文章编号: 1001-0920(2017)07-1325-04 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0439

一种基于众信度函数的相关证据合成方法

柯小路†, 马荔瑶, 王晶晶, 王 永

(中国科学技术大学 自动化系，合肥 230027)

摘 要: 实际应用中,Dempster规则要求的证据独立性可能难以满足. 在相关源证据已知的假设条件下,基于证据的众信度函数,提出一种相关证据合成方法. 该方法无需辨识独立证据的过程,可直接得到解析的合成结果,并且对相关源证据的形式没有要求. 最后通过算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 证据理论；相关证据；合成规则

中图分类号: TP181 **文献标志码:** A

Combination of non-distinct bodies of evidence based on commonality function

KE Xiao-lu†, *MA Li-yao*, *WANG Jing-jing*, *WANG Yong*

(Department of Automation，University of Science and Technology of China，Hefei 230027，China)

Abstract: The distinctness assumption of the Dempster’s rule of combination is often not fulfilled in practice. A combination rule for non-distinct bodies of the evidence is proposed, by using the commonality function under the assumption that the dependent source is available. The identification of distinct bodies of the evidence is not necessary in the proposed approach, and an analytic combination result is generated without additional assumption that the dependent source is non-dogmatic. A numerical example is provided to illustrate the effectiveness of the proposed combination rule.

Keywords: evidence theory；combination rule；non-distinct evidence

0 引 言

实际应用中,从各个信息源获取的知识和信息通常具有一定程度的不确定性,主要表现为知识和信息的随机性、模糊性、不完备性等. 不确定性作为信息的一个基本特征,对其进行合理地表示和推理一直是一个重要的研究方向. 目前,常用的不确定性表示和推理方法有主观贝叶斯法、模糊逻辑推理、粗糙集理论和证据理论等,这些方法都有各自的特点. 其中,证据理论是对概率论的一种推广,能够区分“不知道”与“等可能性”,并且不必指定精确难以获取的概率分布,已成为一种重要的信息融合方法,在多个领域得到广泛应用[1-3].

证据理论中通过Dempster规则合成证据, 实现证据推理过程. 然而,该规则要求证据满足独立性,如果强行忽略独立性要求,则可能出现不合理结果[4]. 为解决相关证据的合成问题, 目前主要有两类方法: 1) 从证据合成规则入手,如Denoux[5]、Cattaneo[6]、Destercke等[7] 分别提出了不同的合成规则; 2) 从修改证据源入手,先从相关证据中辨识出独立证据,再使用Dempster规则合成. 孙怀江等[8] 基于梯度下降法辨识独立证据,并证明虽然独立证据的解可能并不唯一,但不会对最终合成结果造成影响. 然而该方法计算复杂且只能获取独立证据的近似解,故王明文等[9] 提出一种线性方程组求解方法,可以获得独立证据的精确解,但是在某些情况下方程组可能无解. 张震龙等[10] 针对贝叶斯信任函数(只含单元素焦元)提出方程组求解方法,保证方程组有解. 以上方法都是先辨识独立证据,而肖文等[11] 借鉴Smets[12] 在TBM中提出的方法,提出DS证据理论框架下直接从相关证据的Dempster合成结果中剔除相关证据的方法,然而该方法只适用于相关源证据为非武断($m(\Theta) > 0$)的情况.

本文继续第2类方法的研究,假设相关源证据已知. 在肖文等人方法的基础上,提出一种相关证据合

收稿日期: 2016-04-14；**修回日期:** 2016-06-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573332).

作者简介: 柯小路 (1990−), 男, 博士生, 从事证据推理、故障诊断的研究；王永 (1962−), 男, 教授, 博士生导师, 从事分数阶系统、主动隔振、机器人、信息融合等研究.

†通讯作者. E-mail: kxlu@mail.ustc.edu.cn

成方法,可直接通过众信度函数获取精确解,且不要求相关源证据为非武断的.

1 理论基础

证据理论是一种常用的不确定性推理方法,由Dempster[13]最先提出,经Shafer[14]发展形成比较完善的理论体系.

1.1 证据理论基础

证据理论中,命题以集合的形式表示. 设Θ为一有限集合,集合中的元素两两互斥,则称集合Θ为一个识别框架. 若函数$m:2^{\Theta}\to[0,1]$满足下列条件:

$$\begin{cases} m(\varnothing)=0, \\ m(A)\geqslant 0,\ \forall A\subseteq\Theta, \\ \sum\limits_{A\subseteq\Theta} m(A)=1, \end{cases} \tag{1}$$

则称m为一个基本置信分配(BBA),或mass函数. 如果$m(A)>0$,则称A为一个焦元,所有焦元的并集称为该基本置信分配的核;如果$m(\Theta)>0$,则称其是非武断的,反之,则称其为武断的. 一个BBA函数还可以等价地通过以下函数进行表示:

$$\mathrm{Bel}(A)=\sum_{B\subseteq\Theta,B\subseteq A} m(B), \tag{2}$$

$$\mathrm{Pl}(A)=\sum_{B\subseteq\Theta,B\cap A\neq\varnothing} m(B), \tag{3}$$

$$Q(A)=\sum_{B\subseteq\Theta,B\supseteq A} m(B). \tag{4}$$

设m_1,m_2是同一识别框架Θ上的两个BBA函数. 若它们由独立证据源生成,则可以使用Dempster组合规则进行合成,且合成结果仍是Θ上的一个BBA函数,即

$$m(A)=m_1\oplus m_2(A)= \begin{cases} 0,\ A=\varnothing; \\ \dfrac{\sum\limits_{B\cap C=A} m_1(B)m_2(C)}{1-K},\ A\neq\varnothing. \end{cases} \tag{5}$$

其中$K=\sum\limits_{B\cap C=\varnothing} m_1(B)m_2(C)$为冲突系数,反映了两条证据之间的冲突程度.

利用众信度函数,可将Dempster规则转化为以下的乘积形式:

$$Q(A)=KQ_1(A)Q_2(A),\ A\subseteq\Theta, \tag{6}$$

其中$K=\Big(\sum\limits_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}Q_1(B)Q_2(B)\Big)^{-1}$,与式(5)中的$K$相等.

1.2 相关研究

文献[11]假设证据E_1和E_2是两个不相关的证据,E_{h1}和E_{h2}分别由同一源证据E_h更新得到,因而E_1与E_2相关,如图1所示. 如果直接合成E_1和E_2,则E_h被重复计算. 此时,合理的合成结果应为

$$m=m_{h1}\oplus m_h\oplus m_{h2}. \tag{7}$$

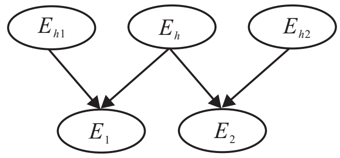

图1 相关证据形成示意图

若已知m_1和相关源证据m_h,则可直接利用式(6)辨识出独立证据m_{h1},即

$$Q_{h1}(A)=K^{-1}\frac{Q_1(A)}{Q_h(A)},\ A\subseteq\Theta. \tag{8}$$

显然,作为分母要求$\forall A\subseteq\Theta$,有$Q_h(A)>0$,即$m_h(\Theta)>0$. 故文献[11]中的方法要求m_h为非武断信任函数.

2 相关证据的合成

若$m_h(\Theta)=0$,则式(8)会出现0/0的情况,部分子集的众信度值不能唯一确定,因此辨识结果不唯一,而是存在一个集合

$$H_1=\{Q_{h1}|\ Q_1(A)=K_1Q_{h1}(A)Q_h(A),A\subseteq\Theta\}. \tag{9}$$

其中归一化因子

$$K_1=\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}Q_{h1}(B)Q_h(B)\Big)^{-1}= \Big(\sum_{\varnothing\neq B\subseteq\Theta,Q_h(B)>0}(-1)^{|B|+1}Q_{h1}(B)Q_h(B)\Big)^{-1}.$$

又$\forall B\in\{A|\ Q_h(A)>0\}$,$Q_{h1}(B)$由$Q_1(B)$和$Q_h(B)$通过式(8)唯一确定,所以$\forall Q_{h1}\in H_1$,$K_1$是相同的. 同样地,$Q_{h2}$也不能唯一确定,存在一个集合$H_2=\{Q_{h2}|\ Q_2(A)=K_2Q_{h2}(A)Q_h(A),A\subseteq\Theta\}$.

定理1 假设m_1,m_2是识别框架Θ上两条相关证据的BBA函数,m_h是相关源证据的BBA函数,它们的众信度函数分别为Q_1,Q_2和Q_h,H_1和H_2定义同上. 则对于$\forall Q_{h1}^{i1},Q_{h1}^{i2}\in H_1$和$\forall Q_{h2}^{j1},Q_{h2}^{j2}\in H_2$,有

$$K'Q_{h1}^{i1}(A)Q_h(A)Q_{h2}^{j1}(A)= K''Q_{h1}^{i2}(A)Q_h(A)Q_{h2}^{j2}(A).$$

其中

$K'=$

$$\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}Q_{h1}^{i1}(B)Q_h(B)Q_{h2}^{j1}(B)\Big)^{-1},$$

$$K''=$$

$$\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}Q_{h1}^{i2}(B)Q_h(B)Q_{h2}^{j2}(B)\Big)^{-1}.$$

证明　由式(7)可知

$$m(A)=m_1(A)\oplus m_{h2}(A)=m_{h1}(A)\oplus m_2(A),$$

对于$\forall Q_{h1}^{i1},Q_{h1}^{i2}\in H_1$和$Q_{h2}^{j1},Q_{h2}^{j2}\in H_2$,有

$$\begin{aligned}&Q(A)=K_{12}Q_1(A)Q_{h2}^{j1}(A)=\\&K_{12}\big(K_1Q_{h1}^{i1}(A)Q_h(A)\big)Q_{h2}^{j1}(A)=\\&K_{12}\big(K_1Q_{h1}^{i2}(A)Q_h(A)\big)Q_{h2}^{j1}(A)=\\&K_{12}K_1Q_{h1}^{i2}(A)\big(Q_h(A)Q_{h2}^{j2}(A)\big),\end{aligned}$$

因此

$$Q_{h1}^{i1}(A)Q_h(A)Q_{h2}^{j1}(A)=Q_{h1}^{i2}(A)Q_h(A)Q_{h2}^{j2}(A),$$

且

$$\begin{aligned}&K'=K''=K_{12}K_1=\\&K_1\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}Q_1(B)Q_{h2}^{j1}(B)\Big)^{-1}=\\&K_1\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}K_1Q_{h1}^{i1}(B)Q_h(B)Q_{h2}^{j1}(B)\Big)^{-1}=\\&\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}Q_{h1}^{i1}(B)Q_h(B)Q_{h2}^{j1}(B)\Big)^{-1}.\end{aligned}$$

定理得证. □

由定理1可知, 当$m_h(\Theta)=0$时,虽然辨识出的独立证据Q_{h1},Q_{h2}不唯一,但是这并不影响最终合成结果的唯一性. 因此,若定义

$$Q_{hi}^*(A)=\begin{cases}K^{-1}\dfrac{Q_i(A)}{Q_h(A)},\ Q_h(A)>0,\ i=1,2;\\0,\ Q_h(A)=0.\end{cases}\tag{10}$$

显然$Q_{hi}^*\in H_i$,因此可通过下式计算相关证据的合成结果:

$$Q(A)=KQ_{h1}^*(A)Q_h(A)Q_{h2}^*(A),\tag{11}$$

其中

$$K=\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}Q_{h1}^*(B)Q_h(B)Q_{h2}^*(B)\Big)^{-1}.\tag{12}$$

以上是先辨识出独立证据再进行证据合成,进一步则可以省略辨识独立证据的过程,直接利用众信度函数计算合成结果.

定理2　假设m_1,m_2是识别框架Θ上两条相关证据的BBA函数,m_h是相关源证据的BBA函数,它们的众信度函数分别为Q_1,Q_2和Q_h,则相关BBA函数m_1,m_2的合成结果可表示如下:

$$Q^*(A)=K^*\frac{Q_1(A)Q_2(A)}{Q_h(A)},\ \varnothing\neq A\subseteq\Theta.\tag{13}$$

其中

$$K^*=\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}\frac{Q_1(B)Q_2(B)}{Q_h(B)}\Big)^{-1},\tag{14}$$

$$0/0=0.\tag{15}$$

证明　由$m(A)=m_{h1}(A)\oplus m_h(A)\oplus m_{h2}(A)$可知

$$\begin{aligned}&Q^*(A)=KQ_{h1}(A)Q_h(A)Q_{h2}(A)=\\&KQ_{h1}^*(A)Q_h(A)Q_{h2}^*(A)=\\&KK_1^{-1}\frac{Q_1(A)}{Q_h(A)}Q_h(A)K_2^{-1}\frac{Q_2(A)}{Q_h(A)}=\\&K^*\frac{Q_1(A)Q_2(A)}{Q_h(A)}.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&K^*=KK_1^{-1}K_2^{-1}\\&K_1^{-1}K_2^{-1}\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}Q_{h1}^*(B)\cdot\\&Q_h(B)Q_{h2}^*(B)\Big)^{-1}=\\&\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}K_1Q_{h1}^*(B)\cdot\\&Q_h(B)K_2Q_{h2}^*(B)\Big)^{-1}=\\&\Big(\sum_{B\subseteq\Theta,B\neq\varnothing}(-1)^{|B|+1}Q_1(B)Q_2(B)/Q_h(B)\Big)^{-1}.\end{aligned}$$

定理得证. □

显然,式(13)与(11)的合成结果一致. 通过定义$0/0=0$,即使$m_h(\Theta)=0$,也能通过众信度函数对相关证据进行合成.

3　算例分析

下面通过一个数值算例对本文所提出的合成方法进行验证.

例1　设识别框架为$\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$,假设$E_{h1}$、$E_{h2}$、$E_h$是3个独立证据源,而$E_1,E_2$分别是由$E_{h1}$, E_{h2}与E_h合成得到的. 若3个独立证据源对应的BBA函数为

$$m_{h1}(\{\theta_1\})=0.5,\ m_{h1}(\Theta)=0.5,$$

$$m_{h2}(\{\theta_2\})=0.8,\ m_{h2}(\Theta)=0.2,$$

$$m_h(\{\theta_1\})=0.4,\ m_h(\{\theta_2\})=0.6,$$

则相关证据E_1,E_2对应的BBA函数为

$$m_1(\{\theta_1\})=\frac{4}{7},\ m_1(\{\theta_2\})=\frac{3}{7},$$

$$m_2(\{\theta_1\}) = \frac{2}{17},\ m_2(\{\theta_2\}) = \frac{15}{17}.$$

由式(10)可辨识出独立证据Q_{h1}^*和Q_{h2}^*,结果如表1所示.从表1中可以看到,辨识结果与实际值并不相等,因为无法从0/0中恢复原有信息,尽管Q_{h1}^*和Q_{h2}^*并不是标准的众信度函数,但这并不影响最终的合成结果.记$m = m_{h1} \oplus m_h \oplus m_{h2}$,即正确合成结果如表1倒数第2列所示.从表1中还可以看出,它与Q_{h1}^*和Q_{h2}^*的合成结果m^*完全一致.

表1 相关证据的辨识与合成

A	Q_{h1}	Q_{h1}^*	Q_{h2}	Q_{h2}^*	m	m^*
$\varnothing$	1	1	1	1	0	0
$\{\theta_1\}$	1	1	1/5	1/5	4/19	4/19
$\{\theta_2\}$	1/2	1/2	1	1	15/19	15/19
$\{\theta_3\}$	1/2	0	1/5	0	0	0
$\{\theta_1,\theta_2\}$	1/2	0	1/5	0	0	0
$\{\theta_1,\theta_3\}$	1/2	0	1/5	0	0	0
$\{\theta_2,\theta_3\}$	1/2	0	1/5	0	0	0
Θ	1/2	0	1/5	0	0	0

本例中$m_h(\Theta) = 0$,故文献[11]方法不能进行合成;文献[8]方法能够进行合成,但是需通过梯度法求解,且获得的只是近似解;文献[9]方法可以合成,但是需要求解方程组,计算过程复杂.本文所提出方法,无论是先辨识再合成,还是直接合成,都可以通过众信度函数的基本运算得到解析解.

4 结 论

在相关源证据已知的假设条件下,基于Dempster规则的众信度函数表达形式,提出一种相关证据的先辨识独立证据再合成方法.该方法可获取精确合成结果,计算简单,易于实现.在相关源证据为非武断的情况下,该方法退化为肖文等人的方法.在实际问题中,如何获取相关源证据有待进一步研究.

参考文献(References)

[1] Luo H, Yang S L, Hu X J, et al. Agent oriented intelligent fault diagnosis system using evidence theory[J] Expert Systems with Applications, 2012, 39(3): 2524-2531.

[2] 宋亚飞, 王晓丹, 雷蕾, 等. 基于证据理论和混淆矩阵的传感器可靠性评估[J]. 控制与决策, 2015, 30(6): 1111-1115.
(Song Y F, Wang X D, Lei L, et al. Evaluating dynamic reliability of sensors based on evidence theory and confusion matrix[J]. Control and Decison, 2015, 30(6): 1111-1115.)

[3] Liu Z G, Pan Q, Mercier G, et al. A new incomplete pattern classification method based on evidential reasoning[J]. IEEE Trans on Cybernetics, 2015, 45(4): 635-646.

[4] Voorbraak F. On the justification of Dempster's rule of combination[J]. Artificial Intelligence, 1991, 48(2): 171-197.

[5] Denoux T. Conjunctive and disjunctive combination of belief functions induced by non distinct bodies of evidence[J]. Artificial Intelligence, 2008, 172(2/3): 234-264.

[6] Cattaneo M. Belief functions combination without the assumption of independence of the information sources[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 299-315.

[7] Destercke S, Dubois D. Idempotent conjunctive combination of belief functions: Extending the minimum rule of possibility theory[J]. Information Sciences, 2011, 181(18): 3925-3945.

[8] 孙怀江, 杨静宇. 一种相关证据合成方法[J]. 计算机学报, 1999, 22(9): 1004-1007.
(Sun H J, Yang J Y. A combination method for dependent evidences[J]. Chinese J of Computers, 1999, 22(9): 1004-1007.)

[9] 王明文, 吴根秀, 孙永强. 相关证据合成方法[J]. 江西师范大学学报, 2002, 26(2): 135-137.
(Wang M W, Wu G X, Sun Y Q. The combination method for dependent evidence[J]. J of Jiangxi Normal University, 2002, 26(2): 135-137.)

[10] 张震龙, 刘思伟, 高社生. 相关证据合成方法的研究及改进[J]. 弹箭与制导学报, 2006, 26(2): 452-454.
(Zhang Z L, Liu S W, Gao S S. The study and improve of dependent evidence combining method[J]. J of Projectiles Rockets, Missiles and Guidance, 2006, 26(2): 452-454.)

[11] 肖文, 王正友, 王耀德. 一种相关证据的合成规则[J]. 控制与决策, 2011, 26(5): 773-776.
(Xiao W, Wang Z Y, Wang Y D. Combination rule for dependent evidences[J]. Control and Decision, 2011, 26(5): 773-776.)

[12] Smets P. The concept of distinct evidence[C]. The 4th Conf on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems. Palma de Mallorca, 1992: 789-794.

[13] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2): 325-340.

[14] Shafer G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.

(责任编辑:孙艺红)