

大加减速轴向移动系统自适应反步边界控制

刘 屿^{1,2}, 赵志甲^{1†}, 邬依林³

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640; 2. 广州现代产业技术研究院, 广州 511458; 3. 广东第二师范学院 计算机科学系, 广州 510310)

摘 要: 针对具有大加减速和系统参数不确定性的轴向移动系统振动主动控制问题, 基于 Lyapunov 直接法、经典反步控制和自适应技术, 提出自适应反步边界控制算法对系统振动进行主动控制, 并以符号函数处理边界扰动. 同时, 考虑不连续符号函数在工程上易引起输入颤振, 设计饱和函数替代控制器中符号函数, 以提升振动控制品质. 所设计的控制算法能够补偿系统参数不确定性, 确保闭环系统稳定性. 数字仿真结果验证了所提出的控制算法的有效性.

关键词: 轴向移动系统; S 曲线加减速法; 饱和函数; 自适应反步边界控制; Lyapunov 直接法

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Adaptive backstepping boundary control of axially moving system with high ac-/deceleration

LIU Yu^{1,2}, ZHAO Zhi-jia^{1†}, WU Yi-lin³

(1. School of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China; 2. Guangzhou Institute of Modern Industrial Technology, Guangzhou 511458, China; 3. Department of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou 510310, China)

Abstract: To solve the vibration control problem of an axially moving system with the system parametric uncertainties and high ac-/deceleration, an adaptive backstepping boundary control is proposed by using the Lyapunov's direct method, adaptive technique and classical backstepping control, where the signum function is adopted to handle the unknown boundary disturbance. Besides, due to the discontinuities of the sign function, a saturation function is designed to replace the sign function for avoiding the chattering problem and then the performance of the vibration control is improved. With the proposed control, the system parameter uncertainties are compensated and the stability of the closed-loop system is ensured. Finally, simulation results show the effectiveness of the proposed control algorithm.

Keywords: axially moving system; S-curve ac-/deceleration method; saturation function; adaptive backstepping boundary control; Lyapunov direct method

0 引 言

轴向移动结构是一类由偏微分方程(PDE)和常微分方程(ODE)共同描述的典型分布参数系统(DPS),其传统控制方法大多基于离散化模型进行控制设计,但未控高频模态可能导致系统不稳定,且控制器的阶数也将随模态的增加而增加,因而在实际工程应用中难以实现^[1-3].近年来,为避免上述问题,边界控制综合法(即边界控制融合其他先进控制技术)用于轴向移动系统的振动主动控制取得了大量

研究成果^[1-7].然而,除作者前期研究成果^[1-3]外,目前国内外的研究成果均假设轴向移动系统为匀速或变速运动.但在实际工程中,轴向移动系统通常是具有大加减速的高速运动,结构具有很强的几何非线性特性.因此,目前国内外的这些研究成果大都很难应用于具有大加减速轴向移动系统的振动主动控制.

面向无限维PDE模型的DPS边界控制问题,文献[8-12]提出了PDE反步(P-BKST)边界控制算法,该算法基于三角变换将源系统映射为稳定的目标系统,

收稿日期: 2016-05-04; 修回日期: 2016-08-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203060); 广东省科技计划项目(2016B090912003, 2016B010126001, 2015B010101003, 2014A090906010, 2014A090906009); 2017年华南理工大学中央高校基本科研业务费项目; 广东第二师范学院教授博士科研专项项目(2014ARF25).

作者简介: 刘屿(1977—), 副研究员, 从事分布参数系统控制、非线性理论与应用等研究; 赵志甲(1985—), 男, 博士生, 从事分布参数系统控制的研究.

†通讯作者. E-mail: zhao.zhijia@mail.scut.edu.cn

通过迭代选取 Lyapunov 函数, 最终设计控制律对系统进行镇定, 算法在保证系统稳定性的同时还避免了控制溢出等问题, 并已成功应用于梁、双曲线、波方程等静止的 PDE 系统. 然而, P-BKST 边界控制算法的核心问题在于求解 Volterra 映射核函数, 对一些较为复杂的 PDE 系统, 其核函数求解变得很困难^[13], 使得 P-BKST 边界控制方法的应用收到极大限制. 为了避免求解 Volterra 映射核函数, 作者前期研究成果^[3]将面向非线性 ODE 系统的经典反步技术 (O-BKST) 与边界控制相融合, 通过设计 O-BKST 边界控制算法实现对具有大加减速轴向移动系统的振动主动控制, 取得了很好的控制效果. 然而, 成果^[3]中并未考虑系统的不确定性. 通常, 大加减速轴向移动系统不仅具有扰动不确定性, 还具有诸如张力、刚度、质量等系统参数的不确定性. 因此, 为了提高结构的振动主动控制品质, 要求所设计的边界控制算法具有较好的鲁棒性和自适应能力, 以补偿系统的不确定性.

本文以作者所在团队自主研发贴片 (SMT) 中典型的大加减速轴向移动系统为研究对象. 首先, 基于 Lyapunov 直接法、S 曲线加减速法、反步和自适应技术, 提出自适应 O-BKST 边界控制算法用以轴向移动系统的振动主动控制, 算法在避免了求解核函数的同时, 还能补偿系统不确定性; 其次, 因控制器中的符号函数 $\text{sgn}(\cdot)$ 不连续, 在工程上易引起控制输入颤振, 因此设计了饱和函数 $\text{sat}(\cdot)$ 近似替代符号函数, 从而避免了控制器切换过快; 再次, 基于所设计的自适应 O-BKST 边界控制算法, 数学证明了闭环系统稳定性和系统状态变量有界性; 最后, 通过数字仿真验证了所设计控制算法的有效性.

1 皮带系统动力学模型

作如下简写假设: $(\cdot)(x, t) = (\cdot)$, $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x$, $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$.

图1为 SMT 中一类典型的轴向移动皮带系统, 它

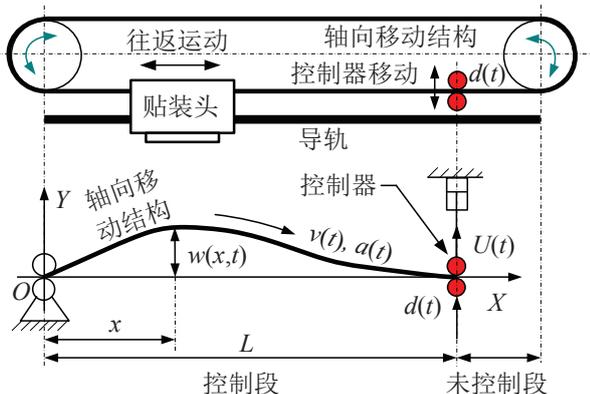


图1 典型的轴向移动皮带系统

带动贴装头沿 X 轴往返运动, 坐标系 OXY 的原点 O 位于其左端. 控制器 $U(t)$ 作用于皮带系统右端, 且方向向上, 并将皮带系统划分为控制段 (长度为 L) 和未控制段, 其中未控制段的振动视为作用于皮带系统右边界边界扰动 $d(t)$, 贴装头高速往返运动产生的振动视为作用于皮带系统的分布扰动 $f(x, t)$. $w(x, t)$ 为 t 时刻在皮带系统位置 x 处的振动偏移量, $v(t)$ 为皮带系统轴向运动速度, $a(t)$ 为皮带系统轴向运动的加速度.

图2为典型的 S 曲线加减速法. 其中: $t_1 \sim t_7$ 为 7 个时刻, a_a 和 a_d 分别为最大加速度和最大减速度. 则皮带系统轴向运动速度 $v(t)$ 可以表示为

$$v = \begin{cases} v_0 + \frac{J_1}{2}t^2, & 0 \leq t < t_1; \\ v_0 + \frac{J_1 T_1^2}{2} + a_a(t - t_1), & t_1 \leq t < t_2; \\ v_0 + \frac{J_1 T_1^2}{2} - \frac{J_2}{2}(t - t_2)^2 + a_a(T_2 + t - t_2), & t_2 \leq t < t_3; \\ v_m, & t_3 \leq t < t_4; \\ v_m - \frac{J_3}{2}(t - t_4)^2, & t_4 \leq t < t_5; \\ v_m - \frac{J_3 T_5^2}{2} - a_d(t - t_5), & t_5 \leq t < t_6; \\ v_m - \frac{J_3 T_5^2}{2} + \frac{J_4}{2}(t - t_6)^2 - a_d(T_6 + t - t_6), & t_6 \leq t < t_7. \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$v_m = v_0 + \frac{J_1 T_1^2}{2} + a_a(T_2 + T_3) - \frac{J_2 T_3^2}{2};$$

$$T_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 7, \quad t_0 = 0;$$

v_0 为初始轴向运动速度; $J_1 \sim J_4$ 分别为各时间段的加速度变化率.

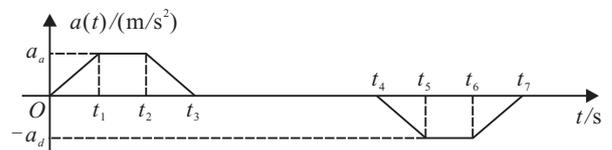


图2 典型的S曲线加减速法

本文所研究的轴向移动皮带系统模型将直接引用作者前期研究成果^[3], 即由文献 [3] 中的式 (11) 和 (12) 可得轴向移动皮带系统的控制方程为

$$m\ddot{w} + maw' + 2mv\dot{w}' + mv^2w'' + cw - \frac{T_0}{2}w'' - \frac{3EA}{2}(w')^2w'' + cvw' = f,$$

$$\forall (x, t) \in (0, L) \times [0, +\infty); \quad (2)$$

轴向移动皮带系统的边界条件为

$$\begin{cases} w(0, t) = 0, \\ m_c \ddot{w}(L, t) + \frac{T_0}{2} w'(L, t) + d_s \dot{w}(L, t) + \frac{EA}{2} [w'(L, t)]^3 - U - d = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\forall t \in [0, +\infty);$$

轴向移动皮带系统的初始条件为

$$v_0 = w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0. \quad (4)$$

假设 1 对于轴向运动速度 $v(t)$ 、大加减速 $a(t)$ 、未知边界扰动 $d(t)$ 和分布扰动 $f(x, t)$, 假定存在 $\bar{v}, \bar{a}, \bar{d}, \bar{f} \in \mathbf{R}^+$, 使得 $0 < v(t) \leq \bar{v}, |a(t)| \leq \bar{a}, |d(t)| \leq \bar{d}, \forall t \in [0, +\infty)$ 和 $|f(x, t)| \leq \bar{f}, \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty)$.

2 控制设计

基于 Lyapunov 直接法, 采用反步技术和自适应技术相结合, 在皮带系统右边界设计一个自适应 O-BKST 边界控制器, 用于系统振动的主动控制和系统参数不确定性的补偿, 并对闭环系统的稳定性和状态量的有界性进行了系统分析. 最后, 为了解决因控制器中不连续符号函数可能带来的颤振问题, 设计了饱和函数 $\text{sat}(\cdot)$ 近似替代符号函数, 从而避免在实际工程中控制器切换过快.

2.1 预备知识

为了便于随后章节的研究工作, 给出如下引理.

引理 1 设 $\varpi_1(x, t), \varpi_2(x, t) \in \mathbf{R}, \sigma > 0$. 其中: $x \in [0, L], t \in [0, +\infty)$. 则下列不等式成立^[14]:

$$|\varpi_1 \varpi_2| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \varpi_1 \right) (\sqrt{\sigma} \varpi_2) \right| \leq \frac{1}{\sigma} \varpi_1^2 + \sigma \varpi_2^2. \quad (5)$$

引理 2 设 $\varpi(x, t) \in \mathbf{R}$ 为定义在 $x \in [0, L], t \in [0, +\infty)$ 的函数, 且满足边界条件 $\varpi(0, t) = 0, \forall t \in [0, +\infty)$, 则下列不等式成立^[15]:

$$\varpi^2 \leq L \int_0^L (\varpi')^2 dx. \quad (6)$$

2.2 自适应 O-BKST 边界控制

将皮带系统模型 (2) 和 (3) 转换成如下状态空间形式:

$$\begin{cases} m \ddot{w} = f + \frac{T_0}{2} w'' + \frac{3EA}{2} (w')^2 w'' - maw' - c\dot{w} - 2mv\dot{w}' - mv^2 w'' - cvw', \\ \dot{z}_1(t) = z_2, \\ \dot{z}_2(t) = \frac{U}{m_c} + \frac{d}{m_c} - \frac{d_s}{m_c} z_2 - \frac{T_0}{2m_c} w'(L, t) - \frac{EA}{2m_c} [w'(L, t)]^3. \end{cases} \quad (7)$$

其中: $z_1(t) = w(L, t), z_2(t) = \dot{w}(L, t)$.

Step 1 设 $z_2(t)$ 为用于设计自适应 O-BKST 边

界控制的控制量, $z_v(t)$ 为 $z_2(t)$ 虚拟控制, 定义控制误差

$$e_z(t) = z_2 - z_v. \quad (8)$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V_1(t) = V_3(t) + V_4(t). \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} V_3(t) = \frac{\varsigma m}{2} \int_0^L (\dot{w} + vw')^2 dx + \frac{\varsigma T_0}{4} \int_0^L (w')^2 dx + \frac{\varsigma EA}{8} \int_0^L (w')^4 dx, \\ V_4(t) = \iota m \int_0^L x w' (\dot{w} + vw') dx, \end{cases} \quad (10)$$

ς 和 ι 为正常数.

引理 3 由式 (9) 给定的 Lyapunov 函数具有如下上界、下界:

$$0 \leq \chi_1 V_3(t) \leq V_1(t) \leq \chi_2 V_3(t), \quad (11)$$

其中 χ_1 和 χ_2 均为正常数.

证明 结合式 (5)、(6) 和 (10) 可得

$$|V_4(t)| \leq \frac{\iota m L}{2} \int_0^L (\dot{w} + vw')^2 dx + \frac{\iota m L}{2} \int_0^L (w')^2 dx \leq \chi V_3(t). \quad (12)$$

其中

$$\chi = \frac{2\iota m L}{\min(2\varsigma m, \varsigma T_0)}. \quad (13)$$

式 (12) 可以改写为

$$-\chi V_3(t) \leq V_4(t) \leq \chi V_3(t). \quad (14)$$

选取恰当的 χ 可得

$$\begin{cases} \chi_1 = 1 - \chi > 0, \\ \chi_2 = 1 + \chi > 1. \end{cases} \quad (15)$$

式 (15) 表明 $0 < \chi < 1$, 结合式 (13) 可得

$$\iota < \frac{\min(2\varsigma m, \varsigma T_0)}{2mL}. \quad (16)$$

将式 (15) 代入 (14) 可得

$$0 \leq \chi_1 V_3(t) \leq V_1(t) \leq \chi_2 V_3(t). \quad (17)$$

由此引理 3 得证. \square

对 Lyapunov 函数 $V_1(t)$ 求时间导数, 得

$$\dot{V}_1(t) = \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t). \quad (18)$$

将控制方程 (2) 代入 $\dot{V}_3(t)$, 并应用分部积分可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & \varsigma \int_0^L (\dot{w} + vw') f dx - \varsigma c \int_0^L (\dot{w} + vw')^2 dx + \\ & \frac{\varsigma T_0 v - 2\varsigma m v^3}{4} \{ [w'(L, t)]^2 - [w'(0, t)]^2 \} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\varsigma mv}{2} \dot{w}^2(L, t) + \frac{\varsigma EA}{2} \dot{w}(L, t)[w'(L, t)]^3 + \\ & \frac{3\varsigma EA v}{8} \{ [w'(L, t)]^4 - [w'(0, t)]^4 \} + \\ & \frac{\varsigma T_0 - 2\varsigma mv^2}{2} \dot{w}(L, t)w'(L, t). \end{aligned} \quad (19)$$

将控制方程(2)代入 $\dot{V}_4(t)$, 并应用分部积分可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) = & \frac{\iota T_0 L - 2\iota m Lv^2}{4} [w'(L, t)]^2 + \frac{\iota mL}{2} \dot{w}^2(L, t) + \\ & \frac{3\iota LEA}{8} [w'(L, t)]^4 - \frac{3\iota EA}{8} \int_0^L (w')^4 dx - \\ & \frac{\iota m}{2} \int_0^L \dot{w}^2 dx + \frac{\iota m}{2} \int_0^L v^2 (w')^2 dx - \\ & \frac{\iota T_0}{4} \int_0^L (w')^2 dx + \iota \int_0^L xw' f dx - \\ & \iota c \int_0^L xw'(\dot{w} + vw') dx. \end{aligned} \quad (20)$$

将式(8)、(19)和(20)代入(18)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & \frac{3EA(\varsigma v + \iota L)}{8} [w'(L, t)]^4 - \frac{3\varsigma EA v}{8} [w'(0, t)]^4 - \\ & \frac{m(\varsigma v - \iota L)}{2} (e_z^2 + z_v^2) - m(\varsigma v - \iota L) e_z z_v - \\ & \varsigma \left\{ \frac{2mv^2 - T_0}{2} w'(L, t) - \frac{EA}{2} [w'(L, t)]^3 \right\} \times \\ & (e_z + z_v) - \frac{\varsigma v(T_0 - 2mv^2)}{4} [w'(0, t)]^2 - \\ & \frac{2\varsigma mv^3 + 2\iota mLv^2 - \varsigma T_0 v - \iota T_0 L}{4} [w'(L, t)]^2 - \\ & \varsigma c \int_0^L (\dot{w} + vw')^2 dx - \frac{\iota m}{2} \int_0^L \dot{w}^2 dx - \\ & \frac{\iota T_0}{4} \int_0^L (w')^2 dx + \frac{\iota m}{2} \int_0^L v^2 (w')^2 dx - \\ & \frac{3\iota EA}{8} \int_0^L (w')^4 dx + \iota \int_0^L xw' f dx - \\ & \iota c \int_0^L xw'(\dot{w} + vw') dx + \varsigma \int_0^L (\dot{w} + vw') f dx. \end{aligned} \quad (21)$$

根据式(21), 虚拟控制 $z_v(t)$ 可以设计为

$$z_v(t) = -\kappa w'(L, t), \quad (22)$$

其中 κ 为正常数.

将式(22)代入(21)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & -\frac{\varsigma v(T_0 - 2mv^2)}{4} [w'(0, t)]^2 - \frac{m(\varsigma v - \iota L)}{2} e_z^2 - \\ & \frac{3\varsigma EA v}{8} [w'(0, t)]^4 + \left\{ \frac{\varsigma EA}{2} [w'(L, t)]^3 - \right. \\ & \left. \frac{2\varsigma mv^2 + 2\iota \kappa mL - 2\varsigma \kappa mv - \varsigma T_0}{2} w'(L, t) \right\} e_z - \\ & \frac{[2mk_1^2(\varsigma v - \iota L) + (T_0 - 2mv^2)(2\varsigma \kappa - \varsigma v - \iota L)]}{4} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [w'(L, t)]^2 - \iota c \int_0^L xw'(\dot{w} + vw') dx - \\ & \frac{4EA\varsigma \kappa - 3EA\varsigma v - 3EA\iota L}{8} [w'(L, t)]^4 - \\ & \frac{\iota m}{2} \int_0^L \dot{w}^2 dx - \varsigma c \int_0^L (\dot{w} + vw')^2 dx + \\ & \frac{\iota m}{2} \int_0^L v^2 (w')^2 dx - \frac{\iota T_0}{4} \int_0^L (w')^2 dx - \\ & \frac{3\iota EA}{8} \int_0^L (w')^4 dx + \iota \int_0^L xw' f dx + \\ & \varsigma \int_0^L (\dot{w} + vw') f dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Step 2 通过对系统参数的估计, 设计边界控制 $U(t)$ 来确保误差 $e_z(t)$ 收敛. 对式(8)求时间导数, 并结合式(7)和(22)可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_z(t) = & \frac{U}{m_c} + \frac{d}{m_c} - \frac{d_s}{m_c} z_2 - \frac{T_0}{2m_c} w'(L, t) - \\ & \frac{EA}{2m_c} [w'(L, t)]^3 + \kappa \dot{w}'(L, t). \end{aligned} \quad (24)$$

设 \hat{d}_s 、 \hat{m} 、 \hat{m}_c 、 \hat{T}_0 和 \widehat{EA} 分别为皮带系统参数 d_s 、 m 、 m_c 、 T_0 和 EA 的估计值, 并定义向量

$$\begin{cases} \theta(t) = [m, m_c, d_s, T_0, EA]^T, \\ \hat{\theta}(t) = [\hat{m}, \hat{m}_c, \hat{d}_s, \hat{T}_0, \widehat{EA}]^T, \\ \tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta} = [\tilde{m}, \tilde{m}_c, \tilde{d}_s, \tilde{T}_0, \widetilde{EA}]^T. \end{cases} \quad (25)$$

选取如下 Lyapunov 函数:

$$V_2(t) = V_1(t) + \frac{1}{2} m_c e_z^2(t). \quad (26)$$

对式(26)求时间导数, 并结合式(23)~(25)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & [Q\theta + U + d - d_s e_z] e_z - \frac{m(\varsigma v - \iota L)}{2} e_z^2 - \\ & \frac{2mk_1^2(\varsigma v - \iota L) + (T_0 - 2mv^2)(2\varsigma \kappa - \varsigma v - \iota L)}{4} \times \\ & [w'(L, t)]^2 - \frac{\varsigma v(T_0 - 2mv^2)}{4} [w'(0, t)]^2 - \\ & \frac{3\varsigma EA v}{8} [w'(0, t)]^4 - \frac{EA(4\varsigma \kappa - 3\varsigma v - 3\iota L)}{8} \times \\ & [w'(L, t)]^4 - \iota c \int_0^L xw'(\dot{w} + vw') dx - \\ & \frac{\iota m}{2} \int_0^L \dot{w}^2 dx - \varsigma c \int_0^L (\dot{w} + vw')^2 dx - \\ & \frac{\iota T_0}{4} \int_0^L (w')^2 dx - \frac{3\iota EA}{8} \int_0^L (w')^4 dx + \\ & \frac{\iota m}{2} \int_0^L v^2 (w')^2 dx + \iota \int_0^L xw' f dx + \\ & \varsigma \int_0^L (\dot{w} + vw') f dx. \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} Q(t) = & \left\{ (\kappa \varsigma v - \varsigma v^2 - \kappa \iota L) w'(L, t), \kappa \dot{w}'(L, t), \right. \\ & \left. \kappa w'(L, t), \frac{\varsigma - 1}{2} w'(L, t), \frac{\varsigma - 1}{2} [w'(L, t)]^3 \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

由式(27),自适应O-BKST边界控制可以设计为

$$U(t) = -Q\hat{\theta} - \bar{d}\text{sgn}(e_z) - \kappa_1 e_z, \quad (29)$$

其中 κ_1 为正的控制增益.

根据式(29),可以设计自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = GQ^T e_z - \zeta G\hat{\theta}. \quad (30)$$

其中: $G \in \mathbf{R}^{5 \times 5}$ 为对角正定矩阵, ζ 为正常数.

由式(25)和(30)可得

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -GQ^T e_z + \zeta G\tilde{\theta}. \quad (31)$$

2.3 稳定性分析

基于上述引理,本小节给出轴向移动皮带系统的稳定性理论分析.

定理1 对于给定的轴向移动皮带系统(2)和(3),在假设1和自适应O-BKST边界控制(29)作用下,当选择Lyapunov函数为

$$V(t) = V_2(t) + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T(t)G^{-1}\tilde{\theta}(t), \quad (32)$$

有如下结论成立:

1) 存在常数 $\vartheta, \varepsilon \in \mathbf{R}^+$,使得 $\dot{V}(t)$ 具有如下上界:

$$\dot{V}(t) \leq -\vartheta V(t) + \varepsilon. \quad (33)$$

2) 存在一个常数 $\varrho \in \mathbf{R}^+$,当 $t \rightarrow \infty$ 时,使得如下轴向移动皮带闭环系统状态量 $w(x, t)$ 一致有界:

$$|w(x, t)| \leq \varrho. \quad (34)$$

证明 对式(32)求时间导数可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{V}_2(t) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\theta}}^T(t)G^{-1}\tilde{\theta}(t) + \\ & \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T(t)G^{-1}\dot{\tilde{\theta}}(t). \end{aligned} \quad (35)$$

将式(27)、(29)和(31)代入(35)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \frac{-2mk_1^2(\zeta v - \iota L) + (T_0 - 2mv^2)(2\zeta\kappa - \zeta v - \iota L)}{4} \times \\ & [w'(L, t)]^2 - \frac{\zeta v(T_0 - 2mv^2)}{4} [w'(0, t)]^2 - \\ & \frac{EA(4\zeta\kappa - 3\zeta v - 3\iota L)}{8} [w'(L, t)]^4 + \frac{\zeta}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 - \\ & \left(\kappa_1 + d_s + \frac{\zeta mv - \iota mL}{2} \right) e_z^2 - \frac{\zeta}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 - \\ & \frac{3\zeta EA v}{8} [w'(0, t)]^4 - \frac{3\iota EA}{8} \int_0^L (w')^4 dx - \\ & \iota \left(\frac{T_0}{4} - \frac{mv^2}{2} - \frac{Lc}{\delta_1} - L\delta_3 \right) \int_0^L (w')^2 dx - \\ & (\zeta c - \iota Lc\delta_1 - \zeta\delta_2) \int_0^L (\dot{w} + vw')^2 dx - \\ & \frac{\iota m}{2} \int_0^L \dot{w}^2 dx + \left(\frac{\zeta}{\delta_2} + \frac{\iota L}{\delta_3} \right) \int_0^L f^2 dx, \end{aligned} \quad (36)$$

其中 δ_1, δ_2 和 δ_3 都为正常数.

根据式(16)和(36),选取恰当的参数 $\iota, \zeta, \kappa, \kappa_1,$

δ_1, δ_2 和 δ_3 满足下列不等式:

$$\begin{cases} \iota < \frac{\min(2\zeta m, \zeta T_0)}{2mL}, \\ (T_0 - 2mv^2)(2\zeta\kappa - \zeta v - \iota L) + \\ 2mk_1^2(\zeta v - \iota L) \geq 0, \\ 4\zeta\kappa - 3\zeta v - 3\iota L \geq 0, \\ T_0 - 2mv^2 \geq 0, \\ \tau_1 = \zeta c - \iota Lc\delta_1 - \zeta\delta_2 > 0, \\ \tau_2 = \frac{\iota T_0}{4} - \frac{\iota mv^2}{2} - \frac{\iota Lc}{\delta_1} - \iota L\delta_3 > 0, \\ \tau_3 = \kappa_1 + d_s + \frac{\zeta mv - \iota mL}{2} > 0. \end{cases} \quad (37)$$

将式(37)代入(36),并结合式(9)、(11)和(26),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\vartheta_1 V_3(t) - \tau_3 e_z^2 - \frac{\zeta}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 + \varepsilon \leq \\ & -\vartheta_2 V_1(t) - \tau_3 e_z^2 - \frac{\zeta}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 + \varepsilon \leq \\ & -\vartheta_3 V_2(t) - \frac{\zeta}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 + \varepsilon. \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} \vartheta_1 = & \min\left(\frac{2\tau_1}{\zeta m}, \frac{4\tau_2}{\zeta T_0}, \frac{3\iota}{\zeta}\right), \\ \vartheta_2 = & \frac{\vartheta_1}{\chi_2}, \\ \vartheta_3 = & \min\left(\vartheta_2, \frac{2\tau_3}{m c}\right), \\ \varepsilon = & \frac{\zeta}{2} \|\theta\|^2 + \left(\frac{\zeta}{\delta_2} + \frac{\iota L}{\delta_3}\right) \int_0^L f^2 dx \leq \\ & \frac{\zeta}{2} \|\theta\|^2 + \left(\frac{\zeta}{\delta_2} + \frac{\iota L}{\delta_3}\right) \bar{f}^2 L. \end{aligned}$$

根据矩阵 G 的性质,有

$$\frac{1}{2\epsilon_a} \|\tilde{\theta}\|^2 \leq \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T G^{-1}\tilde{\theta} \leq \frac{1}{2\epsilon_i} \|\tilde{\theta}\|^2, \quad (39)$$

其中 ϵ_a 和 ϵ_i 分别为矩阵 G 的最大和最小特征根.

由式(39)可进一步得到

$$-\frac{\zeta}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 \leq -\frac{\zeta\epsilon_i}{2} \tilde{\theta}^T G^{-1}\tilde{\theta}. \quad (40)$$

将式(40)代入(38),并结合(32)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\vartheta_3 V_2(t) - \frac{\zeta\epsilon_i}{2} \tilde{\theta}^T G^{-1}\tilde{\theta} + \varepsilon \leq \\ & -\vartheta V(t) + \varepsilon, \end{aligned} \quad (41)$$

其中 $\vartheta = \min(\vartheta_3, \zeta\epsilon_i)$.

对式(33)乘以 $e^{\vartheta t}$ 可得

$$\dot{V}(t)e^{\vartheta t} \leq -\vartheta V(t)e^{\vartheta t} + \varepsilon e^{\vartheta t}; \quad (42)$$

对式(42)积分可得

$$V(t) \leq V(0)e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta}. \quad (43)$$

应用不等式(6),并结合式(9)~(11)、(26)和(32)

得

$$\begin{aligned} \frac{\varsigma T_0}{4L} w^2(x, t) &\leq \frac{\varsigma T_0}{4} \int_0^L (w')^2 dx \leq \\ V_3(t) &\leq \frac{1}{\chi_1} V_1(t) + \frac{m_c}{2\chi_1} e_z^2(t) \leq \frac{1}{\chi_1} V(t). \end{aligned} \quad (44)$$

将式(43)代入(44)可得

$$\begin{aligned} |w(x, t)| &\leq \sqrt{\frac{4L}{\varsigma\chi_1 T_0} \left[V(0)e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta} \right]}, \\ \forall (x, t) &\in [0, L] \times [0, +\infty). \end{aligned} \quad (45)$$

由式(45)可得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |w(x, t)| &\leq \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4L \left[V(0)e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta} \right]}{\varsigma\chi_1 T_0}} &= \sqrt{\frac{4L\varepsilon}{\varsigma\chi_1 \vartheta T_0}}, \\ \forall x &\in [0, L]. \end{aligned} \quad (46)$$

对比式(46)和(34),可得

$$\varrho = \sqrt{\frac{4L\varepsilon}{\varsigma\chi_1 \vartheta T_0}} \in \mathbf{R}^+. \quad (47)$$

由此定理1得证. □

结合式(8)和(22),本文所设计的自适应O-BKST边界控制(29)可以为

$$\begin{aligned} U(t) = & - \left[\widehat{m}(\varsigma v \kappa - \varsigma v^2 - \iota L \kappa) + \frac{\widehat{T}_0(\varsigma - 1)}{2} + \right. \\ & \left. \kappa \kappa_1 + \widehat{d}_s \kappa \right] w'(L, t) - \kappa_1 \dot{w}(L, t) - \\ & \widehat{m}_c \kappa \dot{w}'(L, t) - \frac{\widehat{E}A(\varsigma - 1)}{2} [w'(L, t)]^3 - \\ & \widehat{d} \operatorname{sgn} [\dot{w}(L, t) + \kappa w'(L, t)]. \end{aligned} \quad (48)$$

2.4 颤振问题

在控制器(48)中,符号函数 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 用于处理边界扰动 $d(t)$.然而,符号函数不连续,它来回切换将给控制器输入 $U(t)$ 带来颤振问题,而颤振在实际工程应用中中将给控制器、执行器或其他相关机械结构带来损害,加速其磨损并缩短其使用寿命.因此,为了弱化或甚至避免颤振问题,设计如下饱和函数近似替代控制器(48)中的符号函数:

$$\operatorname{sat}(e_z, \epsilon) = \begin{cases} 1, & e_z \geq \epsilon; \\ e_z/\epsilon, & -\epsilon < e_z < \epsilon; \\ -1, & e_z \leq -\epsilon. \end{cases} \quad (49)$$

其中: ϵ 为一正数,且根据式(8)和(22)可得 e_z 为

$$e_z = \dot{w}(L, t) + \kappa w'(L, t). \quad (50)$$

用式(49)替换(48)中的符号函数,则自适应O-BKST边界控制器(48)变为(以 $u(t)$ 区别于 $U(t)$)

$$\begin{aligned} u(t) = & - \left[\widehat{m}(\varsigma v \kappa - \varsigma v^2 - \iota L \kappa) + \frac{\widehat{T}_0(\varsigma - 1)}{2} + \widehat{d}_s \kappa + \right. \\ & \left. \kappa \kappa_1 \right] w'(L, t) - \kappa_1 \dot{w}(L, t) - \widehat{m}_c \kappa \dot{w}'(L, t) - \\ & \frac{\widehat{E}A(\varsigma - 1)}{2} [w'(L, t)]^3 - \widehat{d} \operatorname{sat}(e_z, \epsilon). \end{aligned} \quad (51)$$

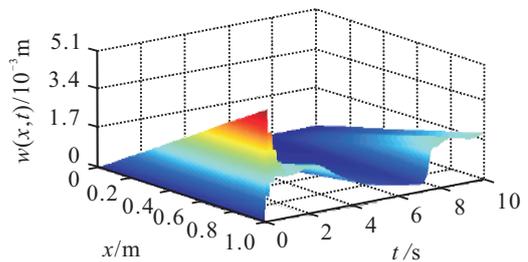
3 数字仿真

为了验证所设计的自适应O-BKST边界控制算法(48)和(51)的有效性,本节采用有限差分法(FDM)进行数值仿真,研究在未知外部扰动耦合作用下的大加减速轴向移动系统振动主动控制.

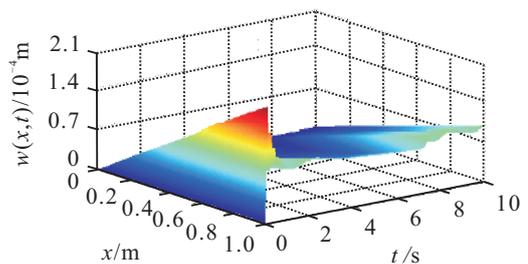
轴向移动皮带系统参数和控制系统参数分别为 $m = 1.0 \text{ kg/m}$, $m_c = 5.0 \text{ kg}$, $L = 1.0 \text{ m}$, $c = 1.0 \text{ Ns/m}^2$, $d_s = 0.25 \text{ Ns/m}$, $EA = 500 \text{ N}$, $T_0 = 9800 \text{ N}$, $\varsigma = 0.1$, $\iota = 10^{-3}$, $\zeta = 10^{-6}$, $\kappa = 10^3$, $\kappa_1 = 10^2$, $\epsilon = 0.005$.图2中的最大加减速为 $a_a = a_d = 3.5g$,其中 $g = 9.8 \text{ N/kg}$,且时间坐标为 $[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7] = [1, 2, 3, 7, 8, 9, 10] \text{ s}$.

未知分布扰动 $f(x, t)$ 和末端扰动 $d(t)$ 分别为

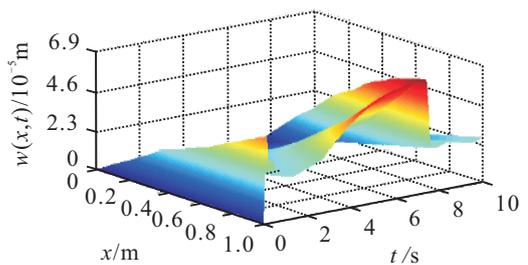
$$\begin{cases} f(x, t) = \frac{1}{1000} \left[10x + \sum_{i=1}^n \sin(i\pi x t) \right], \\ d(t) = 10 + \sum_{i=1}^n \cos(it), \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (52)$$



(a) 无控制式

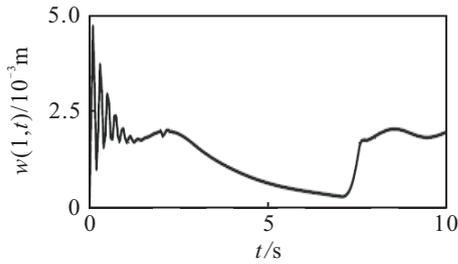


(b) 有控制式(48)

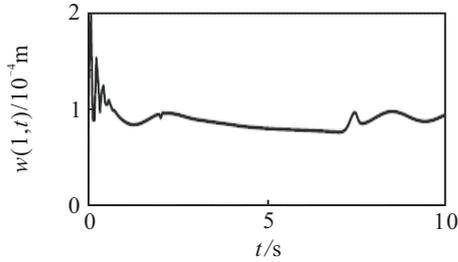


(c) 有控制式(51)

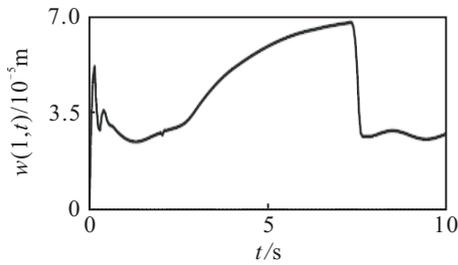
图3 皮带3D偏移量



(a) 无控制

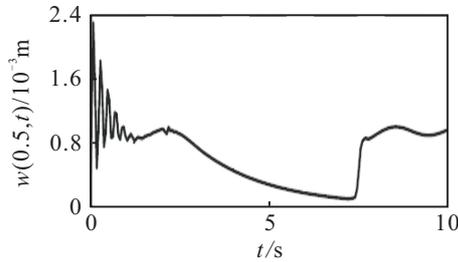


(b) 有控制式(48)

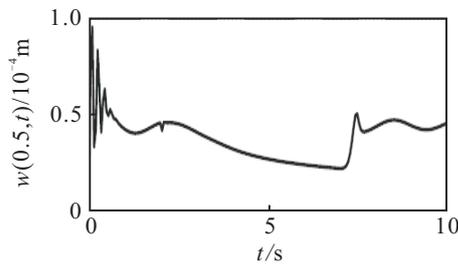


(c) 有控制式(51)

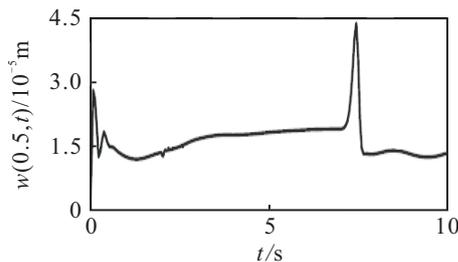
图4 皮带末端处(x=1.0m)偏移量



(a) 无控制

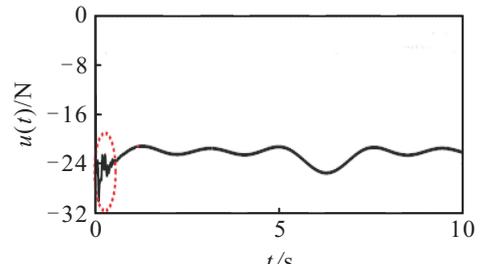


(b) 有控制式(48)

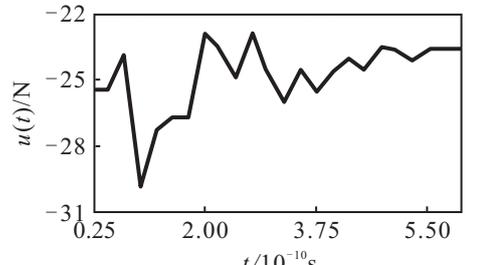


(c) 有控制式(51)

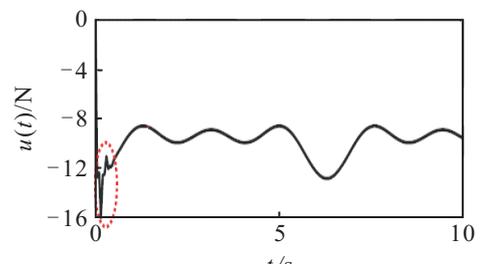
图5 皮带中点处(x=0.5m)偏移量



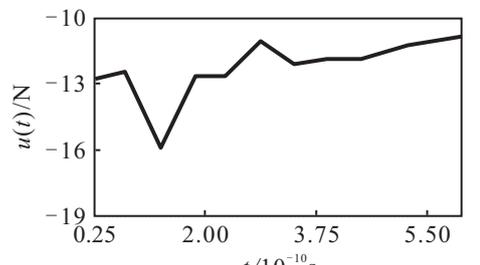
(a) 控制器(48)输入



(b) 控制器(48)输入局部放大



(c) 控制器(51)输入



(d) 控制器(51)输入局部放大

图6 控制输入

仿真结果如图3~图6所示. 图3给出了皮带系统三维(3D)振动偏移量,图4给出了皮带系统末端处(x = 1.0 m)振动偏移量,图5给出了皮带系统中点处(x = 0.5 m)振动偏移量,图6分别给出了自适应O-BKST边界控制算法(48)和(51)的控制输入. 由图3~图6可得到如下结论:

1) 当所设计的自适应O-BKST边界控制算法(48)和(51)分别作用于皮带系统后,其振动偏移量都有显著的减小,即皮带振动都得到很明显的抑制,表明本文所设计的控制算法(48)和(51)对抑制大加减速轴向移动皮带系统的振动都十分有效.

2) 在皮带系统中点处(x = 0.5 m)未放置执行器,但此处的振动偏移量也得到显著抑制,体现了边界控

制在柔性结构振动主动控制方面具有的独特优势.

3) 对比在控制算法(48)和(51)分别作用下的皮带振动偏移量,很明显控制算法(51)作用下的皮带振动偏移量更小,表明控制算法(51)对抑制皮带系统振动具有更好的控制效果.

4) 对比控制算法(48)和(51)的控制输入,控制算法(51)的控制输入更小,在实际工程中更易实现.同时,在0.025~0.6s时间段内(其中 $\Delta t = 0.025$ s为本文采用FDM的时间步长),对比二者的控制输入,控制算法(48)的控制输入震荡明显更为厉害,其缘由为式(48)中存在不连续的符号函数.然而,在控制算法(51)中,已采用饱和函数近似替代了符号函数,控制输入震荡得到显著抑制.因此,控制算法(51)在工程上更易实现和应用.

4 结论

本文研究了轴向移动系统在具有大加减速和系统参数不确定情况下的振动主动控制问题.基于系统无穷维偏微分方程模型和Lyapunov直接法,将面向ODE的传统反步控制与自适应技术、S曲线加减速法相结合,设计了自适应O-BKST边界控制对轴向移动系统的振动进行抑制.在工程应用上,控制器中的符号函数不连续性可能使控制输入存在颤振问题,因此设计了饱和函数用以近似替代符号函数,以提高控制系统性能.本文提出的自适应O-BKST边界控制既能避免因模型降阶法而产生的控制溢出问题,又能补偿系统参数的不确定性,还确保了闭环控制系统的稳定性和系统状态变量的有界性.仿真结果表明,本文所设计的自适应O-BKST边界控制算法能够很好地抑制系统的振动,验证了其有效性.

参考文献(References)

- [1] 刘屿, 翁轩, 吴忻生, 等. 大加减速轴向移动系统的振动控制[J]. 振动工程学报, 2014, 27(6): 878-884.
(Liu Y, Weng X, Wu X S, et al. Vibration control of an axially moving system with high ac-/deceleration[J]. J of Vibration Engineering, 2014, 27(6): 878-884.)
- [2] 刘屿, 郭依林, 赵志甲. 大加减速轴向移动系统鲁棒边界控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(10): 1771-1776.
(Liu Y, Wu Y L, Zhao Z J. Robust boundary control of an axially moving system with high ac-deceleration[J]. Control and Decision, 2014, 29(10): 1771-1776.)
- [3] Liu Y, Zhao Z J, He W. Boundary control of an axially moving accelerated/decelerated belt system[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(17): 3849-3866.
- [4] Yang K J, Hong K S, Matsuno F. Energy-based control of axially translating beams: Varying tension, varying speed, and disturbance adaptation[J]. IEEE Trans on Control System Technology, 2005, 13(6): 1045-1054.
- [5] Li Y G, Aron D, Rahn C D. Adaptive vibration isolation for axially moving string: Theory and experiment[J]. Automatica, 2002, 38(3): 379-390.
- [6] Nguyen Q C, Hong K S. Simultaneous control of longitudinal and transverse vibrations of an axially moving string with velocity tracking[J]. J of Sound and Vibration, 2012, 331(13): 3006-3019.
- [7] Qu Z. An iterative learning algorithm for boundary control of a stretched moving string[J]. Automatica, 2002, 38(5): 821-827.
- [8] Krstic M, Smyshlyaev A. Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(9): 750-758.
- [9] Smyshlyaev A, Guo B Z, Krstic M. Arbitrary decay rate for Euler-Bernoulli beam by backstepping boundary feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(5): 1134-1140.
- [10] Liu W J, Krstic M. Backstepping boundary control of Burgers' equation with actuator dynamics[J]. Systems & Control Letters, 2000, 41(4): 291-303.
- [11] Meurer T, Kugi A. Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters: combining backstepping and differential fitness[J]. Automatica, 2009, 45(5): 1182-1194.
- [12] Guo B Z, Jin F F. Backstepping approach to the arbitrary decay rate for Euler-Bernoulli beam under boundary feedback[J]. Int J of Control, 2010, 83(10): 2098-2106.
- [13] 李晓光, 刘金锟. 面向偏微分方程的连续反演控制算法综述[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(7): 825-832.
(Li X G, Liu J K. Continuum backstepping control algorithms in partial differential equation orientation: A review[J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(7): 825-832.)
- [14] Rahn C. Mechatronic control of distributed noise and vibration[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [15] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

(责任编辑: 齐 霖)