关系和优劣的程度. 但本文的方法存在着不足,即随着准则数量的增加,技术锚定集会变得困难,因此下一步将研究相应的简化性质和算法.

参考文献(References)

[1] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernet, 1988, 18(1): 183-190.

[2] Lin L Z, Yeh H R. Fuzzy linguistic decision to provide alternatives to market mechanism strategies[J]. Expert Systems With Applications, 2010, 37(10): 6986-6996.

[3] Chen Y H, Wang T C, Wu C Y. Multi-criteria decision making with fuzzy linguistic preference relations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(3): 1322-1330.

[4] Xu Yeijun, Wang Huimin M. Approaches based on 2-tuple linguistic power aggregation operators for multi-attribute group decision making under linguistic environment[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(5): 3988-3997.

[5] Storra V. The weighted OWA operator[J]. Int J of Intelligent Systems, 1997, 12(2): 153-166.

[6] Pei Zheng, Ruan Da, Xu Yang. Handling linguistic information over the internet based on a multi-agent system[J]. Int J of Intelligent Systems, 2007, 22(5): 435-453.

[7] 陈岩, 李庭. 基于Choquet积分的直觉不确定语言信息集结算子及其应用[J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 842-852.
(Chen Y, Li T. Intuitionistic uncertain linguistic information aggregation operators based on Choquet integral and their application[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 842-852.)

[8] Wei Chanfu, Pei Zheng, Li Huamin. An induced OWA operator in coal mine safety evaluation[J]. J of Computer and System Sciences, 2012, 78(4): 997-1005.

[9] Peláez J I, Dona J M. A linguistic aggregation of majority additive operator[J]. Int J of Intelligent Systems, 2003, 18(7): 809-820.

[10] Yager R R. Generalized OWA aggregation operators[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 3(1): 93-107.

[11] Merigó J M, GilLafuente A M. Zhou L G, et al. Induced and linguisticgeneralizedtion operators and their application in linguistic group decision making[J]. Group Decision and Negotiation 2011, 21(4): 1-19.

[12] Xu Z S. On generalized induced linguistic aggregation operators[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(1): 17-28.

[13] Li Chunguang, Zeng Shouzhen, Pan Tiejun, et al. A method based on induced aggregation operators and distance measures to multiple attribute decision making under 2-tuple linguistic environment[J]. J of Computer and System Sciences, 2014, 80(7): 1339-1349.

[14] Merigó J M, Casanovas M. Fuzzy generalized hybrid aggregation operators and its application in decision making[J]. Int J of Fuzzy System, 2010, 12(1): 15-24.

[15] Liu Peida. Some generalized dependent aggregation operators with intuitionistic linguistic numbers and their application to group decision making[J]. J of Computer and System Sciences, 2013, 79(1): 131-143.

[16] Zhou Ligang, Chen Huayou. A generalization of the power aggregation operators for linguistic environment and its application in group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 26: 216-224.

[17] Gagolewski M. Spread measures and their relation to aggregation functions[J]. European J of Operational Research, 2015, 241(2): 469-477.

[18] Tao Zhifu, Chen Huayou, Zhou Ligang, et al. On new operational laws of 2-tuple linguistic information using Archimedean t-norm and s-norm[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 66: 156-165.

[19] 毛华. 偏序集理论在拟阵论中的应用[D]. 西安: 西安电子科技大学理学院, 2002: 5-6.
(Mao H. The applications of POSET theory in matroid theory[D]. Xi'an: School of Science, University of Electronic Science and Technology of Xi'an, 2002: 5-6.)

[20] Qiu U F, Li H Z. An information aggregation method of fuzzy preference relation models[J]. J of Engineering Muthematics, 2003, 20(3): 72-76.

[21] Wan S P. Some hybrid geometric aggregation operators with 2-tuple linguistic information and their applications to multi-attribute group decision making[J]. Int J of Computational Intelligence Systems, 2013, 6(4): 750-763.

(责任编辑:齐　霁)