第 32卷 第 7期
2017年 7月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.32 No.7
Jul. 2017

文章编号: 1001-0920(2017)07-1286-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.0465

基于Choquet积分的多属性灰靶群决策方法

王大澳[1], 菅利荣[1†], 刘思峰[1], 王 慧[2]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 211106；2. 北京交通大学 经济管理学院，北京 100044)

摘 要: 针对属性间具有关联性且属性值为区间灰数的多属性群决策问题,提出一种基于Choquet 积分的多属性灰靶群决策方法. 根据模糊测度和Choquet积分的性质,定义关于区间灰数的Choquet积分信息集成算子,并证明其相关性质;通过灰靶决策方法,对方案集的综合靶心距进行排序. 仿真实例验证了所提出方法的合理性.

关键词: 区间灰数；模糊测度；Choquet积分；灰靶决策

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Approach for multi-attribute grey target group decision-making based on Choquet integral

WANG Da-ao[1], *JIAN Li-rong*[1†], *LIU Si-feng*[1], *WANG Hui*[2]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 211106，China；2. School of Economic and Management，Beijing Jiaotong University，Beijing 100044，China)

Abstract: A method of multi-attribute grey target group decision-making based on Choquet integral is proposed for the multi-attribute group decision-making problems that there are correlation between attributes and attribute values are interval grey number. Firstly, the Choquet integral information integration operator of interval grey numbers is defined according to the properties of the fuzzy measure and Choquet integral, and the related properties are proved. Then, the scheme set is sorted by using the method of gray target decision-making. Finally, a simulation example verifies the rationality of the proposed method.

Keywords: interval grey number；fuzzy measure；Choquet integral；grey target decision

0 引 言

多属性群决策方法是通过多位决策者对一系列备选方案的多种属性进行评价,再运用决策模型对各方案进行排序,从而找出解决问题的最优方案,已在许多经济、管理领域的决策问题中得到广泛应用. 由于决策者认知能力存在的局限性,在实际的群决策过程中,决策者往往只能确定每个方案下属性值的区间范围,而难以给出确切的值,邓聚龙教授将这种数称为区间灰数[1].

灰靶决策是由邓聚龙教授在解决灰色多属性决策问题时提出的,之后众多学者都致力于该方法的研究[2]. 党耀国等[3]针对实际情况中难以将属性值精确化的情况,提出了基于区间数的灰靶决策模型;曾波等[4]针对决策过程中可能出现的极端指标值对传统灰靶决策的影响,提出了一种对每个指标的指标值所围成图形面积进行比较以确定方案优劣的方法;闫书丽等[5]考虑决策者关于指标满意域和风险态度对群体决策的影响,提出了基于前景理论的三参数区间灰数型群体灰靶决策方法;刘勇等[6]考虑决策者在决策过程中持有不同的风险态度对决策结果的影响,基于前景理论提出了一种多目标灰靶决策方法;宋捷等[7]考虑传统灰靶决策模型中靶心距只能作为标量使用的缺点,提出了正负靶心灰靶决策模型;Luo等[8]考虑实际决策环境的复杂性,提出一种具有多指标、多目标、多局势的灰靶决策模型. 然而,上述文献对于灰靶决策的研究,无论是考虑决策者风险态度还是对灰靶决策模型的拓展,都默认了决策属性之间相互独立、没有交互作用,基于这样的前提假设,一组属性对目标方案总的贡献就等于每个属性的简单加权求和. 但在实际决策过程中属性间的交互作用是不

收稿日期: 2016-04-19；**修回日期:** 2016-07-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71573124, 71503103, 71173104)；欧盟项目 (FP7-PIIF-GA-2013-629051)；江苏自然科学基金项目(BK20150157)；江苏省普通高校研究生科研创新资助项目(KYZZ16_0154).

作者简介: 王大澳 (1988−), 男, 博士生, 从事航空产业集群、不确定性预测与决策软计算方法的研究；菅利荣 (1968−), 女, 教授, 博士生导师, 从事不确定性预测与决策软计算方法、科技创新管理等研究.

†通讯作者. E-mail: jianlr@nuaa.edu.cn

容忽视的,属性间具有的关联性破坏了属性权重的可加性,使得加权求和后的结果和实际情况存在较大的差异. 鉴于此, Onisawwa 等[9] 提出了模糊测度,有效地解决了属性间存在的关联性问题; Tan 等[10] 在研究多属性决策问题中,定义了直觉模糊 Choquet 积分算子; 万树平等[11] 基于 Choquet 积分研究了方案评价信息为三角直觉模糊数的关联多属性决策问题; Qin 等[12] 针对多准则群决策问题中评价值为区间直觉模糊数的情况,定义了区间直觉模糊 Choquet 积分算子; Deepa 等[13] 针对方案评价值为区间直觉犹豫模糊数的多准则群决策问题,定义了区间直觉犹豫模糊 Choquet 积分算子,并构建了基于 TOPSIS 方法的多准则群决策模型; Wu 等[14] 基于 Choquet 积分研究了多目标决策问题中属性值为直觉模糊的情况; 王霞等[15] 基于 Choquet 积分研究了属性值为区间灰数且属性之间存在关联性的多属性决策问题.

纵观灰靶决策和多属性决策问题的相关文献,不论是理论的探讨还是模型的构建,都没有考虑多属性群决策问题中属性间具有关联性且属性值为区间灰数的情况. 鉴于此,在前人研究的基础上,本文将模糊测度和 Choquet 积分、灰靶决策方法相结合,提出了基于 Choquet 积分的多属性灰靶群决策方法.

1 理论基础

1.1 区间灰数及其运算

定义 1[16] 设灰数 $a(\otimes) \in [\underline{a}, \overline{a}], 0 \leqslant \underline{a} < \overline{a} \leqslant 1$ 为标准灰数, $\hat{\otimes} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \overline{a})$ 为标准灰数 $a(\otimes)$ 的核, $g^{\circ}(a(\otimes)) = (\overline{a} - \underline{a})$ 为标准灰数的灰度,则称 $S(a(\otimes)) = \dfrac{\hat{\otimes}}{1 + g^{\circ}(a(\otimes))}$ 为标准灰数 $a(\otimes)$ 的相对核,称 $P(a(\otimes)) = 1 - g^{\circ}(a(\otimes))$ 为标准灰数 $a(\otimes)$ 的精确度.

定义 2[16] 设区间灰数 $a_1(\otimes)$ 和 $a_2(\otimes)$ 为两个标准灰数, $S(a_1(\otimes))$ 和 $S(a_2(\otimes))$ 为对应的相对核, $P(a_1(\otimes))$ 和 $P(a_2(\otimes))$ 为对应的精确度.

1) 若 $S(a_1(\otimes)) < S(a_2(\otimes))$, 则标准灰数 $a_1(\otimes) \prec a_2(\otimes)$.

2) 若 $S(a_1(\otimes)) > S(a_2(\otimes))$, 则标准灰数 $a_1(\otimes) \succ a_2(\otimes)$.

3) 若 $S(a_1(\otimes)) = S(a_2(\otimes))$, 则当 $P(a_1(\otimes)) = P(a_2(\otimes))$ 时, 有 $a_1(\otimes) = a_2(\otimes)$; 当 $P(a_1(\otimes)) < P(a_2(\otimes))$ 时, 有 $a_1(\otimes) \prec a_2(\otimes)$; 当 $P(a_1(\otimes)) > P(a_2(\otimes))$ 时, 有 $a_1(\otimes) \succ a_2(\otimes)$.

对区间灰数进行推广,若标准灰数 $a(\otimes) \in \tilde{h}, \tilde{h}$ 为区间灰数集,则 $\tilde{h}$ 的相对核为

$$S(\tilde{h}) = \sum_{a(\otimes)\in\tilde{h}} \frac{S(a(\otimes))}{n}, \tag{1}$$

$\tilde{h}$ 的精确度为

$$P(\tilde{h}) = \sum_{a(\otimes)\in\tilde{h}} \frac{P(a(\otimes))}{n}, \tag{2}$$

n 为 $\tilde{h}$ 中区间灰数的个数. 对于任意两个具有相同个数的区间灰数集 $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$, 有:

1) 若 $S(\tilde{h}_1) < S(\tilde{h}_2)$, 则 $\tilde{h}_1 \prec \tilde{h}_2$.

2) 若 $S(\tilde{h}_1) > S(\tilde{h}_2)$, 则 $\tilde{h}_1 \succ \tilde{h}_2$.

3) 若 $S(\tilde{h}_1) = S(\tilde{h}_2)$, 则当 $P(\tilde{h}_1) = P(\tilde{h}_2)$ 时, 有 $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2$; 当 $P(\tilde{h}_1) < P(\tilde{h}_2)$ 时, 有 $\tilde{h}_1 \prec \tilde{h}_2$; 当 $P(\tilde{h}_1) > P(\tilde{h}_2)$ 时, 有 $\tilde{h}_1 \succ \tilde{h}_2$.

1.2 模糊测度

在实际的多属性群决策过程中,属性间往往具有交互作用,某个属性在整个属性集中的重要程度不仅依赖于其自身权重,而且与其他属性的权重相关. 模糊测度不但可以表征每个属性的权重,还可以表征属性集的权重与属性之间的关联程度. 因此,本文采用 Sugeno[17] 提出的 λ-模糊测度来描述属性之间的关联关系,其定义如下.

定义 3 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 是一个非空集合, $P(X)$ 是 X 的幂集, 函数 $\mu : P(X) \to [0, 1]$, 若满足: 1) 边际条件. $\mu(\varnothing) = 0, \mu(X) = 1$. 2) 单调性. $\forall A, B \in P(X)$, 若 $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. 3) $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda\mu(A)\mu(B)$, 其中 $\lambda \in [-1, \infty)$. 则称 μ 是 X 上的 λ-模糊测度.

若 $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$, 则 μ 为 X 上的可加测度,表示集合 A 与 B 之间是互相独立的;

若 $\mu(A \bigcup B) < \mu(A) + \mu(B)$, 则 μ 为 X 的次可加测度,表示集合 A 与 B 之间存在着冗余关系;

若 $\mu(A \bigcup B) > \mu(A) + \mu(B)$, 则 μ 为 X 上的超可加测度,表示集合 A 与 B 之间存在着互补关系.

在多属性群决策问题中,运用 λ-模糊测度可以更精确地表述出属性之间具有的关联性. 属性集可以看作是定义 3 中的集合 X, 属性集 X 的重要程度 $\mu(X)$ 可以看作是集合 X 的模糊测度.

$$\mu(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\Big(\prod\limits_{j=1}^{n}[1 + \lambda\mu(x_j)] - 1\Big), \lambda \neq 0; \\ \prod\limits_{j=1}^{n}\mu(x_j),\ \lambda = 0. \end{cases} \tag{3}$$

由边际条件 $\mu(X) = 1$, 可将式 (3) 改写为

$$\lambda + 1 = \prod_{j=1}^{n} 1 + \lambda\mu(x_j). \tag{4}$$

1.3 灰靶决策模型

灰靶决策模型的主要思想是分别将理想最优和最劣的方案设定为灰靶的正负靶心,再通过比较每个方案的综合靶心距的大小,对方案的优劣进行排序.

定义4 设区间灰数$\tilde{h}_j^+ = \max\{S(\tilde{h}_{ij}) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}(j=1,2,\cdots,n)$,其对应的评价值为$[\underline{a}_{ij}^+, \overline{a}_{ij}^+]$,则正靶心为

$$\tilde{h}^+ = \tilde{h}_1^+, \tilde{h}_2^+, \cdots, \tilde{h}_n^+ = \\ [\underline{a}_{i'1}^+, \overline{a}_{i'1}^+], [\underline{a}_{i'2}^+, \overline{a}_{i'2}^+], \cdots, [\underline{a}_{i'n}^+, \overline{a}_{i'n}^+]. \tag{5}$$

定义5 设区间灰数$\tilde{h}_j^- = \max\{S(\tilde{h}_{ij}) | 1 \leqslant i \leqslant m\}(j = 1,2,\cdots,n)$,其对应的评价值为$[\underline{a}_{ij}^-, \overline{a}_{ij}^-]$,则负靶心为

$$\tilde{h}^- = \tilde{h}_1^-, \tilde{h}_2^-, \cdots, \tilde{h}_n^- = \\ [\underline{a}_{i'1}^-, \overline{a}_{i'1}^-], [\underline{a}_{i'2}^-, \overline{a}_{i'2}^-], \cdots, [\underline{a}_{i'n}^-, \overline{a}_{i'n}^-]. \tag{6}$$

取指标权重为$\omega = \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m, \sum_{i=1}^m \omega_j = 1$.

定义6 方案i的正靶心距为

$$\varepsilon_i^+ = 2^{-\frac{1}{2}}[\omega_1(\underline{a}_{i1} - \underline{a}_{i1}^+)^2 + \omega_1(\overline{a}_{i1} - \\ \overline{a}_{i1}^+)^2 + \cdots + \omega_n(\overline{a}_{in} - \overline{a}_{in}^+)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

定义7 方案i的负靶心距为

$$\varepsilon_i^- = 2^{-\frac{1}{2}}[\omega_1(\underline{a}_{i1} - \underline{a}_{i1}^-)^2 + \omega_1(\overline{a}_{i1} - \\ \overline{a}_{i1}^+)^2 + \cdots + \omega_n(\overline{a}_{in} - \overline{a}_{in}^-)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

定义8 方案i的正负靶心距为

$$\varepsilon^0 = 2^{-\frac{1}{2}}[\omega_1(\underline{a}_{i1}^+ - \underline{a}_{i1}^-)^2 + \omega_1(\overline{a}_{i1}^+ - \\ \overline{a}_{i1}^-)^2 + \cdots + \omega_n(\overline{a}_{in}^+ - \overline{a}_{in}^-)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

定义9 方案i的综合靶心距为

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^+ \cos\theta = \frac{(\varepsilon_i^+)^2 + (\varepsilon^0)^2 - (\varepsilon_i^-)^2}{2\varepsilon^0}. \tag{10}$$

2 基于Choquet积分的区间灰数信息集成算子及性质

法国数学家Choquet[18]在1954年提出了关于容度的理论,Choquet积分是一种不满足可加性测度的非线性积分,对于具有多个属性且属性之间存在关联的情形,可通过Choquet积分对其进行集结运算.

定义10 若F为定义在X上的非负实值函数,μ为X上的模糊测度,则F关于模糊测度μ的离散Choquet积分为

$$C_\mu(F) = \sum_{i=1}^n F_{(i)}(\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)}))). \tag{11}$$

其中:$(\cdot)$表示$F_{(i)}$在X上的排序,如$F_{(1)} \leqslant F_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant F_{(n)}$; $A_{(i)} = a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n$, $A_{(n+1)} \neq \varnothing$.

根据Choquet积分以及区间灰数的性质,可以对具有区间灰数信息的模糊测度定义其Chouquet积分信息集成算子.

2.1 基于Choquet积分的区间灰数的信息集成算子

定义11 若X由n个区间灰数组成,定义为$a_i(\otimes) \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i](i = 1,2,\cdots,n)$, μ为X上的模糊测度,则$a_i(\otimes)$关于μ的离散Choquet积分的区间灰数信息集成算子IVGCI为

$$\mathrm{IVGCI}(a_1(\otimes), a_2(\otimes), \cdots, a_n(\otimes)) = \\ \sum_{i=1}^n a_{(i)}(\otimes)(\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})). \tag{12}$$

其中:$(\cdot)$表示$a_{(i)}(\otimes)$在X上的排序,如$a_{(1)}(\otimes) \leqslant a_{(2)}(\otimes) \leqslant \cdots \leqslant a_{(n)}(\otimes)$; $A_{(i)}(\otimes) = \{a_i(\otimes), a_{i+1}(\otimes), \cdots, a_n(\otimes)\}$, $A_{(n+1)}(\otimes) \neq \varnothing$.

定理1 μ为X上的模糊测度,$\tilde{h}_i(\otimes) \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$为定义在X上的一组非负区间灰数,$\tilde{h}_{(i)}$为其中第i个最大的区间灰数,则IVGCI信息集成算子的结果仍为区间灰数,且有

$$\mathrm{IVGCI}(a_1(\otimes), a_2(\otimes), \cdots, a_n(\otimes)) = \\ \Big[\sum_{i=1}^n \underline{a}_{(i)}[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})], \\ \sum_{i=1}^n \overline{a}_{(i)}[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})]\Big]. \tag{13}$$

证明 采用数学归纳法证明. 当$n = 1$时,显然可以根据定义11得到证明. 当$n = 2$时,根据区间灰数的运算法则,可以得到

$$\tilde{h}_2(\otimes)[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)}] = \\ [\underline{a}_{(2)}[\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)})], \overline{a}_{(2)}[\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)})]].$$

因为$\tilde{h}_1(\otimes) + \tilde{h}_2(\otimes) = [\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \overline{a}_1 + \overline{a}_2]$,所以

$$\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes), \tilde{h}_2(\otimes)) = \\ \tilde{h}_1(\otimes)[\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})] + \tilde{h}_2(\otimes)[\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)})] = \\ [\underline{a}_{(1)}[\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})] + \underline{a}_{(2)}[\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)})], \\ \overline{a}_{(1)}[\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})] + \overline{a}_{(2)}[\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)})]] = \\ \Big[\sum_{i=1}^2 (\underline{a}_{(i)})[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})], \\ \sum_{i=1}^2 (\overline{a}_{(i)})[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})]\Big].$$

因此,当$n = 2$时,定理成立. 假设$n = k$时定理也成立,即有

$$\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes), \tilde{h}_2(\otimes), \cdots, \tilde{h}_k(\otimes)) = \\ \Big[\sum_{i=1}^k \underline{a}_{(i)}[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})], \\ \sum_{i=1}^k \overline{a}_{(i)}[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})]\Big].$$

当$n=k+1$时,有

$$\begin{aligned}&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_{k+1}(\otimes))=\\&\Big[(\underline{a}_{(k+1)})[\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)})]+\\&\sum_{i=1}^{k}(\underline{a}_{(i)})[\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})],\\&(\overline{a}_{(k+1)})[\mu(A_{(k+1)})-\mu(A_{(k+2)})]+\\&\sum_{i=1}^{k}(\overline{a}_{(i)})[\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})]\Big]=\\&\Big[\sum_{i=1}^{k+1}(\underline{a}_{(i)})[\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})],\\&\sum_{i=1}^{k+1}(\overline{a}_{(i)})[\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})]\Big].\end{aligned}$$

因此,当$n=k+1$时,定理成立. □

命题1　若$\mu(A)=\sum\limits_{x_i\in A}\mu(x_i)$对于所有$A\subseteq X$有$\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(x_i)=1$,则有

$$\mu(x_i)=\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)}),\ i=1,2,\cdots,n. \tag{14}$$

在这种情况下,区间灰数Choquet积分算子退化为区间灰数几何加权算子IVGWG,即

$$\begin{aligned}&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_n(\otimes))=\\&\mathrm{IVGWG}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_n(\otimes)).\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}&\mathrm{IVGCI}(a_1(\otimes),a_2(\otimes),\cdots,a_n(\otimes))=\\&\Big[\sum_{i=1}^{n}\underline{a}_{(i)}(\otimes)[\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})],\\&\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{(i)}(\otimes)[\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})]\Big].\end{aligned}$$

现在,$\mu(x_i)=\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(x_i)=1$,因此

$$\begin{aligned}&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_n(\otimes))=\\&\Big[\sum_{i=1}^{n}\underline{a}_{(i)}\mu(x_i),\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{(i)}\mu(x_i)\Big]=\\&\mathrm{IVGWG}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_k(\otimes)).\end{aligned}$$ □

2.2　区间灰数Choquet积分的信息集成算子的性质

根据区间灰数的运算法则和定理1,可以得到IVGCI的以下几条性质. 设μ为X上的模糊测度,$\tilde{h}_{(i)}(\otimes)(i=1,2,\cdots,n)$为定义在$X$上的区间灰数,则有:

1) 若f为定义在X上的区间灰数函数,则

$$\begin{aligned}&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes)\cdot f,\tilde{h}_2(\otimes)\cdot f,\cdots,\tilde{h}_n(\otimes)\cdot f)=\\&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_n(\otimes))\cdot f;\end{aligned} \tag{15}$$

2) 当$r>0$时,有

$$\begin{aligned}&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1^r(\otimes),\tilde{h}_2^r(\otimes),\cdots,\tilde{h}_n^r(\otimes))=\\&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_n(\otimes))^r;\end{aligned} \tag{16}$$

3) 若$\tilde{h}_1(\otimes)=\tilde{h}_2(\otimes)=\cdots=\tilde{h}_n(\otimes)=\tilde{h}(\otimes)$,则

$$\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_n(\otimes))=\tilde{h}(\otimes). \tag{17}$$

对于在X上的任意两个区间灰数集$\tilde{h}_i(\otimes)(i=1,2,\cdots,n)$和$\tilde{f}_i(\otimes)(i=1,2,\cdots,n)$,有:

1)

$$\begin{aligned}&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes)\cdot\tilde{f}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes)\cdot\tilde{f}_2(\otimes),\\&\quad\cdots,\tilde{h}_n(\otimes)\cdot\tilde{f}_n(\otimes))=\\&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_n(\otimes))\cdot\\&\mathrm{IVGCI}(\tilde{f}_1(\otimes),\tilde{f}_2(\otimes),\cdots,\tilde{f}_n(\otimes));\end{aligned} \tag{18}$$

2) 对于所有的$\alpha_{(i)}\leqslant\beta_{(i)}$,若$\alpha_{(i)}\in\tilde{h}_i,\beta_{(i)}\in\tilde{f}_i$,则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{IVGCI}(\tilde{h}_1(\otimes),\tilde{h}_2(\otimes),\cdots,\tilde{h}_n(\otimes))\leqslant\\&\mathrm{IVGCI}(\tilde{f}_1(\otimes),\tilde{f}_2(\otimes),\cdots,\tilde{f}_n(\otimes)).\end{aligned} \tag{19}$$

3　基于Choquet积分的多属性灰靶群决策方法

设方案集为$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,属性因素集合为$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$. 决策者用区间灰数表示方案A_i在属性c_j下的评价值,记为$\tilde{h}_{ij}(\otimes)=[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]$. 如果对于一个属性,两个或者更多的决策者给出相同的评价值,则这个值用一个值$\tilde{h}_{ij}(\otimes)$来表示. 算法步骤如下.

Step 1: 根据专家对方案A_i在属性c_j下给出的评价值,构建区间灰数决策矩阵

$$\tilde{D}_{ij}(\otimes)=(\tilde{h}_{ij}(\otimes))_{n\times m}.$$

Step 2: 对专家给出的评价值进行规范化处理,设$I_j(j=1,2)$分别表示成本型、效益型指标,采用下面的公式对决策矩阵$\tilde{D}=(\tilde{h}_{ij}(\otimes))_{n\times m}$进行规范化处理消除量纲,将区间灰数转化为标准区间灰数的形式,得到规范化矩阵$\tilde{Z}=(\tilde{h}'_{ij}(\otimes))_{n\times m}=[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]$, $0\leqslant\underline{a}_{ij}\leqslant\overline{a}_{ij}\leqslant1$.

$$\underline{a}_{ij}^{\prime(k)}=\frac{1/\overline{a}_{ij}^{(k)}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\Big(\dfrac{1}{\underline{a}_{ij}^{(k)}}\Big)^2}},\ i=1,2,\cdots,m,\ j\in I_1; \tag{20}$$

$$\overline{a}_{ij}^{'(k)}=\frac{1/\underline{a}_{ij}^{(k)}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}(\frac{1}{\overline{a}_{ij}^{(k)}})^2}},\ i=1,2,\cdots,m,\ j\in I_1;\quad(21)$$

$$\underline{a}_{ij}^{'(k)}=\frac{\underline{a}_{ij}^{(k)}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}(\overline{a}_{ij}^{(k)})^2}},\ i=1,2,\cdots,m,\ j\in I_2;\quad(22)$$

$$\overline{a}_{ij}^{'(k)}=\frac{\overline{a}_{ij}^{(k)}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}(\underline{a}_{ij}^{(k)})^2}},\ i=1,2,\cdots,m,\ j\in I_2.\quad(23)$$

Step 3: 根据实际的决策问题,通过专家对每个属性的重要性进行评定,给出每个属性的模糊测度(权重),再根据式(4)计算属性集C的λ-模糊测度.

Step 4: 根据相对核对各方案A_i的评价值进行大小比较,再根据式(13)对区间灰数进行Choquet积分集成.

Step 5: 根据式(7)和(8),分别计算各方案A_i在Step 4集成的区间灰数集的正、负靶心距,并根据式(9)计算正、负靶心距.

Step 6: 根据式(10),计算每个方案的综合靶心距.

Step 7: 比较方案$A_i(i=1,2,\cdots,m)$综合靶心距的大小,从而获得最佳方案.

4 案例分析及模型的有效性检验

4.1 案例分析

某投资银行拟对汉中航空产业园内的4家高技术航空企业A_1、A_2、A_3、A_4中的一家进行投资. 为了降低投资风险,银行邀请了3位权威专家e_1,e_2,e_3对这4家企业进行评估,因3位专家对企业的实际了解程度不同,在评价中给予不同的权重(0.2, 0.5, 0.3). 评估时考虑4项主要属性: u_1年产值(单位: 千万元); u_2技术创新能力; u_3抗风险能力; u_4环境污染程度. u_1、u_2和u_3为效益型属性, u_4为成本型属性. 通过专家对每个属性重要性的评定,假设4个属性的模糊测度分别为$\mu(c_1)=0.5,\mu(c_2)=0.4,\mu(c_3)=0.3,\mu(c_4)=0.2$,该投资银行应如何决策.

Step 1: 根据3位专家对方案A_i在属性c_j下给出的评价值,构建区间灰数决策矩阵$\tilde{D}_{ij}(\otimes)=(\tilde{h}_{ij}(\otimes))_{n\times m}$,如表1所示.

Step 2: 对3位专家给出的评价值矩阵进行规范化处理,得到规范化矩阵$\tilde{Z}=(\tilde{h}'_{ij}(\otimes))_{n\times m}=[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]$, $0\leqslant\underline{a}_{ij}\leqslant\overline{a}_{ij}\leqslant 1$,如表2所示.

Step 3: 根据式(4),采用Matlab求解得到$\lambda=-0.65$,再根据式(3)求得各属性集的权重为

$$\mu(c_1,c_2)=0.77,\ \mu(c_1,c_3)=0.7,$$
$$\mu(c_1,c_4)=0.64,\ \mu(c_3,c_4)=0.46,$$
$$\mu(c_2,c_3)=0.62,\ \mu(c_2,c_4)=0.55,$$
$$\mu(c_1,c_2,c_3)=0.92,\ \mu(c_1,c_2,c_4)=0.87,$$
$$\mu(c_1,c_3,c_4)=0.81,\ \mu(c_2,c_3,c_4)=0.74,$$
$$\mu(c_1,c_2,c_3,c_4)=1.$$

Step 4: 根据相对核对各方案A_i的评价值进行区间灰数Choquet积分集成,得到

$$S(\tilde{h}_{11}(\otimes))=0.23,\ P(\tilde{h}_{11}(\otimes))=0.97,$$
$$S(\tilde{h}_{12}(\otimes))=0.14,\ P(\tilde{h}_{12}(\otimes))=0.86,$$
$$S(\tilde{h}_{13}(\otimes))=0.19,\ P(\tilde{h}_{13}(\otimes))=0.82,$$
$$S(\tilde{h}_{14}(\otimes))=0.28,\ P(\tilde{h}_{14}(\otimes))=0.74;$$
$$\tilde{h}_{1(1)}(\otimes)=\tilde{h}_{12}(\otimes),\ \tilde{h}_{1(2)}(\otimes)=\tilde{h}_{13}(\otimes),$$
$$\tilde{h}_{1(3)}(\otimes)=\tilde{h}_{11}(\otimes),\ \tilde{h}_{1(4)}(\otimes)=\tilde{h}_{14}(\otimes);$$
$$\mu(A_{(1)})-\mu(A_{(2)})=$$
$$\mu(c_1,c_2,c_3,c_4)-\mu(c_2,c_3,c_4)=1-0.74=0.26,$$
$$\mu(A_{(2)})-\mu(A_{(3)})=$$
$$\mu(c_2,c_3,c_4)-\mu(c_3,c_4)=0.74-0.46=0.28,$$
$$\mu(A_{(3)})-\mu(A_{(4)})=$$
$$\mu(c_3,c_4)-\mu(c_4)=0.46-0.2=0.26,$$

表 1　区间灰数决策矩阵

方案	c_1	c_2	c_3	c_4
A_1	{[250,270],[310,340],[350,370]}	{[0.2,0.5],[0.1,0.3],[0.3,0.4]}	{[0.4,0.6],[0.3,0.4],[0.2,0.4]}	{[0.4,0.6],[0.3,0.4],[0.3,0.4]}
A_2	{[450,480],[400,420],[360,380]}	{[0.5,0.6],[0.8,0.9],[0.4,0.6]}	{[0.6,0.9],[0.5,0.7],[0.7,0.8]}	{[0.3,0.5],[0.6,0.8],[0.4,0.6]}
A_3	{[520,560],[390,420],[480,530]}	{[0.5,0.7],[0.5,0.8],[0.2,0.4]}	{[0.2,0.4],[0.6,0.8],[0.2,0.4]}	{[0.5,0.7],[0.5,0.8],[0.6,0.9]}
A_4	{[260,280],[240,270],[330,350]}	{[0.6,0.9],[0.6,0.7],[0.8,0.9]}	{[0.6,0.9],[0.5,0.8],[0.3,0.6]}	{[0.2,0.3],[0.2,0.4],[0.3,0.5]}

表 2　规范化矩阵

方案	c_1	c_2	c_3	c_4
A_1	{[0.18,0.21],[0.22,0.26],[0.25,0.29]}	{[0.09,0.28],[0.04,0.17],[0.13,0.23]}	{[0.19,0.4],[0.14,0.27],[0.09,0.27]}	{[0.17,0.4],[0.25,0.53],[0.25,0.53]}
A_2	{[0.32,0.37],[0.29,0.33],[0.26,0.29]}	{[0.21,0.34],[0.34,0.51],[0.17,0.34]}	{[0.2,0.53],[0.23,0.47],[0.32,0.54]}	{[0.28,0.61],[0.13,0.26],[0.17,0.4]}
A_3	{[0.38,0.43],[0.28,0.33],[0.35,0.41]}	{[0.21,0.4],[0.21,0.46],[0.09,0.23]}	{[0.09,0.27],[0.25,0.54],[0.09,0.27]}	{[0.14,0.32],[0.13,0.32],[0.11,0.26]}
A_4	{[0.19,0.22],[0.17,0.21],[0.24,0.27]}	{[0.26,0.51],[0.26,0.4],[0.34,0.51]}	{[0.09,0.2],[0.23,0.54],[0.14,0.4]}	{[0.11,0.26],[0.25,0.79],[0.2,0.53]}

$\mu(A_{(4)})-\mu(A_{(5)})=\mu(c_4)=0.2;$

$\tilde{h}_1=([0.154\,661,0.320\,562],[0.158\,613,0.293\,807],$
$[0.175474,0.314652]),$

$\tilde{h}_2=([0.252\,472,0.450\,645],[0.250\,216,0.390\,85],$
$[0.224087,0.382729]),$

$\tilde{h}_3=([0.210\,502,0.357\,752],[0.230\,64,0.415\,388],$
$[0.160547,0.293364]),$

$\tilde{h}_4=([0.153\,21,0.283\,970],[0.226\,866,0.490\,505],$
$[0.221\,887,0.4231\,67]).$

Step 5: 根据式(7)和(8), 分别计算各方案 A_i 在Step 4集成的区间灰数集的正、负靶心距, 并根据式(9)计算正、负靶心距:

$$\varepsilon_1^+=0.124\,802,\ \varepsilon_1^-=0.015\,341,$$
$$\varepsilon_2^+=0.053\,527,\ \varepsilon_2^-=0.099\,887,$$
$$\varepsilon_3^+=0.074\,465,\ \varepsilon_3^-=0.076\,429,$$
$$\varepsilon_4^+=0.061\,007,\ \varepsilon_4^-=0.118\,021,$$
$$\varepsilon^0=0.132\,856.$$

Step 6: 根据式(10)计算每个方案的综合靶心距:

$$\varepsilon_1=0.124\,16,\ \varepsilon_2=0.039\,661,$$
$$\varepsilon_3=0.065\,313,\ \varepsilon_4=0.028\,014.$$

Step 7: 根据 ε_i 的大小对方案 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 进行排序. 因为 $\varepsilon_4<\varepsilon_2<\varepsilon_3<\varepsilon_1$, 所以 $A_4\succ A_2\succ A_3\succ A_1$, 故选择企业4进行投资.

4.2 对方法的有效性进行检验

对于群决策问题, 很难确定哪一种方法是解决给定决策问题的最佳方法. 为了检验所建立模型的有效性, 文献[19]建立了以下几个检测标准来衡量模型的有效性:

标准1 一个有效的多准则方法, 在不改变每个决策属性的相对重要性的情况下, 将一个非最优方案用另一个更差的方案代替后, 将不改变最优方案的选择.

标准2 一个有效的多准则决策方法应该具有传递性.

标准3 当一个多属性决策问题分解为较小的问题, 同样的决策方法应用于该较小的问题时, 原多属性问题方案排序中去掉较小问题中所没有的方案后, 即为较小的问题的方案排序.

使用这些检测标准对本文所提出的基于Choquet积分的多属性灰靶群决策方法进行有效性检验.

4.2.1 基于检验标准1的有效性检验

为了检测基于Choquet积分的多属性灰靶群决策方法在标准1下的有效性, 将方案 A_2（非最优方案）用更差的方案 A_2' 代替, 如表3所示.

表3　区间灰数决策矩阵

方案	c_1	c_2	c_3	c_4
A_1	{[250,270],[310,340],[350,370]}	{[0.2,0.5],[0.1,0.3],[0.3,0.4]}	{[0.4,0.6],[0.3,0.4],[0.2,0.4]}	{[0.4,0.6],[0.3,0.4],[0.3,0.4]}
A_2	{[310,340],[270,320],[290,330]}	{[0.2,0.4],[0.5,0.6],[0.3,0.4]}	{[0.4,0.6],[0.3,0.5],[0.5,0.6]}	{[0.5,0.7],[0.8,0.9],[0.6,0.8]}
A_3	{[520,560],[390,420],[480,530]}	{[0.5,0.7],[0.5,0.8],[0.2,0.4]}	{[0.2,0.4],[0.6,0.8],[0.2,0.4]}	{[0.5,0.7],[0.5,0.8],[0.6,0.9]}
A_4	{[260,280],[240,270],[330,350]}	{[0.6,0.9],[0.6,0.7],[0.8,0.9]}	{[0.2,0.3],[0.5,0.8],[0.3,0.6]}	{[0.6,0.9],[0.2,0.4],[0.3,0.5]}

运用同样的算法步骤得到方案 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的排序为 $A_4\succ A_3\succ A_1\succ A_2'$. 可以看出, 将原群决策问题的方案 A_2(非最优方案)用更差的方案 A_2' 代替后的最优方案仍为原群决策问题的最优方案 A_4. 所以证明了所提出的多属性灰靶群决策方法满足检验标准1的有效性检验.

4.2.2 基于检验标准2和检验标准3的有效性检验

为了检验所提出的多属性灰靶群决策方法是否满足检验标准2和检验标准3. 将原群决策问题分解为一系列小的问题, 如 (A_1,A_2,A_3) 和 (A_2,A_3,A_4). 根据所提出的灰靶群决策方法的计算步骤, 获得小问题的方案排序分别为 $A_2\succ A_3\succ A_1$ 和 $A_4\succ A_2\succ A_3$. 如果将子问题方案的排序结合到一起获得的最终的排序为 $A_4\succ A_2\succ A_3\succ A_1$, 则与原多属性群决策问题的方案排序相同, 证明了该方法具有传递性, 满足检验标准2和检验标准3的有效性检测.

通过上述的分析可知, 本文提出的基于Choquet积分的多属性灰靶群决策模型适用于属性之间具有关联性, 且因决策者自身认识的局限性以及客观环境的不确定导致的决策属性值只能通过区间灰数的形式进行表示的群决策问题.

5 结　论

本文针对属性之间具有关联性且属性值为区间灰数的多属性群决策问题, 首先应用Choquet积分对具有区间灰数信息的属性值进行集成, 并证明了集成后的结果仍为区间灰数, 保证了区间灰数的本质特征得以延续; 其次, 运用模糊测度方法计算属性之间具有关联性的属性集权重; 再结合正、负靶心灰靶决策

方法,给出了一种解决属性之间具有关联性且属性值为区间灰数的多属性群决策方法. 最后运用该方法对实例进行了分析,并根据检测标准验证了模型的有效性和可行性.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 70-71.
(Deng J L. Grey theory foundations[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002: 70-71.)

[2] 邓聚龙. 灰预测与决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 56-61.
(Deng J L. Grey prediction and grey decision[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science &Technology, 2002: 56-61.)

[3] 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 基于区间数的多指标灰靶决策模型的研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(4): 31-35.
(Dang Y G, Liu S F, Liu B. Study on the multi-attribute decision model of grey target based on interval number[J]. Engineering Science, 2005, 7(4): 31-35.)

[4] 曾波, 刘思峰, 李川, 等. 基于蛛网面积的区间灰数灰靶决策模型[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(11): 2329-2334.
(Zeng B, Liu S F, Li C, et al. Grey target decision-making model of interval grey number based on cobweb area[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(11): 2329-2334.)

[5] 闫书丽, 刘思峰, 吴利丰. 一种基于前景理论的三参数区间灰数型群体灰靶决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30 (1): 105-109.
(Yan S L, Liu S F, Wu L F. A group grey target decision making method with three parameter interval grey number based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2015, 30 (1): 105-109.)

[6] 刘勇, Forrest Jeffrey, 刘思峰, 等. 基于前景理论的多目标灰靶决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 345-350.
(Liu Y, Forrest J, Liu S F, et al. Study on the multi-attribute decision model of grey target based on interval number[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 345-350.)

[7] 宋捷, 党耀国, 王正新, 等. 正负靶心灰靶决策模型[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(10): 1822-1827.
(Song J, Dang Y G, Wang Z X, et al. New decision model of grey target with both the positive clout and the negative clout[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2010, 30(10): 1822-1827.)

[8] Luo D, Wang X. The multi-attribute grey target decision method for attribute value within three-parameter interval grey number[J]. Applied Mathematical Modeling, 2012, 36(5): 1957-1963.

[9] Onisawa T, Sugeno M, Nishiwaki Y, et al. Fuzzy measure analysis of public attitude towards the use of nuclear energy[J]. Fuzzy Sets and System, 1986, 120: 259-289.

[10] Tan C Q. A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making with Choquet integral-based TOPSIS[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(4): 3023-3033.

[11] 万树平, 董九英. 基于三角直觉模糊数Choquet积分算子的多属性决策方法[J]. 中国管理科学, 2014, 22(3): 121-129.
(Wan S P, Dang Y G, Dong J Y. Multi-attribute decision making based on triangular intuitionistic fuzzy number choquet integral operator[J]. Chinese of Management Science, 2014, 22(3): 121-129.)

[12] Qin J D, Liu X W. Study on interval intuitionistic fuzzy multi-attribute group decision making method based on Choquet integral Information[J]. Technology and Quantitative Management, 2013, 17: 465-472.

[13] Deepa Joshi, Sanjay Kumar. Interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy Choquet integral based TOPSIS method for multi-criteria group decision making[J]. European J of Operational Research, 2016: 183-191.

[14] Wu J Z, Chen F, Nie C P. Intuitionistic fuzzy-valued Choquet integral and its application in multicriteria decision making[J]. Information Sciences, 2013, 222: 509-527.

[15] 王霞, 党耀国. 基于Choquet积分的区间灰数多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 37(5): 1106-1110.
(Wang X, Dang Y G. Approach for multiple attribute decision making with interval grey number based on Choquet integral[J]. Control and Decision, 2015, 37(5): 1106-1110.)

[16] 闫书丽, 刘思峰, 朱建军, 等. 基于相对核和精确度的灰数排序方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 315-319.
(Yan S L, Liu S F, Zhu J J, et al. The ranking method of grey numbers based on relative kernel and degree of accuracy[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 315-319.)

[17] Sugeno M. Theory of fuzzy integral and its application[D]. Tokyo: Tokyo Institute of Technology, 1974.

[18] Choquet G. Theory of capacities[J]. Annales de L'institut Fourier, 1954, 5: 131-295.

[19] Wang X, Triantaphyllou E. Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some Electre methods[J]. Omega, 2008, 36: 45-63.

（责任编辑：齐　霁）