

基于前景理论的风险型混合模糊多准则群决策

糜万俊[†], 戴跃伟

(南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘要: 针对准则值为模糊数的风险型多准则群决策问题, 提出一种基于前景理论的多准则群决策方法. 首先运用方差分析原理构建群决策参考点; 然后分析区间数、三角模糊数、梯形模糊数等无量纲化方法, 给出各类模糊数的价值函数计算方法, 并提出群体信息集成决策步骤; 最后通过算例表明所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 多准则群决策; 前景理论; 参考点; 方差分析

中图分类号: C934

文献标志码: A

Risk mixed multi-criteria fuzzy group decision-making approach based on prospect theory

MI Wan-jun[†], DAI Yue-wei

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: According to risk multi-criteria group decision-making problems in which the criteria value of decision alternatives may be fuzzy numbers, a multi-criteria group decision-making approach based on the prospect theory is proposed. Firstly, the paper offers the group reference points by analyzing their variances, and the normalization methods of interval number and triangular number and trapezoidal number are analyzed. Then, the value function of the above fuzzy numbers can be calculated. The decision steps of integrating group information are presented. Finally, a numerical example illustrates the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords: multi-criteria group decision-making; prospect theory; reference points; variance analysis

0 引言

前景理论采用价值函数和概率权重代替期望效用中的效用和概率, 可以更加现实地反映和描述决策者的实际决策过程. 近年来, 前景理论在诸如健康领域^[1]、人力资源管理^[2]、应急管理^[3]、谈判^[4]、风险管理^[5]等领域得到广泛应用.

参考点是前景理论应用的一个核心环节. 现有参考点主要包括正负理想点参考点、零点参考点、中位数参考点和期望值参考点等^[6]. 前 3 个参考点均受到准则值的影响, 而期望值参考点则是决策者对准则的总体认知. 如文献[7]将各属性期望值作为参照点, 依据前景理论解决风险型混合多属性决策问题; 文献[8]以各准则下的方案值为样本推断其发生概率并确定期望值参考点; 文献[9]以期望灰靶为参考点来定义前景价值函数, 利用奖优罚劣的线性变换算子对前景价值进行规范化处理; 文献[10]事先给定期望值

参考点并应用于混合型多准则决策问题; 文献[11]针对决策者给出单一与组合指标期望情形的多指标决策问题, 提出了一种基于前景理论的决策分析方法.

混合型多准则决策问题是指决策准则值为不同类型的决策问题, 如精确数、区间数、梯形模糊数、三角模糊数、语言值等. 如文献[12]研究了含有精确数和区间数的多准则决策问题; 文献[13]提出了一种基于 MYCIN 不确定因子和前景理论的随机决策方法, 用以解决指标权重未知和方案指标值为直觉模糊数的决策问题; 文献[14]建立了基于前景理论的多阶段随机多准则决策分析框架; 文献[15]建立了不确定语言变量的前景价值函数和区间概率权重函数, 利用各方案加权前景值的期望值对方案进行排序; 文献[16]分析了现有直觉模糊数记分函数的缺陷, 提出了基于前景记分函数的区间型直觉模糊多准则决策方法.

总体上看, 混合型多准则群决策问题是最常见的

收稿日期: 2016-09-25; 修回日期: 2016-12-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271116).

作者简介: 糜万俊(1968—), 男, 博士生, 从事决策分析的研究; 戴跃伟(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策分析等研究.

[†]通讯作者. E-mail: Largerabbit@sina.cn

决策问题. 在决策过程中, 决策者行为会影响最终决策结果, 而前景理论则可以很好地诠释行为因素对决策结果影响机制. 本文将在全面总结现有基于前景理论的多准则决策研究成果的基础上, 针对不完全信息下的混合多准则决策问题, 提出一种构建前景参考点的方法并加以应用.

1 期望值参考点设计

针对多准则群决策问题, 决策方案为 $a_i, i = 1, 2, \dots, m$, 准则为 $c_j, j = 1, 2, \dots, n$, 决策问题有 $l(l = 1, 2, \dots, d)$ 个状态, 决策者为 $DM_k, k = 1, 2, \dots, t, DM_k$ 的决策矩阵为 $X^k = [x_{ijl}^k]$, 其中 x_{ijl}^k 表示 DM_k 给出的方案 a_i 在准则 c_j 下状态为 l 的准则值. 由于准则类型不同, 进行决策时需要将准则值进行无量纲化处理. 令无量纲化后的决策矩阵为 $Y^k = [y_{ijl}^k]$.

按照前景理论的基本思想, 综合前景值包括价值函数和概率权重. 价值函数 $v(x)$ 是相对于参考点形成的收益和损失, $x > 0$ 为获得, $x < 0$ 为损失. 风险态度系数 $\alpha, \beta (0 \leq \alpha, \beta \leq 1)$ 越大, 表示决策者越倾向冒险, 损失规避系数 $\lambda > 1$ 说明决策者损失敏感. 通常, 决策者面对收益风险规避, 面对损失风险偏好, 且对损失比收益更加敏感. 基于文献[1], 有

$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0; \\ -\lambda(-x)^\beta, & x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

正负理想点、零点、中位数参考点依据数据本身确定, 但是期望值参考点受到决策者本身偏好的影响, 至今仍然没有一个较为成熟的设计方法. 如果将各个状态作为总体, 将方案作为样本, 准则作为因素, 则可以采用方差分析思想来诠释方案在不同状态下的差异性. 挖掘方案值来判别不同状态下决策者判断的差异性可以为寻找期望值参考点提供一种可行路径.

针对决策矩阵 $Y^k = [y_{ijl}^k]$, 如果准则 c_j 下状态 s_l 的概率为 p_{jl}^k , 则按照统计思想, 其期望值 y_{ij}^k 为 $\sum_{l=1}^d y_{ijl}^k p_{jl}^k$. 于是, 根据个体决策者关于各个准则期望值, 可以形成矩阵 $EY^k = [y_{ij}^k]_{m \times n}$. 在群体决策中, 不同个体的期望值可能随着决策者的偏好不同而不同, 要形成一致的群体决策参考点, 就需要判断这些个体之间的差异性.

针对单个准则, 各个个体的期望值可能完全相同(情形1), 或者不完全相同(情形2). 判断他们属于何种类型, 则需要统计验证.

对于情形1, 依据统计量 $F = \frac{SSA/k-1}{SSE/mk-k}$ 来验证原假设是否成立(水平项平方和 SSA 表示每个

决策者评估值的均值与总均值之间的差异, 误差项平方和 SSE 表示每个决策者评估值与其均值差异的平方和). 如果 F 处于接受域范围内(设定一个显著性水平), 则认为各个个体关于某个准则的期望值相同, 但是个体期望值仍然存在一定的差异.

各个个体期望值和样本方差分别为

$$\bar{Y}_j^k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ij}^k,$$

$$s_j^k = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \left(y_{ij}^k - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ij}^k \right)^2}.$$

采用 t 检验来检验个体期望值 μ_j^k 的范围, 有

$$\bar{Y}_j^k - \frac{s_j^k}{\sqrt{m}} t_{\alpha/2}(m-1) \leq \mu_j^k \leq \bar{Y}_j^k + \frac{s_j^k}{\sqrt{m}} t_{\alpha/2}(m-1).$$

如果期望值区间不相同, 则交集 $\left(\max_k \left(\bar{Y}_j^k - \frac{s_j^k}{\sqrt{m}} t_{\alpha/2}(m-1) \right), \min_k \left(\bar{Y}_j^k + \frac{s_j^k}{\sqrt{m}} t_{\alpha/2}(m-1) \right) \right)$ 的平均值即为参考点 Y_j . 该交集的下限为上述个体期望值下限的最大值, 上限为上述个体期望值上限的最小值. 如果准则值为模糊数, 则可以分别计算模糊数的每个端点值的期望值.

对于情形2, 说明某一准则下不同决策者对方案评价的期望值不相同, 组间存在差异. 基于参考点 Y_j 与各均值差异和最小且期望值与各组数值的方差在设定的 ε 内, 有

$$\min z = \sum_{k=1}^t (Y_j - \bar{Y}_j^k)^2,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_j - y_{ij}^k)^2} \leq \varepsilon, & k = 1, 2, \dots, t; \\ Y_j \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

模型(2)是非线性模型, 可采用 lingo9.0 求解参考点 Y_j . 如果准则值为模糊数, 则可以分别计算模糊数的每个端点值的期望值. 通过各个决策者的期望值来推断群体的期望值, 可以从统计角度给出更加令人信服的期望值参考点, 为基于前景理论的多准则决策过程设计提供了良好的理论指导.

2 模糊多准则前景价值函数确定

2.1 无量纲化处理

针对不同的准则类型, 其准则值之间存在度量单位的不一致性, 需要进行无量纲化处理才能构建前景价值函数. 常见的模糊值有区间数、三角模糊数、梯形模糊数和语言变量等^[17].

1) 精确数 x_{ijl} 的无量纲化.

令 M_j^k 和 m_j^k 分别为 x_{ijl}^k 的最大值和最小值, 本文采用极差变换法, 有: 效益型准则

$$y_{ijl}^k = \frac{x_{ijl}^k - m_j^k}{M_j^k - m_j^k};$$

成本性准则

$$y_{ijl}^k = \frac{M_j^k - x_{ijl}^k}{M_j^k - m_j^k}.$$

2) 区间数 $x_{ijl}^k([x_{ijl}^{kL}, x_{ijl}^{kR}])$ 的无量纲化. 令

$$X_j^L = \min \left(\sum_{i=1}^m x_{ijl}^{1L}, \dots, \sum_{i=1}^m x_{ijl}^{tL} \right),$$

$$X_j^R = \max \left(\sum_{i=1}^m x_{ijl}^{1R}, \dots, \sum_{i=1}^m x_{ijl}^{tR} \right).$$

效益型准则

$$y_{ijl}^k = \left[\frac{x_{ijl}^{kL}}{X_j^L}, \frac{x_{ijl}^{kR}}{X_j^R} \right];$$

成本性准则

$$y_{ijl}^k = \left[\frac{1/x_{ijl}^{kR}}{\max \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{x_{ijl}^{1L}}, \dots, \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_{ijl}^{tL}} \right)}, \frac{1/x_{ijl}^{kL}}{\min \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{x_{ijl}^{1R}}, \dots, \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_{ijl}^{tR}} \right)} \right].$$

3) 三角模糊数 $x_{ijl}^k([x_{ijl}^{kL}, x_{ijl}^{kM}, x_{ijl}^{kR}])$ 的无量纲化. 效益型准则

$$y_{ijl}^k = \left[\frac{x_{ijl}^{kL}}{\max_k(x_{ijl}^{kR})}, \frac{x_{ijl}^{kM}}{\max_k(x_{ijl}^{kM})}, \frac{x_{ijl}^{kR}}{\max_k(x_{ijl}^{kL})} \wedge 1 \right];$$

成本型准则

$$y_{ijl}^k = \left[\frac{\min_k(x_{ijl}^{kL})}{x_{ijl}^{kR}}, \frac{\min_k(x_{ijl}^{kM})}{x_{ijl}^{kM}}, \frac{\min_k(x_{ijl}^{kR})}{x_{ijl}^{kL}} \wedge 1 \right].$$

4) 梯形模糊数 $x_{ijl}^k([x_{ijl}^{k1}, x_{ijl}^{k2}, x_{ijl}^{k3}, x_{ijl}^{k4}])$ 的无量纲化. 效益型准则

$$y_{ijl}^{kp} = \frac{x_{ijl}^{kp} - \min_i(x_{ijl}^{k1})}{\max_i(x_{ijl}^{k4}) - \min_i(x_{ijl}^{k1})};$$

成本型准则

$$y_{ijl}^{kp} = \frac{\max_i(x_{ijl}^{k4}) - x_{ijl}^{kp}}{\max_i(x_{ijl}^{k4}) - \min_i(x_{ijl}^{k1})}.$$

5) 语言值 x_{ijl}^k 的无量纲化. 可以转化为相应的数字标度或者模糊数方式处理^[15]. 如果 x_{ij}^k 为随机直觉模糊数, 则采用记分函数的方式处理, 如基于集对理论的处理算法^[13].

2.2 价值函数确定

基于无量纲化的结果和群体期望值参考点 Y_j , 可获得决策者关于方案价值函数 $v(y_{ijl}^k)$.

1) 精确数 y_{ijl}^k 的价值函数

$$v(y_{ijl}^k) = \begin{cases} (y_{ijl}^k - Y_j)^\alpha, & y_{ijl}^k \geq Y_j; \\ -\lambda(Y_j - y_{ijl}^k)^\beta, & y_{ijl}^k < Y_j. \end{cases}$$

2) 区间数 y_{ijl}^k 的价值函数. 首先判断各个区间数与参考点 $Y_j([Y_j^L, Y_j^R])$ 的大小, 按照文献[18]给出的可能度公式, 称

$$\frac{\min\{y_{ijl}^{kR} - y_{ijl}^{kL} + Y_j^{kR} - Y_j^L, \max(0, y_{ijl}^{kR} - Y_j^{kL})\}}{y_{ijl}^{kR} - y_{ijl}^{kL} + Y_j^{kR} - Y_j^L}$$

为 $y_{ijl}^k \geq Y_j$ 的可能度. 如果可能度大于 0.5, 则 $y_{ijl}^k > Y_j$. 由于

$$d(y_{ijl}^k, Y_j) = \frac{1}{2} \sqrt{(y_{ijl}^{kL} - Y_j^L)^2 + (y_{ijl}^{kR} - Y_j^R)^2},$$

有

$$v(y_{ijl}^k) = \begin{cases} (d(y_{ijl}^k, Y_j))^\alpha, & y_{ijl}^k \geq Y_j; \\ -\lambda(d(y_{ijl}^k, Y_j))^\beta, & y_{ijl}^k < Y_j. \end{cases}$$

3) 三角模糊数 y_{ijl}^k 的价值函数. 参考点 Y_j 为 $[Y_j^L, Y_j^M, Y_j^R]$, 令 θ 为风险态度, 大于 0.5 为追求风险, 等于 0.5 为风险中立, 小于 0.5 为风险厌恶. 于是, $y_{ijl}^k \geq Y_j$ 的可能度为

$$\theta \times \min \left\{ 1 - \max \left(\frac{Y_j^M - y_{ijl}^{kL}}{y_{ijl}^{kM} - y_{ijl}^{kL} + Y_j^M - Y_j^L}, 0 \right), 1 \right\} + (1 - \theta) \max \left\{ 1 - \max \left(\frac{Y_j^R - y_{ijl}^{kM}}{y_{ijl}^{kR} - y_{ijl}^{kM} + Y_j^R - Y_j^M}, 0 \right), 0 \right\}.$$

如果可能度大于 0.5, 则认为 $y_{ijl}^k \geq Y_j$, 否则 $y_{ijl}^k < Y_j$.

y_{ijl}^k 与 Y_j 的距离可以表示为

$$d(y_{ijl}^k, Y_j) = \frac{1}{3} \sqrt{(y_{ijl}^{kL} - Y_j^L)^2 + (y_{ijl}^{kM} - Y_j^M)^2 + (y_{ijl}^{kR} - Y_j^R)^2}.$$

$$v(y_{ijl}^k) = \begin{cases} (d(y_{ijl}^k, Y_j))^\alpha, & y_{ijl}^k \geq Y_j; \\ -\lambda(d(y_{ijl}^k, Y_j))^\beta, & y_{ijl}^k < Y_j. \end{cases}$$

4) 梯形模糊数 y_{ijl}^k 的价值函数. 参考点 Y_j 为 $[Y_j^1, Y_j^2, Y_j^3, Y_j^4]$, 如果 $y_{ijl}^{k1} + y_{ijl}^{k2} + y_{ijl}^{k3} + y_{ijl}^{k4} > Y_j^1 + Y_j^2 + Y_j^3 + Y_j^4$, 则称 $y_{ijl}^k \geq Y_j$, 于是 $d(y_{ijl}^k, Y_j) = 0.5(y_{ijl}^{k1} + y_{ijl}^{k2} - Y_j^1 - Y_j^2) \times (1 - \theta) + 0.5\theta(y_{ijl}^{k3} + y_{ijl}^{k4} - Y_j^3 - Y_j^4)$. 当 $y_{ijl}^k < Y_j$ 时, $d(Y_j, y_{ijl}^k) = 0.5(Y_j^1 + Y_j^2 - y_{ijl}^{k1} - y_{ijl}^{k2}) \times (1 - \theta) + 0.5\theta(Y_j^3 + Y_j^4 - y_{ijl}^{k3} - y_{ijl}^{k4})$, 因此前景价值函数表示为

$$v(y_{ijl}^k) = \begin{cases} (d(y_{ijl}^k, Y_j))^\alpha, & y_{ijl}^k \geq Y_j; \\ -\lambda(d(y_{ijl}^k, Y_j))^\beta, & y_{ijl}^k < Y_j. \end{cases}$$

语言变量和随机直觉模糊数可以转化为精确数或者上述模糊数, 可以采用上述算法计算前景价值函数.

3 基于期望值参考点的多准则群决策过程

基于上述多准则群决策参考点的分析和价值函数的计算过程如下。

Step1: 针对给定的准则和既定的方案,各个决策者分别给出自己的决策矩阵。

Step2: 区分各个准则值的类型,即效益型还是成本型,按照第2节给出的方法进行无量纲化处理,获得 $Y^k = [y_{ijl}^k]$ 。

Step3: 基于给定的状态概率,计算各个决策者对于每个决策准则的期望值 y_{ij}^k 。运用方差分析理论,按照第1节给出的过程计算群体期望值参考点 Y_j 。

Step4: 计算价值函数。按照第2节提供的前景价值函数计算方法,得到价值函数矩阵 $[v(y_{ijl}^k)]$ 。决策方案 a_i 在准则 c_j 下的前景价值 P_{ij}^k 为 $\sum_{l=1}^d v(y_{ijl}^k)\pi(p_{jl}^k)$, 其中:如果 $v(y_{ijl}^k) > 0$, 则

$$\pi^+(p_{jl}^k) = \frac{(p_{jl}^k)^\gamma}{((p_{jl}^k)^\gamma + (1 - p_{jl}^k)^\gamma)^{1/\gamma}}$$

如果 $v(y_{ijl}^k) < 0$, 则

$$\pi^-(p_{jl}^k) = \frac{(p_{jl}^k)^\delta}{((p_{jl}^k)^\delta + (1 - p_{jl}^k)^\delta)^{1/\delta}}$$

Step5: 若每个决策者给定不同的准则权重 w_j^k , 则其综合前景价值为 $\sum_{j=1}^n P_{ij}^k w_j^k$ 。

Step6: 确定决策者权重。基于离差原理求解权重,即离差越大,决策者权重越大。计算前景价值方差

$$s^k = \sqrt{\sum_{m=1}^1 \left(\sum_{j=1}^n P_{ij}^k w_j^k - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n P_{ij}^k w_j^k \right) \right)^2}$$

得到决策者权重 λ^k 为 $s^k / \sum_{k=1}^t s^k$ 。

Step7: 对各个决策者的信息进行集成,即 $\sum_{k=1}^t \lambda^k \sum_{j=1}^n P_{ij}^k w_j^k$ 。

4 算例

某企业致力于寻求合适的风险投资项目,而评价不同的风险投资项目所面临的环境均具有模糊性,难以给出明确的清晰数。该企业现有4个备选的风险投资项目 a_1, a_2, a_3, a_4 , 参与决策的决策者来自公司高层、风险投资部门和财务部。决策者一致选取4个准则为成长性 c_1 、预期收益 c_2 、环境影响 c_3 和社会效益 c_4 。其中:成长性用区间衡量可能的上限和下限;预期收益用梯形模糊数描述最差、最可能和最好的4种可能值;环境影响通常需要专业评估,需要较高的成本,决策者通过赞成和反对度来衡量;社会效益用三

端点描述。所有备选的风险投资项目均可能面临3种市场状态,即高、中、低需求。

Step1: 各种需求下3个决策者的决策矩阵如表1~表9所示。

表1 决策者1给出的高需求下的决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[8.3, 8.7]	[88, 90, 92, 95]	[0.5, 0.2]	[0.0, 0.2, 0.4]
a_2	[6.8, 7.1]	[91, 92, 94, 97]	[0.7, 0.1]	[0.2, 0.4, 0.6]
a_3	[8.0, 8.2]	[90, 92, 94, 95]	[0.2, 0.5]	[0.6, 0.8, 1.0]
a_4	[7.5, 7.8]	[80, 82, 83, 84]	[0.4, 0.2]	[0.4, 0.6, 0.8]

表2 决策者1给出的中等需求下的决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[6.1, 6.5]	[76, 88, 90, 91]	[0.4, 0.1]	[0.1, 0.3, 0.5]
a_2	[5.1, 5.3]	[91, 92, 94, 97]	[0.3, 0.3]	[0.3, 0.4, 0.6]
a_3	[6.5, 6.8]	[81, 83, 84, 86]	[0.2, 0.5]	[0.7, 0.8, 0.9]
a_4	[5.4, 5.8]	[67, 69, 71, 73]	[0.3, 0.4]	[0.6, 0.7, 0.8]

表3 决策者1给出的低需求下的决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[4.3, 4.6]	[58, 60, 62, 65]	[0.3, 0.5]	[0.1, 0.2, 0.3]
a_2	[2.9, 3.2]	[61, 63, 64, 65]	[0.5, 0.4]	[0.2, 0.3, 0.4]
a_3	[4.0, 4.2]	[60, 61, 62, 63]	[0.6, 0.3]	[0.5, 0.6, 0.7]
a_4	[3.7, 3.9]	[60, 62, 63, 64]	[0.2, 0.4]	[0.4, 0.5, 0.6]

表4 决策者2给出的高需求下的决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[7.3, 7.5]	[91, 93, 94, 95]	[0.5, 0.2]	[0.4, 0.6, 0.8]
a_2	[6.5, 6.7]	[89, 90, 92, 93]	[0.6, 0.1]	[0.6, 0.8, 1.0]
a_3	[6.9, 7.0]	[86, 88, 90, 92]	[0.2, 0.4]	[0.4, 0.5, 0.6]
a_4	[7.2, 7.3]	[85, 87, 89, 90]	[0.4, 0.1]	[0.4, 0.5, 0.7]

表5 决策者2给出的中等需求下的决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[6.3, 6.5]	[85, 86, 87, 89]	[0.4, 0.2]	[0.3, 0.4, 0.5]
a_2	[6.3, 6.4]	[81, 82, 83, 84]	[0.2, 0.5]	[0.5, 0.7, 0.9]
a_3	[6.9, 7.0]	[76, 77, 78, 79]	[0.2, 0.2]	[0.3, 0.4, 0.5]
a_4	[7.0, 7.1]	[77, 78, 79, 80]	[0.4, 0.3]	[0.3, 0.4, 0.7]

表6 决策者2给出的低需求下的决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[3.3, 3.4]	[69, 70, 71, 72]	[0.6, 0.2]	[0.3, 0.4, 0.5]
a_2	[2.1, 2.2]	[66, 67, 68, 69]	[0.3, 0.5]	[0.4, 0.5, 0.6]
a_3	[2.7, 2.8]	[63, 64, 65, 66]	[0.1, 0.5]	[0.1, 0.2, 0.3]
a_4	[3.0, 3.2]	[65, 67, 68, 70]	[0.4, 0.4]	[0.3, 0.4, 0.5]

表7 决策者3给出的高需求下的决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[6.6, 6.7]	[85, 86, 88, 90]	[0.5, 0.3]	[0.6, 0.8, 1.0]
a_2	[6.2, 6.3]	[90, 93, 94, 95]	[0.3, 0.4]	[0.2, 0.3, 0.4]
a_3	[6.7, 6.8]	[87, 88, 90, 91]	[0.6, 0.3]	[0.2, 0.4, 0.6]
a_4	[7.2, 7.3]	[91, 93, 94, 96]	[0.5, 0.2]	[0.4, 0.6, 0.8]

表8 决策者3给出的中等需求下的决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[5.6, 5.7]	[75, 76, 77, 78]	[0.3, 0.5]	[0.5, 0.6, 0.8]
a_2	[5.8, 5.9]	[80, 83, 84, 85]	[0.4, 0.4]	[0.1, 0.2, 0.3]
a_3	[6.1, 6.2]	[77, 78, 79, 80]	[0.5, 0.3]	[0.2, 0.3, 0.4]
a_4	[5.1, 5.3]	[81, 82, 83, 84]	[0.3, 0.5]	[0.3, 0.4, 0.5]

表9 决策者3给出的低需求下的决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[4.6, 4.7]	[65, 66, 67, 68]	[0.5, 0.3]	[0.4, 0.5, 0.6]
a_2	[5.1, 5.2]	[75, 76, 77, 78]	[0.3, 0.4]	[0.0, 0.1, 0.2]
a_3	[4.7, 4.8]	[81, 82, 83, 84]	[0.6, 0.3]	[0.3, 0.4, 0.5]
a_4	[5.2, 5.3]	[71, 72, 73, 74]	[0.5, 0.2]	[0.2, 0.3, 0.4]

Step2: 在表1~表9中, 4种准则分别按照上述方法进行无量纲化处理, 结果如表10~表18所示.

表10 决策者1给出的高需求下的决策矩阵无量纲化表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.26, 0.28]	[0.47, 0.59, 0.71, 0.90]	0.3	[0.00, 0.25, 0.67]
a_2	[0.21, 0.23]	[0.65, 0.71, 0.82, 1.00]	0.6	[0.20, 0.50, 1.00]
a_3	[0.25, 0.27]	[0.59, 0.71, 0.82, 0.90]	-0.3	[0.60, 1.00, 1.00]
a_4	[0.24, 0.25]	[0.00, 0.12, 0.18, 0.20]	0.2	[0.40, 0.75, 1.00]

表11 决策者1给出的中等需求下的决策矩阵无量纲化表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.25, 0.28]	[0.30, 0.70, 0.80, 0.80]	0.3	[0.10, 0.40, 0.70]
a_2	[0.21, 0.23]	[0.80, 0.80, 0.90, 1.00]	0	[0.30, 0.50, 0.90]
a_3	[0.27, 0.29]	[0.47, 0.50, 0.60, 0.60]	-0.3	[0.80, 1.00, 1.00]
a_4	[0.22, 0.25]	[0.00, 0.10, 0.10, 0.20]	-0.1	[0.70, 0.90, 1.00]

表12 决策者1给出的低需求下的决策矩阵无量纲化表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.27, 0.31]	[0.00, 0.30, 0.60, 1.00]	-0.2	[0.10, 0.30, 0.60]
a_2	[0.18, 0.21]	[0.40, 0.70, 0.90, 1.00]	0.1	[0.30, 0.50, 0.80]
a_3	[0.25, 0.28]	[0.30, 0.40, 0.60, 0.70]	0.3	[0.70, 1.00, 1.00]
a_4	[0.23, 0.26]	[0.30, 0.60, 0.70, 0.90]	-0.2	[0.60, 0.80, 1.00]

表13 决策者2给出的高需求下的决策矩阵无量纲化表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.26, 0.27]	[0.60, 0.80, 0.90, 1.00]	0.3	[0.40, 0.75, 1.00]
a_2	[0.23, 0.24]	[0.40, 0.50, 0.70, 0.80]	0.5	[0.60, 1.00, 1.00]
a_3	[0.24, 0.25]	[0.10, 0.30, 0.50, 0.70]	-0.2	[0.40, 0.63, 1.00]
a_4	[0.25, 0.26]	[0.00, 0.20, 0.40, 0.50]	0.3	[0.40, 0.63, 1.00]

表14 决策者2给出的中等需求下的决策矩阵无量纲化表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.23, 0.25]	[0.69, 0.80, 0.80, 1.00]	0.2	[0.30, 0.60, 1.00]
a_2	[0.23, 0.24]	[0.38, 0.50, 0.50, 0.60]	-0.3	[0.60, 1.00, 1.00]
a_3	[0.26, 0.26]	[0.00, 0.10, 0.20, 0.20]	0	[0.30, 0.60, 1.00]
a_4	[0.26, 0.27]	[0.08, 0.20, 0.20, 0.30]	0.1	[0.30, 0.60, 1.00]

表15 决策者2给出的低需求下的决策矩阵无量纲化表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.28, 0.31]	[0.70, 0.80, 0.90, 1.00]	0.4	[0.50, 0.80, 1.00]
a_2	[0.18, 0.20]	[0.30, 0.40, 0.60, 0.70]	-0.2	[0.70, 1.00, 1.00]
a_3	[0.23, 0.25]	[0.00, 0.10, 0.20, 0.30]	-0.4	[0.20, 0.40, 0.75]
a_4	[0.26, 0.29]	[0.20, 0.40, 0.60, 0.80]	0	[0.50, 0.80, 1.00]

表16 决策者3给出的高需求下的决策矩阵无量纲化表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.24, 0.25]	[0.00, 0.09, 0.27, 0.50]	0.2	[0.60, 1.00, 1.00]
a_2	[0.23, 0.24]	[0.46, 0.73, 0.82, 0.90]	-0.1	[0.20, 0.38, 0.67]
a_3	[0.25, 0.25]	[0.18, 0.27, 0.45, 0.50]	0.3	[0.20, 0.50, 1.00]
a_4	[0.27, 0.27]	[0.55, 0.73, 0.82, 1.00]	0.3	[0.40, 0.75, 1.00]

表17 决策者3给出的中等需求下的决策矩阵无量纲化表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.24, 0.25]	[0.00, 0.10, 0.20, 0.30]	-0.2	[0.60, 1.00, 1.00]
a_2	[0.25, 0.26]	[0.50, 0.80, 0.90, 1.00]	0	[0.10, 0.30, 0.60]
a_3	[0.26, 0.27]	[0.20, 0.30, 0.40, 0.50]	0.2	[0.30, 0.50, 0.80]
a_4	[0.22, 0.23]	[0.60, 0.70, 0.80, 0.90]	-0.2	[0.40, 0.70, 1.00]

表18 决策者3给出的低需求下的决策矩阵无量纲化表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.23, 0.24]	[0.00, 0.10, 0.10, 0.20]	0.2	[0.70, 1.00, 1.00]
a_2	[0.26, 0.27]	[0.50, 0.60, 0.60, 0.70]	-0.1	[0.00, 0.20, 0.50]
a_3	[0.24, 0.24]	[0.80, 0.90, 0.90, 1.00]	0.3	[0.50, 0.80, 1.00]
a_4	[0.26, 0.27]	[0.30, 0.40, 0.40, 0.50]	0.3	[0.30, 0.60, 1.00]

Step3: 给定3种状态的概率分别为0.25, 0.45和0.3, 于是, 各个准则的期望值如表19~表21所示.

表 19 各个准则的期望值表(决策者 1)

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.26, 0.29]	[0.25, 0.55, 0.69, 0.90]	0.15	[0.10, 0.33, 0.67]
a_2	[0.20, 0.23]	[0.65, 0.77, 0.87, 1.00]	0.18	[0.30, 0.50, 0.88]
a_3	[0.26, 0.28]	[0.44, 0.55, 0.63, 0.70]	-0.12	[0.70, 1.00, 1.00]
a_4	[0.23, 0.26]	[0.09, 0.23, 0.32, 0.40]	-0.06	[0.60, 0.83, 1.00]

表 20 各个准则的期望值表(决策者 2)

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.25, 0.27]	[0.66, 0.78, 0.87, 1.00]	0.285	[0.40, 0.68, 1.00]
a_2	[0.22, 0.23]	[0.37, 0.47, 0.58, 0.70]	-0.07	[0.60, 1.00, 1.00]
a_3	[0.25, 0.26]	[0.03, 0.14, 0.26, 0.40]	-0.17	[0.30, 0.53, 0.93]
a_4	[0.26, 0.27]	[0.10, 0.25, 0.37, 0.50]	0.12	[0.40, 0.65, 1.00]

表 21 各个准则的期望值表(决策者 3)

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	[0.24, 0.25]	[0.00, 0.08, 0.19, 0.30]	0.02	[0.60, 1.00, 1.00]
a_2	[0.25, 0.26]	[0.50, 0.72, 0.80, 0.90]	-0.06	[0.10, 0.30, 0.60]
a_3	[0.25, 0.26]	[0.39, 0.47, 0.58, 0.70]	0.26	[0.30, 0.60, 0.90]
a_4	[0.24, 0.26]	[0.50, 0.61, 0.69, 0.80]	0.08	[0.40, 0.70, 1.00]

Step4: 运用方差分析法分析 3 个决策者判断的差异性. 4 个准则的群体参考点分别为

$$[0.245, 0.255], [0.347, 0.514, 0.607, 0.705],$$

$$0.09, [0.425, 0.718, 0.981].$$

Step5: 计算前景价值. 令

$$\alpha = \beta = 0.88, \lambda = 2.25,$$

$$\gamma = 0.61, \delta = 0.69, \theta = 0.5,$$

价值函数如表 22~ 表 24 所示.

表 22 决策者 1 价值函数表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	0.108	0.018	0.283	-0.576
a_2	-0.378	0.321	0.175	-0.308
a_3	0.100	0.033	-0.476	0.172
a_4	-0.169	-0.746	0.282	0.085

表 23 决策者 2 价值函数表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	-0.211	0.336	-0.060	-0.051
a_2	-0.314	-0.083	-0.341	0.148
a_3	-0.060	-0.886	-0.201	-0.254
a_4	0.084	-0.638	-0.398	-0.092

表 24 决策者 3 价值函数表

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	-0.149	-1.055	-0.041	0.153
a_2	-0.022	0.214	-0.486	-0.617
a_3	-0.039	-0.513	-0.351	-0.214
a_4	-0.050	0.043	-0.100	-0.083

Step6: 假定准则权重分别为 0.3, 0.35, 0.2, 0.15. 3 个决策者的综合前景值分别为

$$0.009, -0.012, -0.028, -0.243;$$

$$0.035, -0.169, -0.406, -0.292;$$

$$-0.399, -0.121, -0.294, -0.032.$$

Step7: 依据前景价值计算决策者权重, 分别为 0.249, 0.4, 0.351.

Step8: 群体前景价值为 -0.124, -0.113, -0.273, -0.188, 排序为 $a_2 > a_1 > a_4 > a_3$.

如果采用文献[11]提供的方法, 则个体决策者分别确定其参考点, 如表 25 所示.

表 25 各个决策者的参考点

	c_1	c_2	c_3	c_4
DM ₁	[0.236, 0.264]	[0.359, 0.522, 0.628, 0.752]	0.038 8	[0.416, 0.667, 0.886]
DM ₂	[0.243, 0.257]	[0.290, 0.410, 0.522, 0.638]	0.041 2	[0.425, 0.718, 0.981]
DM ₃	[0.245, 0.255]	[0.346, 0.469, 0.564, 0.659]	0.073 7	[0.355, 0.640, 0.874]

决策者权重为 0.327, 0.346 和 0.327. 集成前景价值为 -0.112, -0.045, -0.18 和 -0.161, 排序为 $a_2 > a_1 > a_4 > a_3$. 尽管两者的排序相同, 但是本文提供的方法减小了方差. 说明基于前景理论的群体决策中, 如果参考点选取过程中考虑了群体因素, 则各个决策者前景价值之间的相似性显著高于决策者各自选择参考点状况下的相似性.

如果采用文献[17]提供的方法, 则参考点均为中位数, 计算相应的决策参考点和综合前景值得到综合前景值分别如表 26 所示. 此时妥协解为 a_1 , 且不能对方案进行排序. 由于两者集结过程中参考点不同, 得

到的解的结果也存在一定的差异性.

表 26 决策者 3 价值函数

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	0.000	0.255	0.000	1.000
a_2	1.000	0.000	0.879	0.387
a_3	0.147	0.931	1.000	0.540
a_4	0.187	1.000	0.164	0.000

5 结论

前景理论在多准则决策问题中得到了广泛的应用, 然而, 确定参考点是基于前景理论的多准则决策问题中的一个重要难点. 本文尝试运用方差分析思

想,针对各个决策者的期望值,分析其差异性,进而确定合理的群体参考点,为价值函数的确定提供基础.针对不同类型的模糊数,分别给出了无量纲化方法和相应的价值函数确定过程.针对模糊混合型多准则决策问题,给出了一套完整的多准则决策步骤,为解决多准则群决策问题提供了一种新的研究视角和思路.

基于行为的多准则决策是当今决策理论研究的方向,本文运用前景理论中的价值函数替代效用函数,并运用方差分析原理来甄别不同决策者之间的差异性,有效区分了不同方案之间的差异,为最终决策提供了坚实基础.

参考文献(References)

- [1] Arthur E Attema, Werner B F Brouwer, Olivier l' Haridon, et al. An elicitation of utility for quality of life under prospect theory[J]. *J of Health Economics*, 2016, 48(3): 121-134.
- [2] Lei Sun, Martin Widdicks. Why do employees like to be paid with options? A multi-period prospect theory approach[J]. *J of Corporate Finance*, 2016, 38(2): 106-125.
- [3] Wang Liang, Zhang Zi-xin, Wang Ying-ming. A prospect theory based interval dynamic reference point method for emergency decision making[J]. *Expert Systems with Applications*, 2015, 42(1): 9379-9388.
- [4] Huan-Jyh Shyur, Hsu-Shih Shih. Designing a multi-issues negotiation support system based on prospect theory[J]. *Information Sciences*, 2015, 322(6): 161-173.
- [5] Liu Yang, Fan Zhi-ping, Zhang Yao. Risk decision analysis in emergency response: A method based on cumulative prospect theory[J]. *Computers & Operations Research*, 2014, 42(1): 75-82.
- [6] Liu Peide, Jin Fang, Zhang Xin, et al. Research on the multi-attribute decision-making under risk with interval probability based on prospect theory and the uncertain linguistic variables[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2011, 24(1): 554-561.
- [7] 张晓, 樊治平. 基于前景理论的风险型混合多属性决策方法[J]. *系统工程学报*, 2012, 27(6): 772-781. (Zhang X, Fan Z P. Method for risky hybrid multiple attribute decision making based on prospect theory[J]. *J of System Engineering*, 2012, 27(6): 772-781.)
- [8] 江文奇. 基于前景理论和统计推断的区间数多准则决策方法[J]. *控制与决策*, 2015, 30(2): 375-379. (Jiang W Q. Interval multi-criteria decision-making approach based on prospect theory and statistic deduction[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(2): 375-379.)
- [9] 闫书丽, 刘思峰. 基于前景理论的群体灰靶决策方法[J]. *控制与决策*, 2014, 29(4): 673-678. (Yan S L, Liu S F. Group grey target decision making based on prospect theory[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(4): 673-678.)
- [10] 龚承柱, 李兰兰, 卫振锋, 等. 基于前景理论和隶属度的混合型多属性决策方法[J]. *中国管理科学*, 2014, 22(10): 122-128. (Gong C Z, Li L L, Wei Z F, et al. A method for hybrid multiple attribute decision making based on prospect theory and membership[J]. *Chinese J of Management Science*, 2014, 22(10): 122-128.)
- [11] 刘云志, 樊治平. 基于前景理论的具有指标期望的多指标决策方法[J]. *控制与决策*, 2015, 30(1): 91-97. (Liu Y Z, Fan Z P. Multiple attribute decision making considering attribute aspirations: A method based on prospect theory[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(1): 91-97.)
- [12] Fan Z P, Zhang X, Chen F D, et al. Multiple attribute decision making considering aspiration-levels: A method based on prospect theory[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, 65(2): 341-350.
- [13] 李鹏, 刘思峰, 朱建军. 基于MYCIN不确定因子和前景理论的随机直觉模糊决策方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(6): 1509-1515. (Li P, Liu S F, Zhu J J. Intuitionistic fuzzy stochastic multi-criteria decision making methods based on MYCIN certainty factor and prospect theory[J]. *System Engineering—Theory & Practice*, 2013, 33(6): 1509-1515.)
- [14] 王坚强, 周玲. 基于前景理论的灰色随机多准则决策方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(9): 1658-1664. (Wang J Q, Zhou L. Grey stochastic multi-criteria decision making approach based on prospect theory[J]. *System Engineering—Theory & Practice*, 2010, 30(9): 1658-1664.)
- [15] 刘培德. 一种基于前景理论的不确定语言变量风险型多属性决策方法[J]. *控制与决策*, 2011, 26(6): 893-897. (Liu P D. Method for multi-criteria decision making under risk with the uncertain linguistic variables based on prospect theory[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(6): 893-897.)
- [16] Wang Jian-qiang, Li Kang-jian, Zhang Hong-yu. Interval-valued intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making approach based on prospect score function[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2012, 27(1): 119-125.
- [17] 江文奇. 基于前景理论和VIKOR的风险型模糊多准则决策方法[J]. *控制与决策*, 2014, 29(12): 2287-2291. (Jiang W Q. Risky fuzzy multi-criteria decision making method based on prospect theory and VIKOR[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(12): 2287-2291.)
- [18] 徐泽水, 达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用[J]. *系统工程学报*, 2003, 18(1): 67-70. (Xu Z S, Da Q L. Possibility degree method for ranking interval number and its application[J]. *J of System Engineering*, 2003, 18(1): 67-70.)