

基于切换滑模控制的抖振抑制方法

方世鹏[†], 胡昌华, 扈晓翔, 李红增

(火箭军工程大学 控制工程系, 西安 710025)

摘要: 针对一类复合干扰有界的不确定仿射非线性系统, 提出一种切换滑模控制方法. 首先利用 3 条滑模面将系统扩展动态空间划分为 3 个子空间, 其中两个子空间组成滑动区, 通过设计合适的切换规则和滑模切换增益, 可以使滑动区满足到达条件和滑动条件, 同时能够减小控制律不连续出现的区域和增益大小. 为了增加设计的灵活性, 给出一种可行设计方法. 仿真实验结果表明, 切换滑模控制方法在抑制抖振的同时具有较高的控制精度.

关键词: 滑模控制; 抖振抑制; 切换滑模控制; 不连续增益

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Chattering reduction method based on switched sliding mode control

FANG Shi-peng[†], HU Chang-hua, HU Xiao-xiang, LI Hong-zeng

(Department of Control Engineering, Hi-Tech Institute of Xi'an, Xi'an 710025, China)

Abstract: In this paper, a switched sliding mode control (SSMC) method with three sliding surfaces is proposed for a class of uncertain affine nonlinear systems. The system extended dynamic space is divided into three subspaces by the three sliding surfaces. The sliding region consists of two subspaces. The sliding region satisfies the reaching condition and the sliding condition with appropriate switching rules and switching gains. By using SSMC, the control law is discontinuous only within a certain range near the origin while the switching gain of the control law is reduced. Such characteristic is beneficial to suppress the chattering phenomenon. For practical application, a feasible design method is also designed which can guarantee system states ultimately bounded stable. By adjusting the design parameters, the size of the ultimate bound can be adjusted. Simulation results show that SSMC has high control precision while suppressing chattering.

Keywords: sliding mode control (SMC); chattering reduction; switched sliding mode control (SSMC); switching gain

0 引言

滑模控制 (SMC) 因其对于匹配不确定性具有良好的鲁棒性而得到广泛应用^[1-2]. 然而, 由于符号函数的存在, 该方法会带来抖振问题^[3], 抖振会损耗系统能量, 激发系统高频未建模动态, 破坏系统性能, 严重时损坏系统部件.

为了能够实际应用滑模控制方法, 国内外学者提出了一系列抑制抖振的方法. 经典的方法如边界层法, 利用饱和函数或双曲正切函数^[4]代替符号函数, 从而实现控制律连续以达到抑制抖振的目的. 该方法不足之处在于所得到的准滑模控制在边界层内失去了不变性, 会产生稳态误差. 降低切换增益法, 因为抖振主要是由符号函数带来的不连续切换项造成的, 所以减小切换增益可有效地抑制抖振, 例如利用干扰观测器、神经网络等在线逼近干扰^[5-6], 从而减小干

扰不确定上界, 达到减小切换增益的目的. 该方法需要设计额外的观测器, 增加了设计复杂性, 且对观测器性能提出了较高要求. 减小切换频率方法, 文献 [7] 利用两条滑模面交替作用, 从而降低控制律切换频率, 一定程度上有助于抑制抖振. 然而该方法依旧没有改变控制律切换的本质, 且在系统接近原点时作用非常有限. 傅健等^[8-9]提出了一种单向滑模控制方法, 该方法本质上是连续的, 具有非常广阔的应用前景, 但是其较慢的收敛速度^[10]仍需要进一步研究. 另外还有其他方法来抑制抖振, 如动态滑模方法^[11]、滤波方法^[12]、连续滑模控制^[13]等. 这些方法都需要付出一定的代价, 如何在较小代价下抑制抖振, 并同时保证滑模控制良好的控制精度是值得研究的问题.

本文从减小控制律不连续出现的区域和增益大小两个角度来抑制抖振, 提出一种切换滑模控制方

收稿日期: 2016-04-21; 修回日期: 2016-06-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61573365); 国家自然科学基金青年基金项目 (61304001).

作者简介: 方世鹏 (1984—), 男, 博士生, 从事滑模变结构控制的研究; 胡昌华 (1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、故障预报、诊断与可靠性工程、寿命预测等研究.

[†]通讯作者. E-mail: shipeng_001@163.com

法(SSMC). SSMC具备两个特点:一是将不连续控制律限制在滑动区中一条滑模面靠近原点的一定区域内;二是不连续增益会随着系统状态远离原点而减小. 这两个特点都非常有利于抖振的抑制,同时系统的稳态精度可以得到保证,能够使得闭环系统渐近稳定. 为了便于应用切换滑模控制并进一步抑制抖振,本文给出一种可行的设计方案,得益于SSMC的第1个特点,可以使得控制律将在除最终边界外的地方处处连续,理论上能够完全消除由于符号函数带来的抖振问题. 虽然连续控制律下闭环系统最终有界稳定,但是最终界可以通过修改设计参数进行调整,而典型的边界层等方法在不引起抖振的前提下最终界是受限于系统本身的. 最后利用数字仿真对该方法进行了验证.

1 切换滑模控制器设计

1.1 问题描述

考虑以下非线性系统^[8]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\eta}. \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ 为系统的状态变量; $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in R^{n \times n}$ 且可逆; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in R^n, \boldsymbol{u} \in R^n$ 为系统控制输入; $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T \in R^n$ 表示系统模型不确定性及受到的干扰的总和,且满足有界条件

$$\begin{aligned} \Xi = \{ \boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T \in R^n, \\ |\eta_i| \leq F_i, F_i \in R, i = 1, 2, \dots, n \}. \end{aligned}$$

1.2 切换滑模控制器设计

设计稳定的滑模面组

$$s_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}_j \int \boldsymbol{x} = 0. \quad (2)$$

其中: $\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{x}) = [s_{j1}(x_1), \dots, s_{jn}(x_n)]^T, j = 0, 1, 2$ 代表滑模面组编号; $\boldsymbol{\lambda}_j = \text{diag}\{\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn}\}$ 为正设计常数对角矩阵; $\int x_i$ 表示 $\int_0^t x_i(\tau) d\tau$, 定义系统状态 x_i 的扩展状态为 $(\int x_i, x_i)$. 后续在不引起混淆的情况下为了简便起见, 状态 x_i 即表示扩展状态 $(\int x_i, x_i)$, 若设计参数满足 $\lambda_{1i} > \lambda_{0i} > \lambda_{2i}$, 则稳定

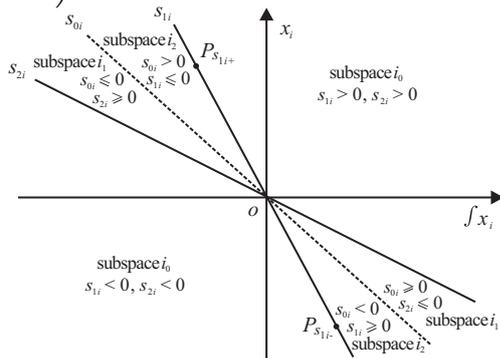


图1 滑模面划分二维空间示意

滑模面将空间 $(\int x_i, x_i)$ 分成3个状态子空间,如图1所示.

为加快收敛速度,趋近律采用指数型趋近律

$$\dot{\boldsymbol{s}}_j = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{s}_j - \boldsymbol{k}_j(t) \text{sign}(\boldsymbol{s}_j).$$

其中: $\boldsymbol{b} = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$ 为设计正常数对角矩阵, $\boldsymbol{k}_j(t) = \text{diag}\{k_{j1}, \dots, k_{jn}\}$ 为满足滑模到达条件的参数, $\text{sign}(\boldsymbol{s}_j)$ 代表 $[\text{sign}(s_{j1}), \dots, \text{sign}(s_{jn})]^T$. 于是各组滑模面所确定的控制律为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{s_j} = -\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x}) \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \right. \\ \left. \boldsymbol{\lambda}_j \left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \int \boldsymbol{x} \right) + \boldsymbol{k}_j(t) \text{sign}(\boldsymbol{s}_j) \right), \end{aligned}$$

其中 $k_{ji} > F_i$ 满足滑模面到达条件. 对于系统扩展状态 $(\int x_i, x_i)$ 而言,可以建立如下的切换控制规则: 当状态 x_i 位于子空间 i_j 时,使用滑模面 s_{ji} 所确定的控制律. 取 \boldsymbol{u}_{s_j} 相同项为

$$\hat{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x}) (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}),$$

定义切换项为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{qi} = \lambda_{ji} \left(x_i + b_i \int x_i \right) + k_{ji} \text{sign}(s_{ji}), \\ \left(\int x_i, x_i \right) \in \text{subspace } i_j, \end{aligned} \quad (3)$$

则切换滑模控制器为

$$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_q, \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{u}_q = [u_{q1}, \dots, u_{qn}]^T$. 式(4)实际上构成了一类状态依赖型的切换控制器,由式(3)可知,控制作用会在滑模面处进行切换.

2 稳定性分析及切换增益设计

2.1 稳定性证明

定理1 考虑非线性系统(1),稳定滑模面如式(2)所示,若滑模切换增益满足鲁棒性条件 $k_{ji} > F_i$, 滑模面参数满足 $\lambda_{0i} = (\lambda_{1i} + \lambda_{2i})/2$, 则如式(4)所示的切换滑模控制器能够保证闭环系统状态 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 渐近稳定.

证明 定义由子空间 i_1 和子空间 i_2 组成的区域为滑动区. 首先证明滑动区满足到达条件,将控制律(4)代入系统(1),可得闭环系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}_q + \boldsymbol{\eta}. \quad (5)$$

当状态 x_i 位于子空间 i_0 时,有

$$u_{qi} = \lambda_{0i} \left(x_i + b_i \int x_i \right) + k_{0i} \text{sign}(s_{0i}),$$

同时根据式(5)及条件 $k_{ji} > F_i$,滑模动态 $s_{0i} = x_i + \lambda_{0i} \int x_i$ 满足

$$\begin{aligned} s_{0i} \dot{s}_{0i} &= s_{0i} (\dot{x}_i + \lambda_{0i} x_i) = \\ s_{0i} (-b_i x_i - u_{qi} + \eta_i + \lambda_{0i} x_i) &= \end{aligned}$$

$$s_{0i} \left(-b_i \left(x_i + \lambda_{0i} \int x_i \right) - k_{0i} \text{sign}(s_{0i}) + \eta_i \right) = -b_i s_{0i}^2 - k_{0i} |s_{0i}| + \eta_i s_{0i} \leq 0. \quad (6)$$

式(6)等号仅当 $s_{0i} = 0$ 时成立,说明切换滑模控制器满足滑模面 s_{0i} 到达条件,这符合设计初衷.而滑模面 i_1 属于子空间 i_1 ,从而证明滑动区是可达的.

其次证明滑动区满足滑动条件.当状态 x_i 位于滑动区时,分别在子空间 i_1 和 i_2 取类Lyapunov函数

$$V_{1i} = \frac{1}{2} s_{1i}^2, V_{2i} = \frac{1}{2} s_{2i}^2. \quad (7)$$

易知 V_{1i} 、 V_{2i} 满足 $V_{1i} \geq 0, V_{2i} \geq 0$, 并且仅当 $s_{1i} = 0, s_{2i} = 0$ 时 $V_{1i} = 0, V_{2i} = 0$. $V_{1i} = 0, V_{2i} = 0$ 对应于子空间 i_1 中 $s_{1i} = 0$ 和子空间 i_2 中 $s_{2i} = 0$. 对式(7)求导,并根据式(3)和(5)及条件 $k_{ji} > F_i$, 可得

$$\dot{V}_{1i} = s_{1i} \dot{s}_{1i} \leq -(k_{1i} - \eta_i) |s_{1i}| \leq 0,$$

$$\dot{V}_{2i} = s_{2i} \dot{s}_{2i} \leq -(k_{2i} - \eta_i) |s_{2i}| \leq 0.$$

且仅当 $s_{1i} = s_{2i} = 0$ 时, $\dot{V}_{1i} = \dot{V}_{2i} = 0$. 当状态 x_i 位于切换面 s_{0i} 上时,有 $x_i + \lambda_{0i} \int x_i = 0$,若滑模面参数满足 $\lambda_{0i} = (\lambda_{1i} + \lambda_{2i})/2$,代入滑模动态 s_{1i} 和 s_{2i} , 则可得

$$s_{1i} |_{s_{0i}=0} = -s_{2i} |_{s_{0i}=0} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \int x_i.$$

从而可得

$$V_{1i} |_{s_{0i}=0} = \frac{1}{2} (s_{1i} |_{s_{0i}=0})^2 = \frac{1}{2} (s_{2i} |_{s_{0i}=0})^2 = \lim_{s_{0i} \rightarrow 0} V_{2i}.$$

说明类Lyapunov函数 V_{1i} 和 V_{2i} 在切换面 s_{0i} 处是连续的.根据分段连续Lyapunov函数稳定定理(PQLF)^[14],当 $t \rightarrow \infty$ 时,在子空间 i_1 中有 $s_{1i} \rightarrow 0$,在子空间 i_2 中有 $s_{2i} \rightarrow 0$.如图1所示,子空间 i_1 中 $s_{1i} = 0$ 和子空间 i_2 中 $s_{2i} = 0$ 对应于 $\left(\int x_i, x_i \right)$ 坐标系下的原点,即可知在切换控制作用下,子空间 i_1 中和子空间 i_2 中有 $x_i \rightarrow 0$.再由状态 x_i 任意性可知, $x_i \rightarrow 0$ 对于任意系统状态都满足,因此可得 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \rightarrow 0$.从而可以看到,状态 x_i 最终会到达子空间1和子空间2组成的滑动区,并在滑动区内收敛到原点. \square

2.2 切换增益设计

本节将通过设计合适的切换增益 k_{ji} 来限制控制律不连续出现的区域和增益大小.

定理2 考虑非线性系统(1),控制器如式(4)所示,若设计参数满足

$$b_i < \lambda_{0i}, \quad (8)$$

则存在合适的切换增益 k_{ji} ($j = 0, 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$),使得控制律(4)在滑模面 s_{1i} 和 s_{2i} 上是连续

的,且在滑模面 s_{0i} 上满足下式时是连续的:

$$|x_i| > \frac{2\lambda_{0i}(F_i + \varepsilon)}{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i)}, \quad (9)$$

其中 ε 为一任意小的正常数.

证明 由式(3)可知,控制律发生跳变的项为 u_{qi} ,发生的时机是当状态 x_i 穿越滑模面 s_{ji} 时.将滑模面 s_{1i} 分成如图1所示的两条射线 $OP_{s_{1i+}}$ 和 $OP_{s_{1i-}}$.下面给出切换增益设计的同时证明 u_{qi} 连续.当状态 x_i 位于滑模面 s_{1i} 上时,由式(3)可以看出, u_{qi} 将进行切换,设计此时 k_{0i}, k_{2i} 如下:

$$\lim_{s_{1i} \rightarrow 0} k_{0i} = F_i + \varepsilon, \quad (10)$$

$$k_{2i} |_{s_{1i}=0} =$$

$$F_i + \varepsilon + (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2. \quad (11)$$

易知式(10)、(11)满足鲁棒性条件 $k_{ji} > F_i$,当状态 x_i 位于射线 $OP_{s_{1i+}}$ 上时,若系数满足式(8),则有

$$\text{sign}(s_{0i}) = \text{sign}(s_{2i}) = \text{sign}\left(x_i + b_i \int x_i\right) = 1.$$

将式(10)、(11)代入(3),可得

$$\begin{aligned} u_{qi} \Big|_{\left(\int x_i, x_i\right) = OP_{s_{1i+}}} &= \\ \lambda_2 \left(x_i + b_i \int x_i \right) + \left(F_i + \varepsilon + (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + \right. \right. & \\ \left. \left. b_i \int x_i \right| / 2 \right) &= \\ (\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) \left(x_i + b_i \int x_i \right) / 2 + (F_i + \varepsilon) &= \\ \lim_{\left(\int x_i, x_i\right) \rightarrow OP_{s_{1i+}}} u_{qi}. & \end{aligned}$$

其中: $\left(\int x_i, x_i \right) = OP_{s_{1i+}}$ 表示状态 x_i 位于射线 $OP_{s_{1i+}}$ 上, $\left(\int x_i, x_i \right) \rightarrow OP_{s_{1i+}}$ 表示状态 x_i 位于子空间 i_0 并趋于射线 $OP_{s_{1i+}}$,说明 u_{qi} 在 $OP_{s_{1i+}}$ 上是连续的.同理可证, u_{qi} 在状态 x_i 位于射线 $OP_{s_{1i-}}$ 上时也是连续的,因此可知,当系统状态 x_i 穿越滑模面 s_{1i} 时控制律是连续的.

当状态 x_i 位于滑模面 s_{2i} 上时,由式(3)可以看出, u_{qi} 将在 u_{qi0} 与 u_{qi1} 之间进行切换,设计此时 k_{0i}, k_{1i} 如下:

$$\lim_{s_{2i} \rightarrow 0} k_{0i} = \begin{cases} F_i + \varepsilon + (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}), & b_i > \lambda_{2i}; \\ \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2, & b_i > \lambda_{2i}; \\ F_i + \varepsilon, & b_i \leq \lambda_{2i}. \end{cases} \quad (12)$$

$$k_{1i} |_{s_{2i}=0} = \begin{cases} F_i + \varepsilon, & b_i > \lambda_{2i}; \\ F_i + \varepsilon + (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}), & b_i \leq \lambda_{2i}; \\ \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2, & b_i \leq \lambda_{2i}. \end{cases} \quad (13)$$

易知式(12)、(13)满足鲁棒性条件 $k_{ji} > F_i$, 同样可以证明, 当状态 x_i 穿越滑模面 s_{2i} 时控制律是连续的.

当状态 x_i 进入滑动区后, 若最后停留在滑模面 s_{0i} 上, 则 u_{qi} 将在 u_{qi1} 与 u_{qi2} 之间进行切换, 可设计此时的 k_{1i}, k_{2i} 如下:

$$k_{1i} |_{s_{0i}=0} = \begin{cases} (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2, \\ (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2 > F_i + \varepsilon; \\ F_i + \varepsilon, (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2 \leq F_i + \varepsilon; \end{cases} \quad (14)$$

$$\lim_{s_{0i} \rightarrow 0} k_{2i} = \begin{cases} (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2, \\ (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2 > F_i + \varepsilon; \\ F_i + \varepsilon, (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2 \leq F_i + \varepsilon. \end{cases} \quad (15)$$

易知式(14)和(15)满足鲁棒性条件 $k_{ji} > F_i$, 同样可以证明, 当状态 x_i 穿越滑模面 s_{0i} 时, 在条件

$$(\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + b \int x_i \right| / 2 > F_i + \varepsilon$$

下, 控制律是连续的. 当状态 x_i 位于滑模面 s_{0i} 上时, 满足 $\int x_i = -x_i / \lambda_{0i}$, 代入

$$(\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left| x_i + b_i \int x_i \right| / 2 > F_i + \varepsilon,$$

即可得条件(9). □

上述设计给出了切换增益 k_{ji} 位于各滑模面的值, 相当于 k_{ji} 在各子空间的边界值, 只要设计切换增益 k_{ji} 在各子空间连续且满足式(10) ~ (15), 就能保证定理2所述的连续控制律. 另外, 由式(10) ~ (15)可知, 有

$$\lim_{s_{1i} \rightarrow 0} k_{0i}, \lim_{s_{2i} \rightarrow 0} k_{0i}, k_{1i} |_{s_{0i}=0}, k_{1i} |_{s_{2i}=0}, k_{2i} |_{s_{1i}=0}, \lim_{s_{0i} \rightarrow 0} k_{2i} > F_i. \quad (16)$$

则在设计切换增益 k_{ji} 满足连续条件的同时还需要满足 $k_{ji} > F_i$, 于是根据定理1的要求, 即能保证闭环系统渐近稳定.

3 一种可行设计

3.1 切换滑模控制分析

注意到状态 x_i 位于滑模面 s_{0i} 上时 $\text{sign}(s_{1i}) = -\text{sign}(s_{2i}) = -\text{sign}(x_i)$, 可以计算控制律不连续时的不连续增益为

$$|u_{qi} |_{s_{0i}=0} - \lim_{s_{0i} \rightarrow 0} u_{qi}| =$$

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_{1i} \left(x_i + b_i \int x_i \right) + k_{1i} \text{sign}(s_{1i}) - \right. \\ & \left. \lambda_{2i} \left(x_i + b_i \int x_i \right) - k_{2i} \text{sign}(s_{2i}) \right| = \\ & \left| (\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \left(x_i + b_i \int x_i \right) - \right. \\ & \left. 2(F_i + \varepsilon) \text{sign}(s_{2i}) \right| = \\ & 2(F_i + \varepsilon) - (\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i) |x_i| / \lambda_{0i}. \quad (17) \end{aligned}$$

由式(17)可知最大的不连续增益出现在原点处, 此时最大的不连续增益和普通滑模切换增益相同, 为

$$\max |u_{qi} |_{s_{0i}=0} - \lim_{s_{0i} \rightarrow 0} u_{qi}| = 2(F_i + \varepsilon). \quad (18)$$

可以看到相对于普通滑模, 只有当状态 x_i 经过滑模面 s_{0i} , 且满足 $|x_i| < 2\lambda_{0i}(F_i + \varepsilon) / ((\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i))$ 时才会出现控制律不连续的情况. 同时, 切换滑模控制器的不连续增益总是小于普通滑模的切换增益, 最大的不连续增益和普通滑模切换增益相同, 如式(17)、(18)所示. 由式(17)可知, $(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i) |x_i| / \lambda_{0i}$ 起到了减小不连续增益的目的, 且这种作用会随着状态 x_i 远离原点而增大, 当 $|x_i|$ 增大到 $2\lambda_{0i}(F_i + \varepsilon) / ((\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i))$ 时, 控制律将保持连续.

通过上述分析可以看出, 切换滑模控制方法能降低不连续增益的大小和出现的区域, 这种特点有利于抖振的抑制, 与此同时能够使得闭环系统渐近稳定, 保证了稳态精度, 而付出的代价仅有相对复杂的设计过程.

3.2 部分连续控制律设计

虽然切换滑模控制一定程度上减小了切换增益值, 但是不连续控制依然存在. 同时为了便于应用切换滑模控制器, 需要较为简单的切换增益设计方法. 基于此, 利用切换滑模将控制律不连续限制在靠近原点的一定区域内的特点, 本文给出一种切换滑模连续控制律设计方案, 并给出控制律连续时的最终界.

令 $b_i = \lambda_{2i}$, 根据式(10)、(12)可设计 k_{0i} 如下:

$$k_{0i} = F_i + \varepsilon. \quad (19)$$

设计 k_{1i}, k_{2i} 如下:

$$k_{1i} = \alpha_{1i} k_{1i} |_{s_{2i}=0} + (1 - \alpha_{1i}) k_{1i} |_{s_{0i}=0}, \quad (20)$$

$$k_{2i} = \alpha_{2i} k_{2i} |_{s_{1i}=0} + (1 - \alpha_{2i}) \lim_{s_{0i} \rightarrow 0} k_{2i}. \quad (21)$$

其中

$$\alpha_{1i} = \frac{\lambda_{0i} - \left| x_i \right| / \int x_i}{\lambda_{0i} - \lambda_{2i}},$$

$$\alpha_{2i} = \frac{|x_i / \int x_i| - \lambda_{0i}}{\lambda_{1i} - \lambda_{0i}}.$$

易知式(19)~(21)在各个子空间中是连续的,且满足式(10)~(15). α_{1i} 、 α_{2i} 分别在子空间 i_1 和 i_2 中满足 $0 \leq \alpha_{1i} \leq 1, 0 < \alpha_{2i} \leq 1$, 由条件(16)可知, k_{1i} 和 k_{2i} 在子空间 i_1 和 i_2 满足 $k_{1i}, k_{2i} > F_i$. 于是如式(19)~(21)所示的切换增益值可以保证闭环系统渐近稳定,同时还满足定理2所示的部分连续控制律.

为了解决系统状态接近原点时的控制律不连续问题以及增加设计灵活性,引入设计参数 $N_i, 0 \leq N_i \leq F_i + \varepsilon$, 用于在控制律不连续区域、增益大小和稳态精度之间进行权衡,具体将在后面说明. 建立如图2所示的可调矩形区域 Ψ_i , 有

$$\Psi_i = \left\{ \left(\int x_i, x_i \right) \middle| |x_i| \leq \frac{(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})N_i}{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i)}, \right. \\ \left. \left| \int x_i \right| \leq \frac{2N_i}{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i)} \right\}. \quad (22)$$

易证矩形区域 Ψ_i 的对角线与滑模面 s_{0i} 重合. 设计当状态 x_i 位于矩形区域 Ψ_i 外时采用切换滑模控制器, 在矩形区域 Ψ_i 内时采用滑模面 s_{0i} 所确定的等效控制律, 则有

$$\hat{u}_{s_{0i}} = \mathbf{u}_{s_0}(i), \\ \mathbf{u}_{s_0} = -g^{-1}(\mathbf{x}) \left(f(\mathbf{x}) + \mathbf{b}x + \lambda_0 \left(\mathbf{x} + \mathbf{b} \int \mathbf{x} \right) \right). \quad (23)$$

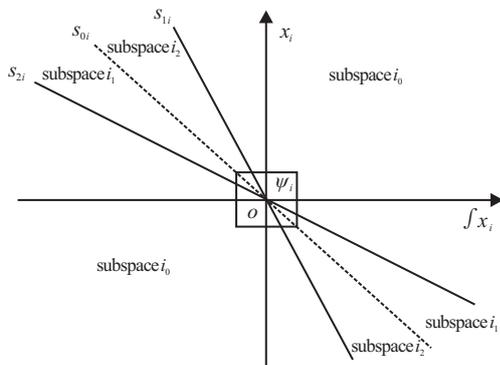


图2 最终界示意

由于矩形区域 Ψ_i 包含原点,类似于定理1的证明过程,由切换滑模控制器的渐近稳定性可知,系统状态最终会收敛到矩形区域 Ψ_i , 即系统最终界为 Ψ_i . 由式(23)可知,控制律在矩形区域 Ψ_i 内是连续的,控制律不连续发生在 Ψ_i 之外的区域,包括 Ψ_i 边界以及滑模面 s_{0i} 上满足下式的区域:

$$\frac{2\lambda_{0i}N_i}{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i)} \leq |x_i| \leq \\ \frac{2\lambda_{0i}(F_i + \varepsilon)}{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i)}. \quad (24)$$

当系统状态穿越 Ψ_i 边界时,会出现控制律跳变的情况,但是 Ψ_i 边界的状态恒定特性使得系统状态不会停留在 Ψ_i 边界上,因此不会出现反复跳变的情况,于是不连续增益出现在滑模面 s_{0i} 上如式(24)所示的区域. 根据式(17),此时不连续增益最大值出现在 $|x_i| = 2\lambda_{0i}N_i / ((\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i))$ 处,为

$$\max |u_{qi1}|_{s_{0i}=0} - \lim_{s_{0i} \rightarrow 0} u_{qi2} = \\ 2(F_i + \varepsilon) - 2N_i. \quad (25)$$

N_i 起着协调控制律不连续区域、增益大小和最终界大小的作用. 当 N_i 在 $0 \leq N_i \leq F_i + \varepsilon$ 内逐渐增大时,由式(22)可知,系统的最终界会增大,由式(24)、(25)可知,控制律不连续的区域和增益都会减小. 考虑两种极端的情况:当 $N_i = 0$ 时, Ψ_i 等同于原点,可知系统将会渐近收敛到原点,但是不连续控制律区域与不连续增益也最大,在零点时达到与普通滑模相同的切换增益值;当 $N_i = F_i + \varepsilon$ 时,控制律在状态空间几乎处处连续 ($N_i = F_i + \varepsilon$ 边界除外),此时最终界也达到最大,但是由式(24)可知,可以通过调节参数 λ_{ji} 减小 $2\lambda_{0i} / ((\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(\lambda_{0i} - b_i))$ 的值来达到减小最终界的目的,从而提高控制精度.

4 仿真实验

考虑受干扰二阶非线性系统^[15]

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}.$$

其中

$$f(\mathbf{x}) = [-2x_1 + 2x_1x_2 + 2\sin x_2, -x_2 \cos x_1]^T, \\ \mathbf{x} = [x_1, x_2]^T, g(\mathbf{x}) = \text{diag}\{1, 1\}, \\ \boldsymbol{\eta} = [0.1 \sin t, 0.1 \cos t]^T,$$

初始值为 $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = -0.2$. 采用可调区域的切换滑模控制,可调区域如式(22)所示,切换滑模控制律如式(4)所示,等效控制律如式(23)所示,切换增益如式(19)~(21)所示,参数 ε 设定为0.01.

在实际系统中,控制切换的实现是非理想的,即切换不可能是瞬时的,因此延时是产生抖振很重要的一个原因,这相当于用滞后的状态反馈进行控制. 假设系统延时相当于在控制器中引入了 $\tau = 0.02$ s 的时滞,则切换滑模控制律变为

$$\mathbf{u} = -g^{-1}(\mathbf{x}(t - \tau))(f(\mathbf{x}(t - \tau)) + \\ \mathbf{b}x(t - \tau) + \mathbf{u}_q(\mathbf{x}(t - \tau))).$$

等效控制律为

$$\hat{u}_{s_{0i}} = \mathbf{u}_{s_0}(i),$$

$$\mathbf{u}_{s_0} = -g^{-1}(\mathbf{x}(t-\tau))\left(f(\mathbf{x}(t-\tau)) + \mathbf{b}\mathbf{x}(t-\tau) + \lambda_0\left(\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{b} \int \mathbf{x}(t-\tau)\right)\right).$$

为了与本文方法进行对比,采用普通滑模并利用边界层法抑制抖振. 为了保证鲁棒性,设置饱和函数增益为0.11,控制律为

$$\mathbf{u} = -g^{-1}(\mathbf{x}(t-\tau))(f(\mathbf{x}(t-\tau)) + \lambda_1\mathbf{x}(t-\tau) + 0.11\text{sat}(\mathbf{s}_1(\mathbf{x}(t-\tau))/\varphi)),$$

其中 φ 代表边界层的宽度. 经过仿真实验, $\varphi = 0.01$ 时可以较好地抑制抖振现象. 为了使实验结果更加直观, $g(\mathbf{x})$ 采用单位矩阵,因此 u_1 、 u_2 可直接控制 x_1 、 x_2 .

图3显示了参数设定为 $\lambda_{11} = 10, \lambda_{01} = 7.5, b_1 = \lambda_{21} = 5, N_1 = 0.05$ 和 $N_1 = 0.11$ 时 x_1 的轨迹以及控制输入 u_1 . 从图3(a)中可以看出,切换滑模相对于带有边界层的滑模控制具有更快的收敛速度,通过调整 N_1 的大小可以达到调节稳态误差的目的. 图3(b)则说明 N_1 还能调整控制律不连续出现的区域和增益大小, $N_1 = 0.05$ 时 u_1 在少部分时间段出现了控制律不连续现象;当 $N_1 = F_1 + \varepsilon = 0.11$ 时, u_1 除0.5s左右系统状态进入最终界时出现了一次跳变外处处连续.

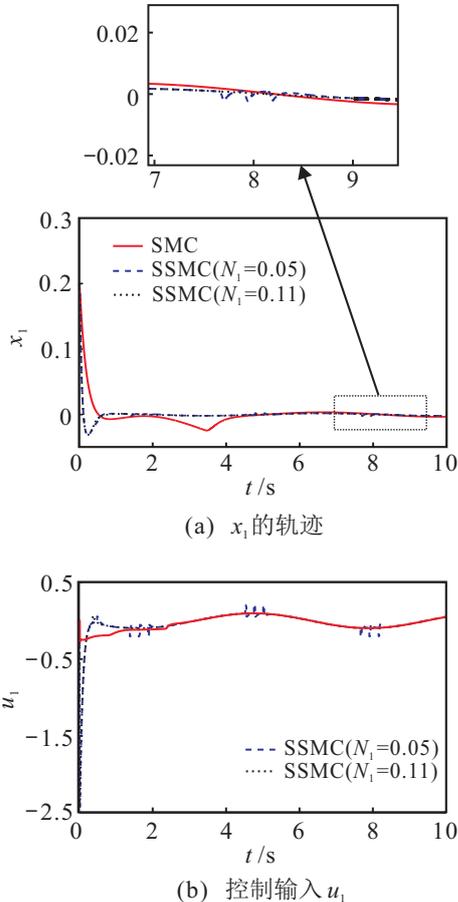


图3 系统状态 x_1 及控制输入 u_1

图4显示了参数设定为 $N_2 = 0.11, \lambda_{12} = 10, \lambda_{02} = 7.5, b_2 = \lambda_{22} = 5$ 以及 $\lambda_{12} = 20, \lambda_{02} = 12.5, b_2 = \lambda_{22} = 5$ 时系统状态 x_2 的轨迹以及控制输入 u_2 . 从图4(a)中可以看出,切换滑模具有更好的控制精度,且通过调节参数可以达到减小稳态误差的目的;图4(b)则说明调节稳态误差时控制律依旧保持连续,这是利用边界层等方法抑制抖振时很难做到的.

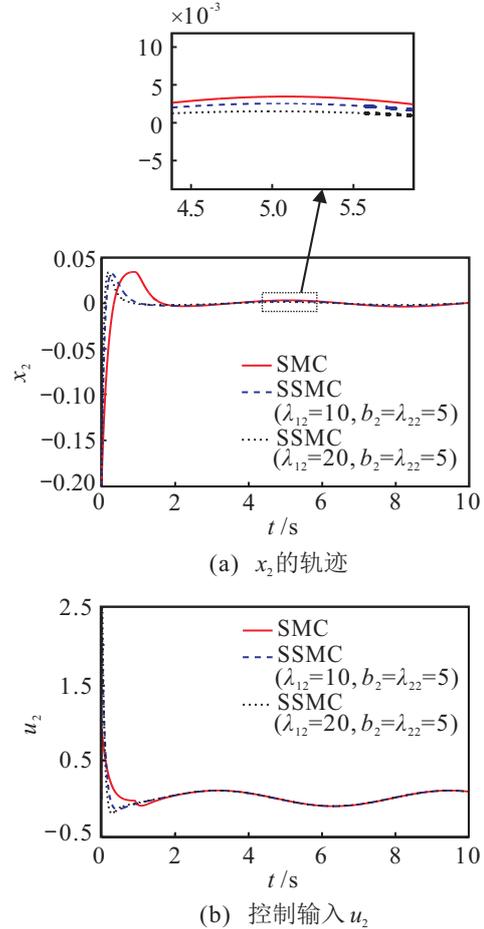


图4 系统状态 x_2 及控制输入 u_2

5 结论

本文研究了如何利用3条滑模面在保证系统稳定的情况下减小控制律不连续出现的区域和增益. 通过分析可知,只要设计合适的切换增益,切换滑模控制就能将可能发生控制律不连续的区域限制在滑模面的一定区域内,且系统状态越远离原点,不连续增益越小,这种特性对于抖振抑制非常有利. 为了进一步抑制抖振,可在控制律不连续的区域内采用等效控制律,则控制律几乎处处连续(最终界边界除外),而且通过调节设计参数可以在控制律不连续区域、不连续增益大小和稳态精度之间进行权衡,给工程应用提供更多选择. 切换滑模控制实质上是利用了两条滑模面决定的控制律在两个子空间交替作用时的一部分重叠性来起到减小控制律不连续区域和

不连续增益的目的. 如何将这种作用推广到单输入单输出高阶非线性系统, 值得继续深入研究.

参考文献(References)

- [1] 李慧洁, 蔡远利. 基于双幂次趋近律的滑模控制方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 498-502.
(Li H J, Cai Y L. Sliding mode control with double power reaching law[J]. Control and Decision, 2016, 31(3): 498-502.)
- [2] Shah H A, Patel A T, Shah S K, et al. Controller design via sliding mode control approach of induction motor — A survey[C]. The 4th Int Conf on Advanced Computing & Communication Technologies (ACCT). Washington DC, 2014: 541-546.
- [3] 刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 407-418.
(Liu J K, Sun F C. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control[J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(3): 407-418.)
- [4] Lee T H, Tan K K, Huang S. Adaptive friction compensation with a dynamical friction model[J]. IEEE/ASME 523 Trans on Mechatronics, 2011, 16(1): 133-140.
- [5] Wang Junxiao, Li Shihua H, Yang Jun, et al. Extended state observer based sliding mode control for PWM based DC-DC buck power converter systems with mismatched disturbances[J]. IET Control Theory and Applications, 2015, 9(5): 579-586.
- [6] Wai Rong-jong, Muthusamy R. Fuzzy neural network inherited sliding mode control for robot manipulator including actuator dynamics[J]. IEEE Trans on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 24(2): 274-287.
- [7] Shyu K K, Tsai Y W, Yu Y, et al. Dynamic output feedback sliding mode control design for a class of linear unmatched uncertain systems[J]. Int J of Control, 2000, 73(16): 1463-1474.
- [8] 傅健, 吴庆宪, 姜长生, 等. 带状态约束的非线性系统单向辅助面滑模控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(9): 1288-1294.
(Fu J, Wu Q X, Jiang C S, et al. Robust sliding mode control with unidirectional auxiliary surfaces for nonlinear system with state constraints[J]. Control and Decision, 2011, 26(9): 1288-1294.)
- [9] Fu Jian, Wu Qing-xian, Mao Ze-hui. Chattering-free SMC with unidirectional auxiliary surfaces for nonlinear system with state constraints[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2013, 9(12): 4793-4809.
- [10] 傅健. 近空间飞行器非线性飞控系统鲁棒性控制[D]. 南京: 南京航空航天大学自动化学院, 2013.
(Fu J. Robust sliding mode control for near space vehicle[D]. Nanjing: College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2013.)
- [11] Koshkouei A J, Burnham K J, Zinober A S I. Dynamic sliding mode control design[J]. IEEE Proc of Control Theory and Applications, 2005, 152(4): 392-396.
- [12] Lin F J, Hsieh H J, Chou P H. Tracking control of a two-axis motion systems via a filtering type sliding mode control with radial basis function network[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(4): 655-671.
- [13] Chalanga A, Kamal S, Bandyopadhyay B. A new algorithm for continuous sliding mode control with implementation to industrial emulator setup[J]. IEEE/ASME Trans on Mechatronics, 2015, 20(5): 2194-2204.
- [14] Johansson M, Rantzer A. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 555-559.
- [15] 姜长生, 吴庆宪, 费树岷, 等. 现代非线性系统鲁棒控制基础[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2012, 187-188.
(Jiang C S, Wu Q X, Fei S M, et al. Robust control basis of modern nonlinear systems[M]. Harbin: Publishing House of Harbin Institute of Technology, 2012: 187-188.)

(责任编辑: 李君玲)