

# 扫描辐射源的最大似然定位算法

何 友, 孙 顺, 董 凯<sup>†</sup>, 刘 瑜

(海军航空工程学院 信息融合所, 山东 烟台 264001)

**摘 要:** 针对运动扫描辐射源的扫描速率未知的情况, 提出一种最大似然定位算法. 该算法将各个时差量测分别投影到目标状态空间, 通过对目标状态进行修正、迭代和融合实现对扫描速率和目标状态的最大似然估计, 同时避免联合估计方法对运动目标的定位精度不足的问题. 此外, 针对扫描辐射源定位的特点, 重新推导分析误差项, 从而改进瞬时定位算法. 仿真结果表明, 所提出的最大似然定位算法及其改进方法是有效的, 后者的定位精度接近 CRLB.

**关键词:** 无源定位; 扫描辐射源; 最大似然估计; 运动目标

中图分类号: TN958.97

文献标志码: A

## Maximum likelihood algorithm for scan-based emitter localization

HE You, SUN Shun, DONG Kai<sup>†</sup>, LIU Yu

(Institute of Information Fusion, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai 264001, China)

**Abstract:** A maximum likelihood algorithm is proposed to locate the scan-based emitter in the condition of unknown scan rate. This algorithm projects all time difference measurements to the target state space, and then maximum likelihood estimates of the scan rate and the target states can be obtained by modification, iterative calculation and fusion, avoiding the poor accuracy of jointly estimation for moving target. Furthermore, the instantaneous localization algorithm is modified by deducing and analyzing error items for the characteristics of scan-based emitter. Simulation results show that the proposed algorithm and its modification are effective, and the latter localization accuracy approaches Cramér-Rao lower bound.

**Keywords:** passive localization; scan-based emitter; maximum likelihood estimate; moving target

## 0 引 言

无源定位技术是信号处理领域的重要研究课题, 具有隐蔽性好、探测距离较远、适用性强等优点, 在雷达<sup>[1]</sup>、声呐<sup>[2]</sup>、无线通信<sup>[3]</sup>、无线传感器网络<sup>[4]</sup>等领域受到国内外学者的广泛关注. 目前, 主要使用的量测信息有方位角、到达时差、到达频差以及到达增益比等, 或以上量测组合得到的多种联合定位系统.

传统的基于方位角的辐射源定位方法, 需要在不同的角度对同一信号进行检测. 对于角度量测, 文献[5]讨论了存在视准轴偏角时对圆扫描式机载激光测深系统的影响, 对该系统的标校具有指导意义. 文献[6]研究了国产机载扫描仪的误差模型, 指明了该系统装调和检校过程的重要性. 文献[7]考虑了地球曲率和载机时变姿态等因素的影响. 以上研究结果表明, 角度量测信息容易因为坐标系转化和观测站姿态

引入新的误差项, 导致定位模型的复杂化. 然而, 对于时差体制的无源定位技术, 由于无需测量方位角、俯仰角等信息, 不会受到坐标系转换和传感器载体姿态误差的影响. 利用时差量测对扫描辐射源进行定位可以充分体现时差体制的优势, 尤其是机械扫描的窄波束雷达. 文献[8]阐述了扫描辐射源的定位方法, 但需要辐射源扫描速率先验信息. 文献[9]和文献[10]不需要已知辐射源扫描速率, 在获得初值后, 使用非线性最小二乘(NLS)算法递归求精, 不同之处在于初值估计的方法. 但以上算法都是对扫描速率和目标状态的联合估计方法, 只适用于固定目标且定位精度有限. 对于运动的扫描辐射源, 在观测周期内其扫描速率可视为不变的常数, 本文借鉴最大似然配准算法<sup>[11-12]</sup>的思路, 利用多个时刻的量测信息投影到目标状态空间, 实现对扫描速率进一步求精, 从而提高

收稿日期: 2016-06-23; 修回日期: 2016-09-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61471379, 61102166, 91538201).

作者简介: 何友(1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事信息融合、雷达数据处理等研究; 孙顺(1992—), 男, 硕士生, 从事无源定位、误差配准的研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: 188dongkai@163.com

目标定位精度. 此外, 在运行该算法时, 无论是初值估计还是在量测投影的过程中, 都需要大量使用瞬时定位算法. 文献[10]中, 将时差量测转换为方位量测, 然后使用简单的总体最小二乘(TLS)方法进行定位, 其定位精度不高. 文献[13]研究了坐标系转换与TLS性能的关系, 在此基础上, 文献[14]利用坐标系转换改善了TLS性能. 文献[15]通过分析误差项, 对观测站坐标进行归一化处理并运用迭代运算的方法进一步提高了定位精度. 文献[16]构造了一种新的伪线性方程, 避免了目标与观测站较近时定位性能下降的情况, 并通过引入辅助变量(IV)矩阵, 提出了基于加权IV的伪线性估计(PLW-IV)方法, 减少了定位偏差. 以上方法都是针对方位量测信息的定位方法, 误差分析时只考虑了方位量测噪声. 但是, 在利用时差对扫描辐射源定位时, 除量测噪声外, 扫描速率的估计偏差也会影响定位性能.

本文针对运动扫描辐射源的扫描速率未知的情况, 提出一种最大似然定位算法; 同时, 针对扫描辐射源定位的特点, 重新推导并分析了误差项, 进而对瞬时定位算法加以改进. 仿真结果表明, 所提出的最大似然定位算法及其改进方法是有效的.

## 1 场景描述

假定定位场景中有 $n$ 个观测站, 目标辐射源为扫描体制雷达, 其主瓣扫描速度为固定值 $w$ , 第 $k$ 时刻运动目标辐射源位置向量为

$$\mathbf{u}(k) = [x_0(k), y_0(k)]^T.$$

目标辐射源作 $360^\circ$ 旋转扫描或在某个范围内作扇形扫描, 并假设所有观测站在其扫描范围内. 当目标辐射源的主瓣扫过第 $i$ 个观测站时, 各个观测站都能感知并记录波束到达时间 $t_i(k)$ , 同时各观测站可以利用携带的定位系统记录其位置信息

$$\mathbf{p}_i(k) = [x_i(k), y_i(k)]^T, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

对于慢速运动的辐射源, 忽略其运动对量测的影响, 同时忽略由于信号传播产生的相对极小的时间差<sup>[17]</sup>, 可将 $k$ 时刻相对于观测站1的时差量测建模为

$$\tau_i(k) = t_{i+1}(k) - t_1(k) = g_i(w, \mathbf{u}(k)) + v_i(k), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$g_i(w, \mathbf{u}(k)) = \frac{1}{w} A_i(\mathbf{u}(k)); \quad (2)$$

$$A_i(\mathbf{u}(k)) =$$

$$\arccos \frac{(\mathbf{p}_1(k) - \mathbf{u}(k))^T (\mathbf{p}_{i+1}(k) - \mathbf{u}(k))}{\|\mathbf{p}_1(k) - \mathbf{u}(k)\| \|\mathbf{p}_{i+1}(k) - \mathbf{u}(k)\|}. \quad (3)$$

其中:  $g_i(w, \mathbf{u}(k))$ 为第 $i+1$ 个观测站相对观测站1的

时差量测方程;  $v_i(k)$ 为第 $i$ 个时差量测的随机噪声, 服从均值为零, 方差为 $\Sigma_{\tau_i}(k)$ 的正态分布;  $A_i(\mathbf{u}(k))$ 为观测站 $i+1$ 和观测站1对目标的视线夹角;  $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数, 其典型场景如图1所示. 由此可定义 $k$ 时刻的所有量测集合为

$$\boldsymbol{\tau}(k) = [\tau_1(k), \tau_2(k), \dots, \tau_{n-1}(k)]^T. \quad (4)$$

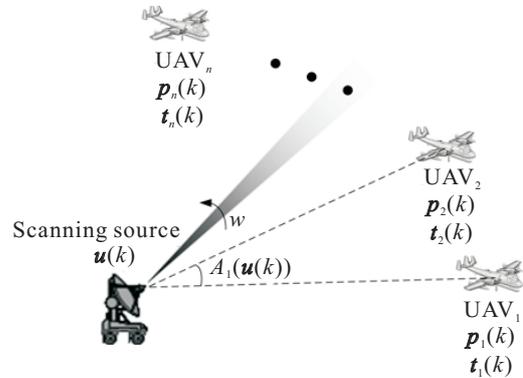


图1 典型场景示意图

## 2 最大似然连续定位算法

经过 $N$ 个时刻的连续观测可得量测集合为 $\mathbf{Z} = \{\boldsymbol{\tau}(k); k = 1, 2, \dots, N\}$ , 需要估计出扫描速度 $w$ 和目标状态集合 $\mathbf{X} = \{\mathbf{u}(k); k = 1, 2, \dots, N\}$ . 可利用最大似然算法对 $w$ 和 $\mathbf{X}$ 进行估计, 该问题描述可表示为

$$\{\hat{w}, \hat{\mathbf{X}}\} = \arg \max_{w, \mathbf{X}} \{p(\boldsymbol{\tau}(1), \boldsymbol{\tau}(2), \dots, \boldsymbol{\tau}(N)|w, \mathbf{X})\}. \quad (5)$$

设不同时刻量测噪声相互独立, 式(5)可化简为

$$\{\hat{w}, \hat{\mathbf{X}}\} = \arg \max_{w, \mathbf{X}} \left\{ \prod_{k=1}^N \max_{\mathbf{u}(k)} p(\boldsymbol{\tau}(k)|w, \mathbf{u}(k)) \right\}. \quad (6)$$

### 2.1 目标状态估计

假设不同量测之间的噪声相互独立, 并且为表示方便, 省去时间标签 $k$ , 可得

$$p(\boldsymbol{\tau}|w, \mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{n-1} p(\tau_i|w, \mathbf{u}) = K_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_i - \bar{\tau}_i)^T \Sigma_{\tau_i}^{-1} (\tau_i - \bar{\tau}_i) \right\}, \quad (7)$$

其中 $\bar{\tau}_i$ 为不含量测噪声的真实量测值.

在已知扫描速度 $w$ 的情况下, 对式(1)求微分可得 $d\tau_i = \nabla_{\mathbf{u}_i} g_i(w, \mathbf{u}) d\mathbf{u}_i$ . 量测误差较小时, 可将量测误差 $(\tau_i - \bar{\tau}_i)$ 投影到目标状态空间 $(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)$ .  $\mathbf{u}_i$ 和 $\bar{\mathbf{u}}_i$ 分别为 $\tau_i$ 和 $\bar{\tau}_i$ 对应的目标状态估计值, 可得

$$\tau_i - \bar{\tau}_i = \mathbf{G}_i (\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i), \quad (8)$$

$$\Sigma_{\tau_i} = \mathbf{G}_i \Sigma_{\mathbf{u}_i} \mathbf{G}_i^T, \quad (9)$$

其中 $\mathbf{G}_i = \nabla_{\mathbf{u}_i} g_i(w, \mathbf{u}_i)$ 表示 $g_i(w, \mathbf{u})$ 在 $\mathbf{u}_i$ 处对 $\mathbf{u}$ 的

一阶导数值.

考虑到对于相同目标,不同量测 $\tau_i$ 投影的目标状态向量 $\hat{\mathbf{u}}_i$ 应是一致的,记作 $\mathbf{u}$ .将式(8)和(9)代入(7),可得

$$p(\boldsymbol{\tau}|w, \mathbf{u}) = K_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u})^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_i}^{-1} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}) \right\}. \quad (10)$$

使用矩阵等式

$$x^T \mathbf{A} x - 2x^T \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = (x - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^T \mathbf{A} (x - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}), \quad (11)$$

其中矩阵 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵,则式(10)可重写为

$$p(\boldsymbol{\tau}|w, \mathbf{u}) = K_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^T \left( \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_i}^{-1} \right) (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U} \right\}. \quad (12)$$

其中

$$\hat{\mathbf{u}} = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_i}^{-1} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_i}^{-1} \mathbf{u}_i \right), \quad (13)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \dots, \mathbf{u}_{n-1}^T]^T, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \text{blkdiag}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_1}^{-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_2}^{-1}, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_{n-1}}^{-1}) - \left\{ \left[ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_i}^{-1} \left( \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_l}^{-1} \right)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}_j}^{-1} \right]_{ij} \right\}. \quad (15)$$

$\text{blkdiag}(\cdot)$ 表示分块对角矩阵; $[\cdot]_{ij}$ 表示子矩阵所在位置为 $(i, j)$ 的分块矩阵, $i, j = 1, 2, \dots, n-1$ .

由式(12)可知,当等式右面的第1项为零时,似然函数 $p(\boldsymbol{\tau}|w, \mathbf{u})$ 达到最大值.因此式(13)即为目标状态的最大似然估计.观察式(13)可知, $\hat{\mathbf{u}}$ 是对不同量测投影到目标状态空间 $\mathbf{u}_i$ 的融合.

当利用时差量测信息 $\boldsymbol{\tau}(k)$ 对目标定位时,单个量测信息 $\tau_i(k)$ 并不能直接得到对应的目标状态 $\mathbf{u}_i(k)$ ,此时可使用相关定位算法,利用 $k$ 时刻所有量测得到目标状态 $\mathbf{u}'(k)$ ,代入量测方程式(2)得到一组新的量测 $\boldsymbol{\tau}'(k)$ ,然后利用式(8)得到单一量测对应的目标状态估计

$$\mathbf{u}_i(k) = \mathbf{G}_i^{-L}(k) (\tau_i(k) - \tau'_i(k)) + \mathbf{u}'(k), \quad (16)$$

其中上标 $-L$ 表示矩阵的广义左逆.

### 2.2 扫描速率估计

在观测期间,扫描速率可以视作恒定不变的常数,在利用上一节算法求得各个时刻的目标状态后,对扫描速率构造最大似然估计.

当式(2)在 $\mathbf{u}_i(k)$ 和 $w$ 方向上存在微小扰动时,在

$\mathbf{u}_{i0}(k)$ 和 $w_0$ 处进行一阶泰勒展开近似,可得

$$\mathbf{G}_i(k) (\mathbf{u}_i(k) - \mathbf{u}_{i0}(k)) + F_i(k) (w - w_0) \approx 0, \quad (17)$$

其中 $F_i = \nabla_w g_i(w_0, \mathbf{u}_i)$ 表示 $g_i(w, \mathbf{u})$ 在 $w_0$ 处对 $w$ 的一阶导数值.

结合式(17),可得

$$\mathbf{U}(k) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{10}(k) \\ \mathbf{u}_{20}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{(n-1)0}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{-L}(k) F_1(k) \\ \mathbf{G}_2^{-L}(k) F_2(k) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{n-1}^{-L}(k) F_{n-1}(k) \end{bmatrix} (w_0 - w), \quad (18)$$

写成紧凑的形式为

$$\mathbf{U}(k) \approx \bar{\mathbf{U}}_0(k) - \mathbf{Q}(k)w. \quad (19)$$

其中

$$\bar{\mathbf{U}}_0(k) = \mathbf{U}_0(k) + \mathbf{Q}(k)w_0, \quad (20)$$

$$\mathbf{Q}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{-L}(k) F_1(k) \\ \mathbf{G}_2^{-L}(k) F_2(k) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{n-1}^{-L}(k) F_{n-1}(k) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

$\mathbf{U}_0(k)$ 定义与式(14)类似,表示扫描速率为 $w_0$ 时的目标状态初始估计, $w_0$ 表示扫描速率估计初值.

将式(12)和(13)代入(6),可得

$$\begin{aligned} \hat{w} &= \arg \max_w \{ p(\mathbf{Z}|w, \hat{\mathbf{X}}) \} = \\ &= \arg \max_w \left\{ \prod_{k=1}^N p(\boldsymbol{\tau}(k)|w, \hat{\mathbf{u}}(k)) \right\} = \\ &= \arg \max_w \left\{ K_3 \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{U}^T(k) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(k) \mathbf{U}(k) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

代入式(19),并利用矩阵等式(11),可得

$$p(\mathbf{Z}|w, \hat{\mathbf{X}}) = K_3 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (w - \hat{w})^T \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}^T(k) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(k) \mathbf{Q}(k) \right) (w - \hat{w}) + C \right\}. \quad (23)$$

其中

$$\hat{w} = \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}^T(k) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(k) \mathbf{Q}(k) \right)^{-1} \times \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}^T(k) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(k) \bar{\mathbf{U}}_0(k) \right), \quad (24)$$

$C$ 为与 $w$ 无关的常量.当式(23)等式右面的第1项为

零时, 似然函数  $p(\mathbf{Z}|w, \hat{\mathbf{X}})$  达到最大值, 因此  $\hat{w}$  是  $w$  的最大似然估计.

### 3 初值估计与瞬时定位算法改进

#### 3.1 初值估计

在算法初始化时, 需要对扫描速率进行初值估计, 可利用网格搜索的方法得到目标状态和扫描速率的初值. 若直接对目标状态和扫描速率划分为三维网格, 则会由于网格点太多导致计算量过大, 于是可结合基于方位量测的瞬时定位算法仅将扫描速率划分为较粗糙的等间隔一维网格<sup>[10]</sup>. 可得方位量测为

$$\beta_{i,j}(k) = w_j \cdot \tau_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (25)$$

其中:  $w_j = j \cdot \Delta w_{\text{net}} (j = 1, 2, \dots, m)$  表示第  $j$  个网格点,  $\Delta w_{\text{net}}$  为网络间隔. 由图1所示的定位场景可知, 方位量测的最大值  $\max_i(\beta_j(k))$  应不大于  $2\pi$ , 因此最大的网格点应满足下述约束条件:

$$w_m \leq \frac{2\pi}{\max_i(\beta_j(k))}. \quad (26)$$

其中  $\beta_j(k)$  定义与  $\tau(k)$  类似, 表示  $k$  时刻第  $j$  个网格点  $w_j$  对应的方位角差量测. 然后利用基于方位量测的瞬时定位方法可得到目标状态的估计初值  $\bar{\mathbf{u}}_j(k)$ . 将  $\bar{\mathbf{u}}_j(k)$  代入量测方程计算得到  $\bar{\tau}_j(k)$ , 将  $\bar{\tau}_j(k)$  代入似然函数(7)中, 选取使似然函数最大的  $\bar{\mathbf{u}}_j(k)$  作为目标状态估计初值  $\mathbf{u}'(k)$ , 其对应的  $w_j$  作为扫描速率的估计初值  $w_0$ , 即

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}'(k), w_0\} = \\ \arg \max_j \left\{ K_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\tau(k) - \bar{\tau}_j(k))^T \Sigma_{\tau}^{-1}(k) (\tau(k) - \bar{\tau}_j(k)) \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

#### 3.2 瞬时定位算法及其改进

在求解扫描速率初值和利用式(16)将量测投影到目标状态空间时, 需要频繁使用瞬时定位算法计算  $\mathbf{u}'(k)$ , 该算法的定位精度直接影响本文所提出的算法的性能. 考虑针对扫描辐射源定位特点, 重新推导分析误差项, 改进优化其定位性能.

基于方位量测, 根据  $k$  时刻目标与观测站位置的几何关系可得

$$\tan(\bar{\beta}_i(k) + \theta(k)) = \frac{y_i(k) - y_0(k)}{x_i(k) - x_0(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

其中  $\bar{\beta}_i(k)$  为真实方位量测值.

利用正余弦的和差化积公式, 将真实测量值  $\bar{\beta}_i(k)$  和未知定向角参数  $\theta(k)$  解耦合后, 可构造齐次线性方程<sup>[16]</sup>, 然后用实际量测值  $\beta_i(k)$  代替真实测量值  $\bar{\beta}_i(k)$ . 为表示方便, 省去时间标签, 有

$$\begin{bmatrix} x_i \sin \beta_i - y_i \cos \beta_i \\ x_i \cos \beta_i + y_i \sin \beta_i \\ \sin \beta_i \\ -\cos \beta_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{\theta} \mathbf{u} \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \approx 0, \quad (29)$$

或写成紧凑的形式

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X} \approx 0. \quad (30)$$

其中  $\mathbf{R}_{\theta}$  为旋转矩阵, 即

$$\mathbf{R}_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (31)$$

令  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1^T, \mathbf{A}_2^T, \dots, \mathbf{A}_n^T]^T$ , 将上述方程扩展到  $k$  时刻所有量测可得  $\mathbf{A} \mathbf{X} \approx 0$ . 于是可构造关于  $\mathbf{X}$  的 TLS 问题

$$\begin{cases} \min \|\Delta\|_F^2; \\ \text{s.t. } (\mathbf{A} + \Delta) \hat{\mathbf{X}} = 0, \\ \|\hat{\mathbf{X}}(3:4)\|^2 = 1. \end{cases} \quad (32)$$

可利用奇异值分解(SVD)的方法求解上述 TLS 问题, 对矩阵  $\mathbf{A}$  进行 SVD, 可得

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^4 \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (33)$$

记最小奇异值  $\sigma_{\min}$  对应的右奇异向量为  $\mathbf{v}_{\min}$ , 使其满足约束条件, 可得  $\mathbf{X}$  的估计值为

$$\hat{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{v}_{\min}}{\|\mathbf{v}_{\min}(3:4)\|}. \quad (34)$$

于是, 定向角参数和目标位置的估计为

$$\hat{\theta} = \arctan(\hat{\mathbf{X}}(4)/\hat{\mathbf{X}}(3)), \quad (35a)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{R}_{\hat{\theta}}^T \hat{\mathbf{X}}(1:2). \quad (35b)$$

为使上述线性方程得到最优解, 需要满足如下3个条件<sup>[15]</sup>:

**条件1** 矩阵  $\mathbf{A}$  中各项会受到量测噪声的影响产生一定扰动, 其方差大小应一致;

**条件2** 不同量测的噪声误差对解的影响应一致;

**条件3** 矩阵  $\mathbf{A}$  中各项应相互独立.

考虑到各观测站的时间量测  $t_i$  存在噪声误差  $\Delta t_i$ , 扫描速率参数  $w$  存在估计误差  $\Delta w$ , 表示角度差量测为

$$\begin{aligned} \beta_i &= (\bar{w} + \Delta w)(\bar{t}_i + \Delta t_i - \bar{t}_1 - \Delta t_1) = \\ \bar{\beta}_i + \Delta w(\bar{t}_i - \bar{t}_1) + \bar{w}\Delta t_i - \bar{w}\Delta t_1, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (36)$$

将  $\beta_i$  代入式(28), 并忽略二阶误差项, 可得

$$\begin{aligned} \tan(\beta_i - \Delta w(\bar{t}_i - \bar{t}_1) - \bar{w}\Delta t_i + \bar{w}\Delta t_1 + \theta) = \\ \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}. \end{aligned} \quad (37)$$

注意到,利用式(37)构造的所有量测的线性方程均含有 $(\bar{w}\Delta t_1 + \theta)$ 项,可构造参数 $\theta' = \bar{w}\Delta t_1 + \theta$ 作为新的待估定向角,从而抵消参考观测站1的量测误差(视作 $t_1 = \bar{t}_1$ ),因此时差量测可以被认为是相互独立的,式(7)中的独立性假设成立且 $\Sigma_{\tau_i} = \sigma_{t_{i+1}}^2, i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

将 $\beta_i$ 代入矩阵 $\mathbf{A}_i$ ,可得

$$\mathbf{A}_i = \bar{\mathbf{A}}_i + \Delta \mathbf{A}_i, \quad (38)$$

$$\Delta \mathbf{A}_i = \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t_i} \Delta t_i, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial w} = (\bar{t}_i - \bar{t}_1) \times \begin{bmatrix} x_i \cos(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) + y_i \sin(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) \\ -x_i \sin(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) + y_i \cos(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) \\ \cos(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) \\ \sin(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) \end{bmatrix}^T, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t_i} = \bar{w} \begin{bmatrix} x_i \cos(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) + y_i \sin(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) \\ -x_i \sin(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) + y_i \cos(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) \\ \cos(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) \\ \sin(\bar{w}(\bar{t}_i - \bar{t}_1)) \end{bmatrix}^T. \quad (41)$$

其中: $\bar{\mathbf{A}}_i$ 为真实量测矩阵, $\Delta \mathbf{A}_i$ 为误差项矩阵, $\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial w}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t_i}$ 分别为 $\mathbf{A}_i$ 对 $w$ 和 $t_i$ 的偏导数.

由式(38)~(41)可知, $\Delta \mathbf{A}_i$ 前两项的方差为 $((\bar{t}_i - \bar{t}_1)\|\mathbf{p}_i\|)^2 \sigma_w^2 + (\bar{w}\|\mathbf{p}_i\|)^2 \sigma_{t_i}^2$ ,后两项的方差为 $(\bar{t}_i - \bar{t}_1)^2 \sigma_w^2 + \bar{w}^2 \sigma_{t_i}^2$ ,相差一个 $\|\mathbf{p}_i\|^2$ 因子.因此,可通过坐标系转换,使各项方差近似一致.

计算各观测站站址 $\mathbf{p}_i$ 的型心 $\mathbf{C}$ ,可得坐标系转换后的站址为

$$\mathbf{p}'_i = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{C}}{\max_i \|\mathbf{p}_i - \mathbf{C}\|}. \quad (42)$$

通过上述转换,将 $\mathbf{p}_i$ 落到以 $\mathbf{C}$ 为圆心的单位圆内,使得各项方差在同一量级,从而满足条件1.获得定位解后,对其逆变换可得到原坐标系下的目标位置估计.

条件2等价于约束

$$E[(\Delta \mathbf{A}_i \mathbf{X})^2] = 1. \quad (43)$$

代入式(39),可得

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}_i \mathbf{X}}{\partial w}\right)^2 \sigma_w^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}_i \mathbf{X}}{\partial t_i}\right)^2 \sigma_{t_i}^2 = 1. \quad (44)$$

其中: $\mathbf{X}$ 是未知量,可先用SVD得到 $\hat{\mathbf{X}}$ ,并计算

$$d_i = \left[ \left(\frac{\partial \mathbf{A}_i \mathbf{X}}{\partial w}\right)^2 \sigma_w^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}_i \mathbf{X}}{\partial t_i}\right)^2 \sigma_{t_i}^2 \right]^{1/2}, \quad (45)$$

然后令矩阵 $\mathbf{A}$ 中的每行 $\mathbf{A}_i$ 乘以 $1/d_i$ ,再利用SVD方法更新 $\hat{\mathbf{X}}$ .重复该操作2到3次,直至结果收敛,最终利用式(35)得到目标状态估计.注意到 $\sigma_w^2$ 随着时间累积不断缩小,且其值不易得到,应用该方法时可设 $\sigma_w^2$ 为一个相对实际值较大的常数.

通过上述公式推导,可得到目标的状态集合 $\mathbf{X}$ 和扫描速率 $w$ 的估计方法,算法流程描述如下.

1) 利用初始估计方法(3.1节)得到扫描速率的初值估计 $w_0$ .

2) 使用 $w_0$ 和所有时刻的量测信息,利用改进的瞬时定位算法(3.2节),求得目标状态估计初值 $\mathbf{u}'(k)(k = 1, 2, \dots, N)$ ,代入式(16)得到所有量测对目标状态空间的投影 $\mathbf{u}_i(k)$ ,根据式(14)构造 $\mathbf{U}_0(k)$ .

3) 将 $\mathbf{u}_i(k)$ 和 $w_0$ 代入求解 $\mathbf{G}_i(k)$ 和 $F_i(k)$ ,根据式(21)构造 $\mathbf{Q}(k)$ .

4) 将 $\mathbf{U}_0(k)$ 、 $\mathbf{Q}(k)$ 、 $w_0$ 代入式(20),可求得 $\bar{\mathbf{U}}_0(k)$ .

5) 将 $\Sigma_{\tau_i}(k)$ 、 $\mathbf{G}_i(k)$ 代入式(9),求解 $\Sigma_{\mathbf{u}_i}(k)$ ,然后根据式(15)构造 $\Sigma^{-1}(k)$ .

6) 将 $\mathbf{Q}(k)$ 、 $\bar{\mathbf{U}}_0(k)$ 、 $\Sigma^{-1}(k)$ 代入式(24),求得 $\hat{w}$ .

7) 根据 $|\hat{w} - w_0| < \varepsilon$ 判断扫描速率估计值 $\hat{w}$ 是否收敛,其中 $\varepsilon$ 为较小的常数,表示收敛门限.若收敛,则继续向下执行;否则,令 $w_0 = \hat{w}$ ,跳到步骤2)继续执行.

8) 将 $\bar{\mathbf{U}}_0(k)$ 、 $\mathbf{Q}(k)$ 、 $\hat{w}$ 代入式(19),得到 $\mathbf{U}(k)$ .

9) 将 $\mathbf{U}(k)$ 和 $\Sigma_{\mathbf{u}_i}(k)$ 代入式(13),得到目标状态估计值 $\hat{\mathbf{u}}(k)$ .

由上述流程可知,该算法是关于量测的批处理方法,能够利用全部时刻量测信息得到精度更高的扫描速率估计,从而提高目标定位精度.

### 4 算法仿真分析

文献[10]中利用基于TLS的瞬时定位算法获得扫描速率和目标位置的估计初值,并利用NLS算法进一步求精,取得了较好的效果.为了便于与上述算法进行对比分析,参考文献[10]设置仿真场景如下:有8个静止观测站,其位置如表1所示.设扫描速率 $w_0 = 75 \text{ deg/s}$ ,对其估计误差的标准差设为 $\sigma_w = 1 \text{ deg/s}$ .

表1 观测站位置 km

observer number $i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	-15	-8	-8	-2	0	4	11	11
$y_i$	2	5	1	5	2	0	1	5

#### 4.1 瞬时定位算法仿真

设目标位于 $(-1 \text{ km}, 10 \text{ km})$ , 各观测站量测噪声方差相同. 进行10000次仿真实验, 将本文所提瞬时定位算法的性能与TLS算法<sup>[10]</sup>、迭代的TLS算法<sup>[15]</sup>和基于伪线性方程(PLE)的WIV方法<sup>[16]</sup>进行比较, 仿真结果如表2和表3所示.

表2 不同瞬时定位算法的偏差 m

量测噪声标准差/ms	TLS	迭代TLS	PLE-WIV	本文算法
5	3.0808	2.6078	2.9647	1.9704
10	3.2180	1.9650	3.0857	2.2890
15	4.9864	1.7857	3.7835	1.5224

表3 不同瞬时定位算法的RMSE m

量测噪声标准差/ms	TLS	迭代TLS	PLE-WIV	本文算法	CRLB
5	220.53	194.40	194.42	172.54	133.69
10	255.31	220.90	220.94	213.44	201.06
15	307.03	262.60	262.63	259.83	253.15

表2和表3分别给出了不同瞬时定位算法在不同量测噪声下的定位偏差和定位均方根误差(RMSE), 表3还给出了不同噪声情况下存在扫描速率估计误差时的CRLB(计算方法见下文). 通过对比以上仿真结果可知, TLS算法、递归TLS算法、PLE-WIV算法和本文方法都能得到目标的有效无偏估计, 但本文算法考虑了扫描速率估计误差的影响, 使其RMSE更接近CRLB, 定位精度更高.

CRLB算法如下.

克拉美罗下界(CRLB)是费舍尔信息矩阵(FIM)的逆矩阵, 表示无偏估计量的协方差下界<sup>[19]</sup>. 第 $k$ 时刻本文的待估参数为扫描速度和目标位置的联合估计 $\Theta(k) = [w, \mathbf{u}^T(k)]^T$ , 带有噪声扰动的量测向量为 $\tau(k)$ . 为表示方便, 省略时间标签, 可得对数似然函数

$$\ln(p(\tau|\Theta)) = K - \frac{1}{2}(\tau - \bar{\tau})^T \Sigma_{\tau}^{-1}(\tau - \bar{\tau}). \quad (46)$$

其中:  $\bar{\tau}$ 为真实量测向量,  $\bar{\tau}_i = g_i(w, \mathbf{u})$ ,  $\Sigma_{\tau}^{-1}$ 为量测协方差矩阵,  $K$ 为与 $\Theta$ 无关的常数项.

可得关于 $\Theta$ 的CRLB为

$$\text{CRLB}(\Theta) = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln(\tau|\Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta^T} \right]^{-1}. \quad (47)$$

代入量测方程, 可得

$$\text{CRLB}(\Theta) = \mathbf{H}^T \Sigma_{\tau}^{-1} \mathbf{H}, \quad (48)$$

其中

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} F_1 & F_1 & \cdots & F_{n-1} \\ \mathbf{G}_1^T & \mathbf{G}_2^T & \cdots & \mathbf{G}_{n-1}^T \end{bmatrix}^T. \quad (49)$$

当待估参数 $w$ 存在估计误差时, 有

$$\text{CRLB}(\Theta) = \mathbf{H}^T \Sigma_{\tau}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{J}, \quad (50)$$

其中 $\mathbf{J} = \text{diag}(\sigma_w^{-2}, 0, 0)$ 表示关于 $w$ 估计误差的先验信息. CRLB( $\Theta$ )右下角 $2 \times 2$ 子矩阵的迹即为目标定位所能达到的最小均方误差(MSE).

#### 4.2 连续定位算法仿真

假设目标做慢速曲线运动, 如下式所示:

$$\begin{cases} x_0(k) = 0.03k - 1, \\ y_0(k) = 0.1 \sin(0.1k) + 10. \end{cases} \quad (51)$$

其中:  $x_0(k)$ 和 $y_0(k)$ 的单位为km,  $k = 1, 2, \dots, 50$ .

假设所有观测站的测量误差的标准差为10ms, 初值估计时搜索算法的网络间隔 $\Delta w_{\text{net}}$ 为10deg/s, 进行2000次仿真实验. 算法中的瞬时定位算法分别使用TLS算法(简称为ML算法)和本文改进的TLS算法(简称为改进的ML算法), 仿真结果如图2和图3所示.

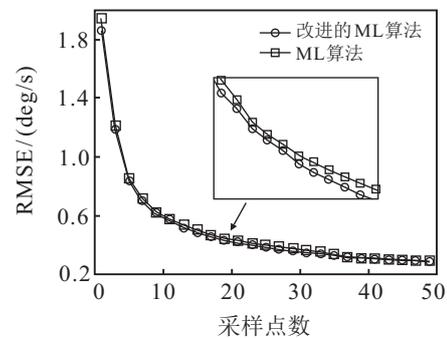


图2 扫描速率估计精度随采样数的变化

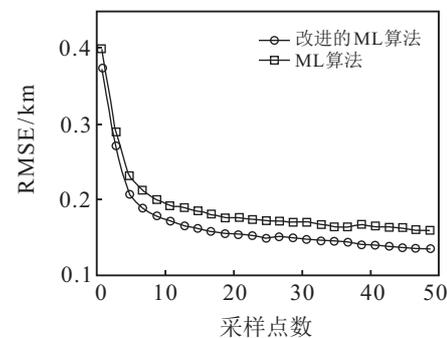


图3 定位精度随采样数的变化

图2给出了本文算法对辐射源扫描速率估计的均方根误差曲线. 由图2可知, 随着采样点数的增加, 所提出的算法对扫描速率的估计精度不断提高, 能够有效估计扫描速率参数, 其中改进的ML算法的收敛速度和估计精度都略有提高, 表明高精度的瞬时定位算法能够提高对扫描速率的估计速度和精度.

图3给出了本文算法对目标定位精度随采样数的变化情况. 由图3可知, 随着采样点数的增加, 该算法对目标的定位精度不断提高, 在10个采样数后, 收敛速度减慢, 趋于平稳, 这一趋势与图2中对扫描速率估计精度的变化趋势一致, 表明扫描速率估计精度对定位精度有着直接影响, 与理论分析一致. 相比于

ML算法,改进的ML算法能够有效地提高目标状态估计速度和精度,表明高精度的瞬时定位算法能够改进本文所提出的ML定位算法的性能。

为进一步说明本文算法的有效性和优越性,将本文算法与文献[10]中提出的NLS方法进行比较,仿真结果如表4和图4所示。

表4 不同量测误差下对扫描速率的估计精度 deg/s

量测噪声标准差/ms	改进的ML算法	ML算法	NLS算法
2.5	0.026 1	0.026 3	0.168 4
5.0	0.065 6	0.052 3	0.446 8
7.5	0.138 8	0.133 4	0.834 4
10.0	0.218 8	0.206 2	1.372 2
12.5	0.280 8	0.284 5	1.772 2
15.0	0.388 5	0.389 9	2.186 3

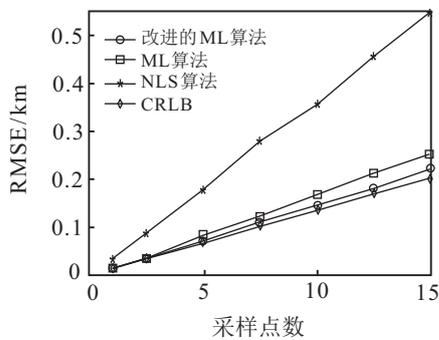


图4 定位精度随量测噪声增加对比

表4比较了改进的ML算法、ML算法和NLS算法在不同量测噪声下对扫描速率的估计精度.图4给出了以上3种算法的定位RMSE和CRLB的比较结果,其中CRLB利用式(47)计算,假设已知扫描速率真值.通过数值对比和分析可知,随着量测误差的增加,3种算法的估计精度都有所下降.其中:NLS算法对扫描速率的估计精度较差,噪声较大时,估计精度显著下降;改进的ML算法和ML算法估计精度较高,当噪声增大时,估计精度下降缓慢,具有较强的鲁棒性.改进的ML算法的性能最好,虽然对扫描速率的估计精度提高不明显,但能够明显提高定位精度,使其更接近CRLB.量测噪声为15ms时,扫描速率的估计精度仅提高了0.36%(0.0014 deg/s),但定位精度提高了12.18%(0.308 km).这是因为NLS算法使用的联合估计方法只能利用单一时刻的量测数据,限制了其性能;而ML定位算法考虑到扫描速率在观测期间为不变常数这一特点,充分利用全部量测数据信息,从而得到了高精度扫描速率估计精度和目标定位精度.改进的ML算法通过改进瞬时定位算法,进一步提高了估计精度。

实际应用场景中,当扫描辐射源在某个范围内

进行扇形扫描时,其扫描范围可能无法覆盖所有观测站,需要考虑观测站数目较少时算法的性能.由式(29)可知,瞬时定位方程有4个待估参数,因此至少需要4个时差量测,即要求观测站数目 $n \geq 5$ .令量测噪声标准差为10ms,分别仿真 $n = 5, 6, 7, 8$ 时改进的ML算法、ML算法和NLS算法在采样50次后的RMSE,观测站位置取表1中的前 $n$ 个,仿真结果如表5所示。

表5 不同观测站数目时算法的估计精度

		5	6	7	8
改进的ML算法	扫描速率/(deg/s)	0.81	0.47	0.28	0.22
	目标位置/m	259	196	163	145
ML算法	扫描速率/(deg/s)	0.75	0.50	0.28	0.21
	目标位置/m	278	251	243	168
NLS算法	扫描速率/(deg/s)	7.02	4.30	2.17	1.37
	目标位置/m	882	635	400	358
目标位置CRLB/m		237	172	147	135

表5给出了观测站数目分别为5、6、7、8时各算法对扫描速率和目标位置估计的RMSE.当观测站数目减少时,所有算法性能均有所下降,这是因为观测数量减少导致FIM减少,从而导致定位性能恶化.NLS算法性能下降最为明显,观测站数目为5时,目标定位RMSE是改进ML算法的3.4倍,扫描速率的RMSE是改进ML算法的8.7倍.ML算法及其改进算法性能随观测站数目的减少而缓慢下降,具有较好的稳定性.其中ML算法和改进ML算法对扫描速率的估计精度相差不大,但对于目标位置的估计精度后者具有明显的优势,更加接近CRLB.当观测站数目为5时,相对于ML算法,改进ML算法的定位RMSE减少7.3%.工程应用时应尽可能多地将观测站配置在扫描辐射源目标的扫描范围内.此外,由于所提算法适用于运动观测站的情况,可通过规划控制观测站的运动路径,增加能够观测到辐射源目标的观测站数目,从而提高对目标的定位精度。

### 5 结论

扫描速率未知情况下,利用单一时刻量测数据进行联合定位的方法精度有限.针对该问题,考虑到扫描速率在观测期间为不变常数这一特点,借鉴最大似然配准算法的思路,将所有时刻的量测信息投影到目标状态空间,得到扫描速率估计值,然后沿最大梯度方向递归优化,最后得到目标状态的最大似然估计.同时,针对扫描辐射源瞬时定位的特点,考虑到扫描速率估计误差,提出了一种改进的递归TLS瞬时

定位算法,进一步提高了算法性能. 仿真结果表明,所提出的算法及其改进方法能够有效估计扫描速率并对目标进行定位,且其定位精度接近CRLB. 相比于NLS算法,在量测噪声较大和观测站数目较少的情况下,所提出的算法表现更加稳健. 文献[18]研究了扫描雷达的微多普勒参数估计方法,下一步可考虑用该量测信息和时差量测实现对扫描辐射源的联合定位.

#### 参考文献(References)

- [1] 何友,修建娟,张晶炜,等. 雷达数据处理及应用[M]. 第2版. 北京: 电子工业出版社, 2009: 209-210.  
(He Y, Xiu J J, Zhang J W, et al. Radar data processing with applications[M]. 2nd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2009: 209-210.)
- [2] Vaccaro R J. The past, present, and the future of underwater acoustic signal processing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1998, 15(4): 21-51.
- [3] Rappaport T S, Reed J H, Woerner B D. Position location using wireless communications on highways of the future[J]. IEEE Communications Magazine, 1996, 34(10): 33-41.
- [4] Sayed A H, Tarighat A, Khajehnouri N. Network-based wireless location: Challenges faced in developing techniques for accurate wireless location information[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2005, 22(4): 24-40.
- [5] 申二华,张永生,李凯. 圆扫描式机载激光测深系统定位模型与仿真分析[J]. 中国激光, 2016, 43(2): 235-244.  
(Shen E H, Zhang Y S, Li K. Positioning model and simulation of conical scanning airborne laser bathymetry system[J]. Chinese J of Lasers, 2016, 43(2): 235-244.)
- [6] 杨蒙蒙,万幼川,徐景中. 激光扫描仪四棱塔镜误差分析及定位精度研究[J]. 中国激光, 2015, 42(9): 316-323.  
(Yang M M, Wan Y C, Xu J Z. Research of error analysis and positioning accuracy with four-prism of laser scanning[J]. Chinese J of Lasers, 2015, 42(9): 316-323.)
- [7] 吴卫华,江晶,高岚. 机载雷达辅助无源传感器对杂波环境下机动目标跟踪[J]. 控制与决策, 2015, 30(2): 277-282.  
(Wu W H, Jiang J, Gao L. Tracking maneuvering target in clutter with passive sensor aided by airborne radar[J]. Control and Decision, 2015, 30(2): 277-282.)
- [8] Hmam H. Scan-based emitter passive localization[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1): 36-54.
- [9] Hmam H, Doğncay K. Joint estimation of scan rate and emitter location in scan based passive localization systems[C]. The 15th European Signal Processing Conf. Poznan, 2007: 2090-2094.
- [10] Hmam H, Doğncay K. Passive localization of scanning emitters[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2010, 46(2): 944-951.
- [11] McMichael D, Okello N. Maximum likelihood registration of dissimilar sensors[C]. Proc of the 1st Australian Data Fusion Symposium. Adelaide, 1996: 31-34.
- [12] Nickens O, Branko R. Maximum likelihood registration for multiple dissimilar sensors[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(3): 1074-1083.
- [13] Doğncay K. Relationship between geometric translations and TLS estimation bias in bearings-only target localization[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(3): 1005-1017.
- [14] Doğncay K. Exploiting geometric translations in TLS based robot localization from landmark bearings[C]. The 17th European Signal Processing Conf. Glasgow, 2009: 95-99.
- [15] Shimshoni I. On mobile robot localization from landmark bearings[J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 2002, 18(6): 971-976.
- [16] Doğncay K. Self-localization from landmark bearings using pseudolinear estimation techniques[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2014, 50(3): 2361-2368.
- [17] Doğncay K, Drake S P. Bias reduction for the scan-based least-squares emitter localization algorithm[C]. The 14th European Signal Processing Conf. Florence, 2006: 1-5.
- [18] 赵紫蕙,李明,左磊,等. 基于部分周期的扫描雷达目标微多普勒参数估计[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(11): 2497-2508.  
(Zhao Z H, Li M, Zuo L, et al. Micro-doppler parameter estimation of scanning-beam radar targets based on a fractional period[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(11): 2497-2508.)
- [19] Ho K C, Lu X N, Kovavisaruch L. Source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors analysis and solution[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 55(2): 684-696.

(责任编辑: 曹洪武)