

# 受限指令预设性能自适应反演控制器设计

张 杨<sup>1†</sup>, 胡云安<sup>2</sup>

(1. 海军航空工程学院 青岛校区, 山东 青岛 266041; 2. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001)

**摘 要:** 针对一类含参数不确定性的输入和状态受限的非线性系统, 提出一种受限指令预设性能自适应反演控制器设计方法. 采用自适应反演方法, 同时考虑输入和状态受限构建受限指令滤波器, 以解决“计算膨胀”的问题; 引入伪控制减缓方法对误差进行补偿; 最后考虑了补偿跟踪误差的瞬态性能. 通过 Lyapunov 理论对所设计的控制器进行稳定性分析, 并通过仿真实例验证了所提出方法的正确性和有效性.

**关键词:** 非线性系统; 受限指令; 预设性能; 自适应反演

中图分类号: TP273 文献标志码: A

## Prescribed performance adaptive backstepping controller design based on constrained command filtered

ZHANG Yang<sup>1†</sup>, HU Yun-an<sup>2</sup>

(1. Qingdao Branch, Naval Aeronautical and Astronautical University, Qingdao 266041, China; 2. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China)

**Abstract:** For a class of nonlinear uncertain systems with input constraints and states constraints, a prescribed performance adaptive backstepping controller based on constrained command filtered is designed. By combining the adaptive backstepping technique, the constrained command filters are adopted to accommodate the constraints on input and states to avoid the tedious analytic computations of time derivatives. The pseudo control hedging(PCH) techniques are combined with the command filter to compensate the error. The scheme achieves preselected bounds on the transient performance on the compensation tracking error. Based on the Lyapunov stability theory, the proposed controller is designed. Simulations verify the correctness and effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** nonlinear systems; constrained command; prescribed performance; adaptive backstepping

## 0 引 言

自适应反演方法能够很好地处理一类非线性系统的参数不确定性问题<sup>[1]</sup>. 然而, 在控制器设计过程中需要对中间控制变量反复求导, 随着阶次的增加会出现“计算膨胀”的问题. 为此, Swaroop 等<sup>[2]</sup>提出了动态面方法, 并在此基础上开展了广泛的研究<sup>[3-4]</sup>. 然而, 采用动态面方法结合自适应反演方法时, 传统的一阶线性滤波的动态面方法无法解决输入受限问题. 由于输入受限, 所设计的控制率可能不适用, 传统动态面方法不能保证闭环系统的稳定性, 因此, 在设计控制器时应考虑输入受限对系统稳定性的影响<sup>[5]</sup>.

一般而言, 解决输入受限有两种思路: 第 1 种为抗饱和和补偿控制方法<sup>[6-7]</sup>, 第 2 种为低增益反馈控制<sup>[8]</sup>. 对于第 1 种思路, 人们开展了较为广泛的研究,

指令滤波方法就是其中一种. 该方法能对系统的控制输入和变化率进行限幅, 在确保系统稳定的前提下减少系统的跟踪误差, 并且可以较好地解决“计算膨胀”的问题, 从而得到了较为广泛的应用<sup>[9-11]</sup>. 文献 [9] 采用指令滤波反演研究了幅值和速度受限情况下的飞行器纵向控制; 文献 [10] 进一步考虑了外部扰动和未知非线性, 结合模糊理论为飞行器仿射非线性模型设计了自适应模糊控制器; 在文献 [10] 的基础上, 文献 [11] 进一步考虑了执行机构卡死的情况, 设计了飞行器自适应反演控制器. 然而, 以上都是结合飞行器进行控制器的具体设计. 据笔者了解, 受限指令滤波的理论研究是在文献 [12] 的基础上, 更多的研究是结合模糊控制或者神经网络进行控制器设计<sup>[13-14]</sup>, 或者从仿射系统拓展到非仿射系统<sup>[15]</sup>. 因此, 人们对

收稿日期: 2016-07-27; 修回日期: 2016-09-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674090); 中国博士后科学基金项目(2015M572693).

作者简介: 张杨(1989—), 男, 博士生, 从事反演、预设性能控制的研究; 胡云安(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、智能系统等研究.

†通讯作者. E-mail: 2906517@163.com

输入受限的稳态性能研究较多,而对于控制受限的预先设定的瞬态性能分析较少.

Miller等<sup>[16]</sup>早在1991年便对线性系统设定了预先设定的目标,保证了跟踪误差在规定时间内收敛到预定的值. Bedhlioulis等<sup>[17]</sup>提出了一种新的控制器设计方法,以保证在跟踪误差收敛到预先设定的任意小区域的同时可以确保收敛速度和超调量满足预先设定的条件.在此基础上,得到了一系列研究成果<sup>[18-21]</sup>.之前的文献在分析严格反馈的预设性能反演时,大多假设已知期望轨迹的高阶导数<sup>[19-21]</sup>,而本文引入指令滤波算法后,则不需要对期望轨迹进行高阶次求导,放宽了假设条件.

相比于上述研究成果,同时考虑输入和状态受限情况,并研究误差的瞬态性能问题更有意义.为此,本文在考虑输入和状态受限的基础上引入预设性能方法,同时考虑超调量和调节时间等瞬态性能,不仅能够解决输入和状态受限的问题,而且能够确保跟踪误差收敛到一个预先设定的区域.本文的主要优点在于:1)不需要计算中间控制变量的导数,简化了自适应反演设计;2)通过限制中间虚拟控制信号的幅值和变化速率,就能够满足系统对状态变量和控制输入信号的约束要求;3)结合预设性能方法的优势,在稳态误差分析基础上考虑了误差的瞬态性能,弥补了传统受限指令滤波方法的不足.最后通过理论推导证明了所提出方法的正确性和有效性.

## 1 问题描述及准备

### 1.1 问题描述

考虑如下一类SISO非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \psi_1^T(x_1)\theta, \\ \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \psi_i^T(\bar{x}_i)\theta, \\ \dot{x}_n = f_n(x) + g_n(x)u + \psi_n^T(x)\theta, \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$  为系统状态变量;  $u \in R$ ,  $y \in R$  分别为系统输入量和输出量. 定义  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i$ ,  $f_i(\bar{x}_i)$  和  $g_i(\bar{x}_i)$  为已知的连续函数,  $\theta$  为未知参数向量,  $\psi_i(\bar{x}_i)$  为已知回归函数向量.  $u$  和  $x_i$  为受限制条件的约束,具体表达式将在下文给出.

本文的控制目标如下.

**控制目标1** 设计自适应反演控制量  $u$ , 使得系统在输入和状态都受限的情况下,即  $u \leq |u_M|$ ,  $x_i^d \leq |M_i|$  时,在  $x_1$  跟踪  $y^d$  的同时保证闭环系统中的所有信号都有界.

**控制目标2** 补偿跟踪误差  $z_1$  (具体定义见第2

节)满足预先设定的瞬态和稳定性能.

对系统(1)给出如下基本假设.

**假设1** 期望轨迹  $y^d$  及其一阶导数  $\dot{y}^d$  连续有界;

**假设2** 存在常数  $g_{i0} > 0$ , 使得  $|g_i(\bar{x}_i)| > g_{i0}$  成立;

**假设3** 输入和状态受限的幅度和速率已知.

为了处理受限问题,引入如下定义.

**定义1** 给定正常数  $M$ , 函数  $S(\cdot) : R \rightarrow R$  是连续、非递减函数,如果它满足下列性质:1)对所有的  $x \neq 0$ , 有  $xS(x, M) > 0$ ; 2)对所有的  $x \in R$ , 有  $|S(x, M)| \leq M$ . 则称  $S(\cdot)$  为  $(-M, M)$  上的线性饱和函数.

### 1.2 受限指令滤波

由于系统状态受限,采用自适应反演方法时虚拟控制变量也受限.将虚拟控制变量  $x_i^d$  作为受限指令滤波器的输入,输出为考虑约束的  $x_i^c$  及其一阶导数  $\dot{x}_i^c$ , 设计的滤波器表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ 2\xi\omega_n \left[ S_R \left( \frac{\omega_n^2}{2\xi\omega_n} [S_M(x_i^d) - q_1] \right) - q_2 \right] \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x^c \\ \dot{x}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $q_1$  和  $q_2$  为滤波器状态,  $\xi$  为阻尼比,  $\omega_n$  为自然频率,  $S_M(\cdot)$  和  $S_R(\cdot)$  分别为幅值与速率饱和函数,  $u_M$  为饱和幅值. 本文采用双曲正切函数对饱和函数  $S_M$  近似处理,描述如下:

$$S_M(v) = u_M \times \tanh\left(\frac{v}{u_M}\right) = u_M \frac{e^{v/u_M} - e^{-v/u_M}}{e^{v/u_M} + e^{-v/u_M}}. \quad (3)$$

### 1.3 预设性能函数与误差变换

**定义2**<sup>[17]</sup> 连续函数  $\rho(t) : R_+ \rightarrow R_+$  称为性能函数,并且同时满足以下两个条件:1)  $\rho(t)$  为正且严格递减; 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_\infty > 0$ .

控制目标2可通过如下不等式实现:

$$-M\rho(t) < z(t) < \rho(t), \quad z(0) > 0; \quad (4)$$

$$-\rho(t) < z(t) < M\rho(t), \quad z(0) < 0. \quad (5)$$

其中  $M \in [0, 1]$  为设计参数. 同时性能函数取为

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty.$$

将式(4)和(5)所示的约束不等式,通过误差转换函数转化为非约束形式,转换函数定义为

$$z(t) = \rho(t)S(\varepsilon). \quad (6)$$

其中:  $\varepsilon$  为转化误差,  $S(\varepsilon)$  为光滑可逆且严格递增函

数,满足

$$-M < S(\varepsilon) < 1, z(0) > 0; \quad (7)$$

$$-1 < S(\varepsilon) < M, z(0) < 0. \quad (8)$$

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} S(\varepsilon) = -M, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} S(\varepsilon) = 1, \end{cases} z(0) > 0. \quad (9)$$

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} S(\varepsilon) = -1, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} S(\varepsilon) = M, \end{cases} z(0) < 0. \quad (10)$$

**注1** 由式(9)和(10)可知,如果 $\varepsilon$ 有界,则式(7)和(8)成立.由式(6)和 $\rho(t) > 0$ 可知:1)当 $z(0) > 0$ 时, $-M < S(\varepsilon) < 1$ ,所以 $-M\rho(t) < \rho(t)S(\varepsilon) = z(t) < \rho(t)$ ;2)当 $z(0) < 0$ 时, $-1 < S(\varepsilon) < M$ ,所以 $-\rho(t) < \rho(t)S(\varepsilon) = z(t) < M\rho(t)$ .因此,只要 $\varepsilon(t) \in \ell_\infty$ (即有界), $\forall t \in [0, \infty)$ ,则可以保证预先设定的性能.

## 2 受限指令预设性能自适应反演控制器设计及稳定性分析

本文假设跟踪误差为

$$z_i = x_i - x_i^c, 1 \leq i \leq n; \quad (11)$$

并定义补偿跟踪误差为

$$\bar{z}_i = z_i - \zeta_i, 1 \leq i \leq n. \quad (12)$$

其中为防止控制信号和中间变量受限时,自适应过程过度适应系统输入特性,采用伪控制减缓方法(PCH),引入了补偿变量 $\zeta_i$ .补偿跟踪误差变量定义为

$$\bar{z}_i = z_i - \zeta_i, 1 \leq i \leq n. \quad (13)$$

$$\dot{\zeta}_i = -P_i \zeta_i + g_i(x_{i+1}^c - x_{i+1}^M), 1 \leq i \leq n-1;$$

$$\dot{\zeta}_n = -P_n \zeta_n + g_n(u^f - u^d). \quad (14)$$

其中: $P_i > 0$ 是待设计参数, $u^d$ 是未考虑受限的控制量输入, $u^f$ 是考虑受限的控制量输入, $x_i^M$ 的具体定义将在控制器设计过程中给出.

首先,根据式(6)得到 $\varepsilon_1$ 的表达式 $\varepsilon_1 = S_1^{-1}(\bar{z}_1/\rho_1)$ ,并对其求导,可得

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial S_1^{-1}}{\partial(\bar{z}_1/\rho_1)} \frac{1}{\rho_1} \left( \dot{\bar{z}}_1 - \frac{\dot{\rho}_1 \bar{z}_1}{\rho_1} \right), \quad (15)$$

代入 $\dot{\bar{z}}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_1^c - \dot{\zeta}_1$ ,得

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial S_1^{-1}}{\partial(\bar{z}_1/\rho_1)} \frac{1}{\rho_1} \left( \dot{x}_1 - \dot{x}_1^c - \dot{\zeta}_1 - \frac{\dot{\rho}_1 \bar{z}_1}{\rho_1} \right). \quad (16)$$

结合式(1)和(16),可得

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial S_1^{-1}}{\partial(\bar{z}_1/\rho_1)} \frac{1}{\rho_1} \left( f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \psi_1^T(x_1)\theta - \dot{x}_1^c - \dot{\zeta}_1 - \frac{\dot{\rho}_1 \bar{z}_1}{\rho_1} \right).$$

另外,结合式(1)和(12),可得

$$\dot{\bar{z}}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \psi_i^T(\bar{x}_i)\theta - \dot{x}_i^c - \dot{\zeta}_i.$$

综上建立原系统(1)的等效误差模型如下:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = r_1(f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + \psi_1^T(x_1)\theta - \dot{x}_1^c - \dot{\zeta}_1 + \nu), \\ \dot{\bar{z}}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \psi_i^T(\bar{x}_i)\theta - \dot{x}_i^c - \dot{\zeta}_i, \\ \dot{\bar{z}}_n = f_n(x) + g_n(x)u + \psi_n^T(x)\theta - \dot{x}_n^c - \dot{\zeta}_n. \end{cases} \quad (17)$$

其中: $r_1 = \frac{\partial S_1^{-1}}{\partial(\bar{z}_1/\rho_1)} \frac{1}{\rho_1}$ , $r_1 > 0$ ; $\nu = -\frac{\dot{\rho}_1 \bar{z}_1}{\rho_1}$ , $\nu$ 为关于状态和时间的已知函数.

下面在补偿跟踪误差基础上进行预设性能分析,并进行控制器设计.

**Step 1** 考虑系统(17)的第1个子系统,代入 $x_2 = z_2 + x_2^c$ ,得到

$$\dot{\varepsilon}_1 = r_1(f_1 + g_1(z_2 + x_2^c) + \psi_1^T\theta - \dot{x}_1^c - \dot{\zeta}_1 + \nu). \quad (18)$$

为了表示方便,将 $f_i(\bar{x}_i)$ 、 $g_i(\bar{x}_i)$ 和 $\psi_i^T(\bar{x}_i)$ 表示为 $f_i$ 、 $g_i$ 和 $\psi_i^T$ .

定义 $x_2^M = x_2^d - \zeta_2$ ,在 $\varepsilon_1$ 引入变量 $x_2^M$ ,式(18)表示为

$$\dot{\varepsilon}_1 = r_1(f_1 + g_1(z_2 + x_2^c) + \psi_1^T\theta + g_1x_2^M - g_1x_2^M - \dot{x}_1^c - \dot{\zeta}_1 + \nu). \quad (19)$$

重新整理为

$$\dot{\varepsilon}_1 = r_1(f_1 + g_1(z_2 + x_2^c) + \psi_1^T\theta + g_1(x_2^d - \zeta_2) - g_1x_2^M - \dot{x}_1^c - \dot{\zeta}_1 + \nu).$$

上式可以表示为

$$\dot{\varepsilon}_1 = r_1(f_1 + g_1z_2 + (g_1x_2^c - g_1x_2^M) + \psi_1^T\theta + g_1(x_2^d - \zeta_2) - \dot{x}_1^c - \dot{\zeta}_1 + \nu).$$

代入式(14)中的 $\dot{\zeta}_1$ ,得到

$$\dot{\varepsilon}_1 = r_1(f_1 + g_1z_2 + (g_1x_2^c - g_1x_2^M) + \psi_1^T\theta + g_1(x_2^d - \zeta_2) - \dot{x}_1^c + P_1\zeta_1 - g_1(x_2^c - x_2^M) + \nu). \quad (20)$$

选择Lyapunov函数为

$$V_1 = \varepsilon_1^2/2r_1 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}/2, \quad (21)$$

对其求导,得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1/r_1 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} = \\ &= \varepsilon_1(f_1 + g_1z_2 + \psi_1^T\theta - g_1\zeta_2 + \\ &= g_1x_2^d - \dot{x}_1^c + P_1\zeta_1 + \nu) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} = \\ &= \varepsilon_1(f_1 + g_1\bar{z}_2 + g_1x_2^d - \dot{x}_1^c + \\ &= P_1\zeta_1 + \nu + \psi_1^T\theta) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}. \end{aligned} \quad (22)$$

为使第1个子系统稳定,设计虚拟控制量 $x_2^d$ 为

$$x_2^d = g_1^{-1}(-f_1 - \psi_1^T\tilde{\theta} - P_1\zeta_1 - n_1\varepsilon_1 + \dot{x}_1^c - \nu), \quad (23)$$

其中  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ . 设计自适应率

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}} = \Gamma \psi_1^T \varepsilon_1, \quad (24)$$

得到

$$\dot{V}_1 = -n\varepsilon_1^2 + g_1\varepsilon_1\bar{z}_2. \quad (25)$$

**Step n - 1** 由  $z_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-1}^c$ ,  $\bar{z}_{n-1} = z_{n-1} - \zeta_{n-1}$ , 求导得到  $\dot{\bar{z}}_{n-1} = \dot{z}_{n-1} - \dot{\zeta}_{n-1} = \dot{x}_{n-1} - \dot{x}_{n-1}^c - \dot{\zeta}_{n-1}$ . 选取 Lyapunov 函数为

$$V_{n-1} = V_{n-2} + \bar{z}_{n-1}^2/2, \quad (26)$$

求其导数, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &= \bar{z}_{n-1}\dot{\bar{z}}_{n-1} + \dot{V}_{n-2} = \\ &\bar{z}_{n-1}(f_{n-1} + \psi_{n-1}^T\theta + \\ &g_{n-1}x_n - \dot{x}_{n-1}^c - \dot{\zeta}_{n-1}) + \dot{V}_{n-2} = \\ &\bar{z}_{n-1}(f_{n-1} + \psi_{n-1}^T\theta + g_{n-1}(z_n + x_n^c) - \\ &\dot{x}_{n-1}^c - \dot{\zeta}_{n-1}) + \dot{V}_{n-2}. \end{aligned} \quad (27)$$

由  $x_n^M = x_n^d - \zeta_n$ , 可得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &= \\ &\bar{z}_{n-1}(f_{n-1} + \psi_{n-1}^T\theta + g_{n-1}z_n + g_{n-1}(x_n^c - x_n^M) + \\ &g_{n-1}x_n^d - g_{n-1}\zeta_n - \dot{x}_{n-1}^c - \dot{\zeta}_{n-1}) + \dot{V}_{n-2} = \\ &\bar{z}_{n-1}(f_{n-1} + \psi_{n-1}^T\theta + g_{n-1}z_n + g_{n-1}x_n^d - \\ &g_{n-1}\zeta_n - \dot{x}_{n-1}^c + P_{n-1}\zeta_{n-1}) + \dot{V}_{n-2}. \end{aligned} \quad (28)$$

设计

$$\begin{aligned} x_n^d &= g_{n-1}^{-1}(-f_{n-1} - \psi_{n-1}^T\hat{\theta} - P_{n-1}z_{n-1} + \\ &\dot{x}_{n-1}^c - g_{n-2}\bar{z}_{n-2}), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &= \\ &-n_1\varepsilon^2 - P_2\bar{z}_2^2 - \dots - P_{n-1}\bar{z}_{n-1}^2 + g_{n-1}\bar{z}_{n-1}\bar{z}_n. \end{aligned} \quad (30)$$

**Step n**  $\dot{z}_n = f_n + g_n u + \psi_n^T\theta - \dot{x}_n^c - \dot{\zeta}_n$ . 设计

$$V_n = V_{n-1} + \bar{z}_n^2/2. \quad (31)$$

对式(31)求导, 得

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + \bar{z}_n\dot{\bar{z}}_n. \quad (32)$$

设计实际控制量为

$$u^d = g_n^{-1}(-f_n - \psi_n^T\hat{\theta} - P_n z_n + \dot{x}_n^c - g_{n-1}\bar{z}_{n-1}), \quad (33)$$

设计自适应率为

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \left( \sum_{i=2}^n \psi_i^T \bar{z}_i + \psi_1^T \varepsilon_1 \right). \quad (34)$$

将式(33)和(34)代入(32), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + \bar{z}_n\dot{\bar{z}}_n = \\ &-n_1\varepsilon_1^2 - P_2\bar{z}_2^2 - \dots - P_{n-1}\bar{z}_{n-1}^2 - P_n\bar{z}_n^2. \end{aligned} \quad (35)$$

**定理 1** 对于等效误差模型(17), 在假设 1 ~ 假

设 3 的前提下, 设计如式(23)、(29)、(33)所示的控制器和如式(34)所示的参数自适应律, 能够保证闭环系统所有信号有界, 进而保证原系统(1)的补偿误差  $\bar{z}_1$  满足预先设定的稳态和瞬态性能.

进一步分析可得到如下推论.

**推论 1**  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{z}_i(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_i^c(t) - \zeta_i(t)| = 0$ .

**证明** 1) 当未饱和和受限时, 由式(14)可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\zeta_i(t)| = 0.$$

因此, 由定理 1 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{z}_i(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_i^c(t)| = 0.$$

2) 当存在饱和时, 采用 LaSalle-Yoshizawa 定理<sup>[22]</sup>

和式(35)可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{z}_i(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_i^c(t) - \zeta_i(t)| = 0. \quad \square$$

在此基础上继续分析, 可得到如下定理.

**定理 2** 1)  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{z}_i(t)| = 0$ ; 2) 跟踪误差  $z_1$  上界为

$$|z_1| \leq |S_1| \left( \sqrt{\frac{\Gamma_{\min}^{-1} \|\tilde{\theta}(0)\|^2/2}{n_1}} \right) |\rho_1| + \frac{g_{10} |\Delta(x_2)|}{2P_1},$$

其中  $\Delta(x_2) = x_2^c - x_2^M$ .

**证明** 1) 证明见推论 1.

2) 由定理 1 结合式(35), 可以得到

$$|\varepsilon_1|^2 \leq \frac{1}{n_1} (V_n(0) - V_n(\infty)) \leq \frac{1}{n_1} V_n(0). \quad (36)$$

由于

$$\begin{aligned} V_n(0) &= \varepsilon_1(0)^2/2r_1 + \bar{z}_2(0)^2/2 + \dots + \\ &\bar{z}_n(0)^2/2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}/2, \end{aligned} \quad (37)$$

设初始值  $\bar{z}_i(0) = 0$ , 结合式(36)、(37), 得到

$$|\varepsilon_1| \leq \sqrt{\frac{\Gamma_{\min}^{-1} \|\tilde{\theta}(0)\|^2/2}{n_1}}. \quad (38)$$

由于  $\varepsilon_1 = S_1^{-1}(\bar{z}_1/\rho_1)$  且  $S^{-1}$  单调有界, 有

$$|\bar{z}_1| \leq |S_1| \left( \sqrt{\frac{\Gamma_{\min}^{-1} \|\tilde{\theta}(0)\|^2/2}{n_1}} \right) |\rho_1|. \quad (39)$$

定义

$$V_{\zeta_1} = \frac{1}{2} \zeta_1^2, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\zeta_1} &= \zeta_1 \dot{\zeta}_1 = \zeta_1 (-P_1 \zeta_1 + g_1(x_2^c - x_2^M)) = \\ &-P_1 \zeta_1^2 + g_1(x_2^c - x_2^M) \zeta_1 \leq \\ &- \left( P_1 \zeta_1 - \frac{g_1(x_2^c - x_2^M)}{2P_1} \right)^2 + \left( \frac{g_1(x_2^c - x_2^M)}{2P_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (41)$$

同理

$$|\zeta_1|^2 \leq V_{\zeta_1}(0) - V_{\zeta_1}(\infty) + \left( \frac{g_1(x_2^c - x_2^M)}{2P_1} \right)^2. \quad (42)$$

设  $\zeta(0) = 0$ ,  $V_{\zeta_1}(0) = 0$ , 得到

$$|\zeta_1| \leq \frac{|g_1(x_2^c - x_2^M)|}{2P_1} \leq \frac{g_{10}|\Delta(x_2)|}{2P_1}, \quad (43)$$

其中  $\Delta(x_2) = x_2^c - x_2^M$ .

综上得到

$$|z_1| \leq |S_1| \left( \sqrt{\frac{\Gamma_{\min}^{-1} \|\hat{\theta}(0)\|^2 / 2}{n_1}} \right) |\rho_1| + \frac{g_{10}|\Delta(x_2)|}{2P_1}. \quad (44)$$

**注2** 当存在输入受限时,即  $\frac{g_{10}|\Delta(x_2)|}{2P_1}$  不为0,通过设计  $S_1$  和  $\rho_1$ ,可以减少跟踪误差,这相对于传统受限指令滤波方法,只能通过增大  $n_1$  和设计自适应函数初值来减少跟踪误差有较大的优越性.因此,预设性能方法的引入,可以减少由于受限影响以及滤波器的引入而导致的较大的跟踪误差,弥补了传统受限指令滤波方法的不足.从另外角度分析,传统的预设性能函数将稳态误差限定在一定的范围,即满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1(t)| < \rho_\infty (M=1)^{[17]}$ ,此时需要通过设置  $\rho_\infty$  的值足够小使稳态误差足够小,而由本文提出的方法给出了稳态误差界限的表达式,并不需要通过设计  $\rho_\infty \rightarrow 0$  使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1(t)| \rightarrow 0$ .

### 3 仿真结果分析

仿真对象的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \sin x_1 + 1.5x_2 + \theta x_1^2, \\ \dot{x}_2 = \sin x_2 - \sin x_1 + 2u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

期望输出信号为  $\sin t + \cos t/4$ ;控制输入饱和值  $u_M = 1.5$ ,控制输入的速度限制值  $u_R = 20$ ,状态饱和值  $x_M = 0.8$ ,状态的速度限制值  $x_R = 20$ ;指令滤波器参数设置如下:  $\xi_1 = \xi_2 = 1, \omega_1 = 50, \omega_2 = 50^2$ ;未知值  $\theta$  设为  $\theta = 0.5$ ;设置的初始值为  $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0$ ,PCH方法初始值  $\zeta_1(0) = \zeta_2(0) = 0, \hat{\theta}(0) = 0$ ;设计参数为  $n_1 = 1, P_1 = 2, P_2 = 5, \Gamma = 0.4$ ;性能函数  $\rho_1(t) = (0.8 - 10^{-3})e^{-0.5t} + 10^{-3}$ .

图1为实际输出跟踪期望轨迹的情况.图1曲线表明,控制受限的情况下,在3s左右实际信号跟上期望信号,能够实现对期望信号的稳定跟踪.图2为控制输入曲线.图2曲线表明输入信号在设置的限制值范围内,在1s左右受限滤波后的  $u^f$  和  $u^d$  重合,说明闭环系统进入稳态时与控制输入的轨迹一致.图3为状态受限时的虚拟控制信号.图3曲线表明滤波状态在限制的范围,满足预先设定的目标.综合图2和图3可以看出,所得到的输入曲线和中间控制变量平滑有界,能够满足预先设定的控制目标.图4中  $\bar{z}_1$  表示性能函数为  $\rho_1$  时的补偿跟踪误差随时间变化的情况,  $\bar{z}_2$  表示设计预设性能函数为0的误差曲线;另外,从图4可以看出,补偿跟踪误差的收敛速度和超调量

满足预先设定的瞬态性能要求.图5给出了  $\hat{\theta}$  逼近真值收敛到相应真值的情况.

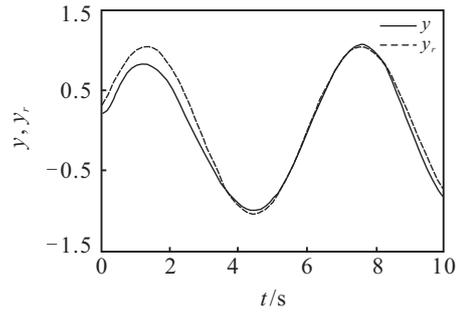


图1 实际输出跟踪期望轨迹

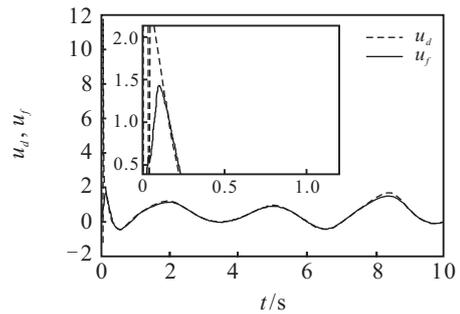


图2 控制输入曲线

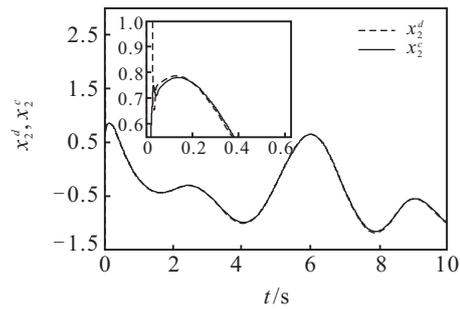


图3 虚拟控制信号曲线

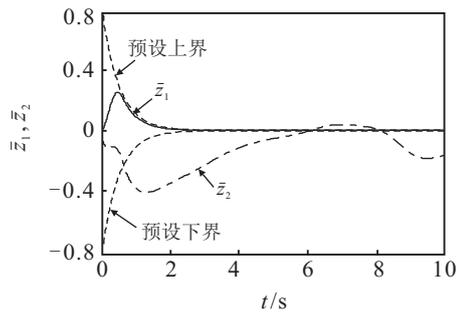


图4 补偿跟踪误差随时间变化情况

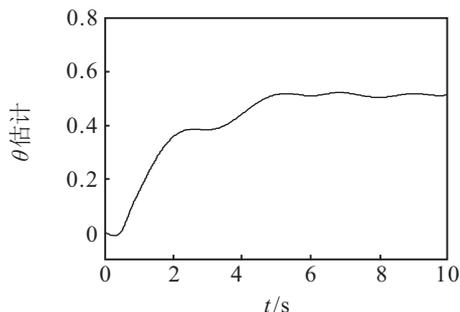


图5 参数自适应

## 4 结论

本文针对一类输入和状态受限含参数不确定性的非线性系统,提出了受限指令预设性能自适应反演控制器设计方法.同时考虑了输入和状态受限对控制的影响,解决了“计算膨胀”的问题.在确保跟踪信号和信号有界以及稳态分析的基础上,对超调量和收敛时间等瞬态性能进行了分析.通过理论分析和仿真结果验证了所提出方法的正确性和有效性.

### 参考文献(References)

- [1] Krstic M, Kokotovic P V, Kanellakopoulos I. Nonlinear and adaptive control design[C]. Nonlinear and Adaptive Control: Tools and Algorithms for the User. London: Imperial College Press, 2010, 5: 4475-4480.
- [2] Swaroop D, Hedrick J K, Yip P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [3] Amezquita S K, Yan L, Butt W A, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear feedback linearizable systems with actuator failures[J]. IEEE Trans on Neural Networks & Learning Systems, 2016, DOI: 10.1109/TNNLS.2016.2572205.
- [4] Zhang L, Yang G H. Dynamic surface error constrained adaptive fuzzy output feedback control for switched nonlinear systems with unknown dead zone[J]. Neurocomputing, 2016, 199(C): 128-136.
- [5] 武文斌. 带有输入限制的自适应控制在无人机上的应用[D]. 北京: 北京理工大学信息科技技术学院, 2015. (Wu W B. The application of adaptive control with input limit in unmanned aerial vehicle[D]. Beijing: Institute of Technology, Beijing Institute of Technology, 2015.)
- [6] Turner M C, Herrmann G. A non-square sector condition and its application in deferred-action anti-windup compensator design[J]. Automatica, 2014, 50(1): 268-276.
- [7] Li Y, Lin Z. Design of saturation-based switching anti-windup gains for the enlargement of the domain of attraction[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2013, 58(7): 1810-1816.
- [8] Zhou B, Lin Z, Duan G R. A parametric Lyapunov equation approach to low gain feedback design for discrete-time systems[J]. Automatica, 2009, 45(1): 238-244.
- [9] Farrell J, Polycarpou M, Sharma M. Adaptive backstepping with magnitude, rate, and bandwidth constraints: Aircraft longitude control[C]. Proc of the American Control Conf in America. 2003: 3898-3904.
- [10] Shi X P, Yuan G P, Li L. Adaptive fuzzy attitude tracking control of spacecraft with input magnitude and rate constraints[C]. Proc of the 31st Chinese Control Conf. Hefei: IEEE, 2012: 842-846.
- [11] Yoon S, Kim Y, Park S. Constrained adaptive backstepping controller design for aircraft landing in wind disturbance and actuator stuck[J]. Int J of Aeronautical & Space Sciences, 2012, 13(1): 74-89.
- [12] Farrell J, Polycarpou A, Manu Sharma, et al. Command filtered backstepping[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1391-1395.
- [13] Wang Y, Cao L, Zhang S, et al. Command filtered adaptive fuzzy backstepping control method of uncertain non-linear systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(10): 1134-1141.
- [14] Sonneveldt L, Chu Q P, Mulder J A. Nonlinear flight control design using constrained adaptive backstepping[J]. J of Guidance Control & Dynamics, 2007, 30(2): 322-336.
- [15] 程春华, 吴进华, 胡云安, 等. 受限的非仿射非线性系统的自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1000-1008. (Cheng C H, Wu J H, Hu Y A, et al. Adaptive control of non-affine nonlinear system with saturation constraint[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(8): 1000-1008.)
- [16] Miller D, Davison E. An adaptive controller which provides an arbitrary good transient and steady-state response[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(1): 68-81.
- [17] Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems[J]. Automatica, 2009, 45(2): 532-538.
- [18] Theodorakopoulos A, Rovithakis G A. Guaranteeing preselected tracking quality for uncertain strict-feedback systems with deadzone input nonlinearity and disturbances via low-complexity control[J]. Automatica, 2015, 54(C): 135-145.
- [19] 胡云安, 耿宝亮, 赵永涛. 严格反馈非线性系统预设性能Backstepping控制器设计[J]. 控制与决策, 2014, 29(8): 1509-1512. (Hu Y A, Geng B L, Zhao Y T. Prescribed performance Backstepping control of strict feedback nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2014, 29(8): 1509-1512.)
- [20] 陈明, 张士勇. 基于Backstepping的非线性系统预设性能鲁棒控制器设计[J]. 控制与决策, 2015, 30(5): 877-881. (Chen M, Zhang S Y. Prescribed performance robust controller design for nonlinear systems based on Backstepping[J]. Control and Decision, 2015, 30(5): 877-881.)
- [21] Theodorakopoulos A, Rovithakis G. A simplified adaptive neural network prescribed performance controller for uncertain MIMO feedback linearizable systems[J]. IEEE Trans on Neural Networks & Learning Systems, 2015, 26(3): 589-600.
- [22] Rouche N, Habets P, Laloy M. Stability theory by Lyapunov's direct method[M]. New York: Springer, 1977: 281-294.