

# 基于新型切换模糊系统的控制方法研究

王宏伟<sup>†</sup>, 连 捷

(大连理工大学控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘 要:** 提出一类新型的切换模糊系统,即以聚类型模糊集合为基础的切换模糊系统. 模糊模型的前件采用聚类型模糊集合和隶属度函数的形式. 在研究中,首先讨论聚类型模糊集合的切换模糊系统形式和机理;然后,使用多 Lyapunov 函数给出离散切换模糊系统在满足最小驻留时间切换策略下的指数稳定性条件,并设计出切换律;最后,通过仿真实例验证所提出方法的有效性.

**关键词:** 切换系统; 模糊系统; 指数稳定; 最小驻留时间

**中图分类号:** TP273      **文献标志码:** A

## Control method based on new switched fuzzy system

WANG Hong-wei<sup>†</sup>, LIAN Jie

(School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** A new type of switched fuzzy system is proposed, which is based on clustering fuzzy sets. In the proposed fuzzy system, the premise part of the fuzzy model adopts clustering fuzzy sets and clustering membership functions. Firstly, the clustering switched fuzzy systems and the corresponding principles are studied. Then, the multiple Lyapunov functions are used to confirm exponential stability conditions under the satisfying switched strategy of the minimum dwell time, and the corresponding switching law is designed. Finally, a simulation example illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** switched systems; fuzzy systems; exponential stability; minimum dwell time

## 0 引 言

随着大数据时代的到来,既含有连续系统、又含有离散系统的混杂系统已广泛出现在很多控制系统中. 切换系统属于混杂系统中最为典型的一类,而切换模糊系统,也是切换实际控制系统经常遇到的<sup>[1-2]</sup>. 这类系统更能准确地刻画实际系统的不确定性,清晰地描述连续动态和离散动态的相互作用及运行行为. 在文献[3]中,研究者将模糊逻辑模型和混杂模型相结合,提出了一类模糊切换混杂系统. 文献[4-6]描述了一类模糊切换系统模型. 这类模糊切换系统由两极结构构成,即区分规则和局部模糊规则,控制器在两极结构系统中进行控制. 文献[7-8]对于一类模糊切换系统模型,通过寻找一个适合每个切换系统中所有规则的对称正定矩阵来解决切换系统的稳定性问题. 这种方法的缺点是每增加一个新规则,都将减少找到一个满足条件的公共对称正定矩阵的可能性. 另外,文献[9-10]提出了一类切换模糊系统的

$H_\infty$  控制;文献[11]提出了一类切换模糊系统的自适应输出反馈容错控制.

本文提出以聚类型模糊集合作为切换模糊系统的前件,特点是:1)可以直接在采样的数据中提炼模糊集合;2)隶属度函数形式简单,运算方便;3)描述系统规则数少,整个模糊系统简单,不复杂. 在此基础上,首先讨论聚类型模糊集合的切换模糊系统的形式;然后,使用多 Lyapunov 函数给出离散切换模糊系统在满足最小驻留时间条件切换策略下的稳定性条件,通过定理证明其稳定性,同时,利用线性矩阵不等式方法设计出切换律;最后,通过仿真实验验证所提出方法的有效性.

## 1 聚类型切换模糊模型描述

首先,提出一类新型的切换模糊系统,即聚类型切换模糊系统,其形式如下:

$$R_\sigma^l : \text{If } \varphi(k) \text{ is } F_\sigma^l,$$

收稿日期: 2016-05-10; 修回日期: 2016-08-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61004040).

作者简介: 王宏伟(1969—),男,副教授,从事智能控制、系统建模、切换系统等研究;连捷(1980—),女,教授,从事切换系统、滑模控制等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: wanghw@dlut.edu.cn

$$\text{Then } x(k+1) = A_{\sigma l}x(k) + B_{\sigma l}u(k). \quad (1)$$

其中:  $l = 1, 2, \dots, c$ ,  $R_{\sigma}^l$  为第  $\sigma$  个切换子系统 中的第  $l$  条规则;  $\varphi(k)$  为第  $k$  次采样的前件输入向量, 满足  $\varphi(k) = [\varphi_1(k) \ \varphi_2(k) \ \dots \ \varphi_p(k)]^T$ , 是由可测变量或 状态变量组成的输入向量; 分段函数  $\sigma = \sigma(x(k)) : [0, +\infty) \rightarrow F = \{1, 2, \dots, N\}$  为一个切换信号,  $N$  为子系统个数;  $c$  为第  $\sigma$  个切换子系统的规则数;  $A_{\sigma l}$  和  $B_{\sigma l}$  为第  $\sigma$  个切换子系统的适当维数的状态矩 阵和输入矩阵;  $x(k)$  为状态变量;  $u(k)$  为系统的输入 量;  $F_{\sigma}^l$  为第  $\sigma$  个切换子系统 中的聚类型模糊集, 其隶 属度函数为

$$\mu_{\sigma}^l(k) = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{d_{\sigma l}}{d_{\sigma j}}\right)^{2/(q-1)}}, \quad (2)$$

$d_{\sigma l} = \|\varphi(k) - \bar{\varphi}_{\sigma l}\|$ ,  $\|\cdot\|$  为内积范数;  $q \in [1, \infty)$  为 权重指数;  $\varphi(k)$  为模糊模型前件变量的第  $k$  次采样输 入;  $\bar{\varphi}_{\sigma l}$  为第  $\sigma$  个切换子系统的第  $l$  个聚类中心向量.

对于第  $i$  个切换模糊子系统, 可用下式表示:

$$R_i^l: \text{ If } \varphi(k) \text{ is } F_i^l, \\ \text{Then } x(k+1) = A_{il}x(k) + B_{il}u(k), \quad (3)$$

其中:  $l = 1, 2, \dots, c$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

根据式(3), 得到第  $i$  个切换模糊子系统的全球模 型

$$x(k+1) = \sum_{l=1}^c \mu_i^l(k)(A_{il}x(k) + B_{il}u(k)), \quad (4)$$

其中:  $0 \leq \mu_i^l(k) \leq 1$ ,  $\sum_{l=1}^c \mu_i^l(k) = 1$ .

对于每个子模糊系统, 常采用PDC模糊控制器 设计原则, 即模糊控制器与系统(1)具有相同的前件 结构. 对于第  $i$  个切换模糊子系统, 其控制器可以表 示为

$$R_{ic}^l: \text{ If } \varphi(k) \text{ is } F_i^l, \\ \text{Then } u(k) = K_{il}x(k). \quad (5)$$

其中:  $l = 1, 2, \dots, c$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . 第  $i$  个切换模 糊子系统全局控制器输出为

$$u(k) = \sum_{l=1}^c \mu_i^l(k)K_{il}x(k).$$

由此得到模糊子系统的闭环系统方程为

$$x(k+1) = \sum_{l=1}^c \mu_i^l(k) \sum_{v=1}^c \mu_i^v(k)(A_{il} + B_{il}K_{iv})x(k). \quad (6)$$

其中:  $l, v = 1, 2, \dots, c$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $0 \leq \mu_i^l(k) \leq 1$ ,  $0 \leq \mu_i^v(k) \leq 1$ ,  $\sum_{l=1}^c \mu_i^l(k) = 1$ ,  $\sum_{v=1}^c \mu_i^v(k) = 1$ .

## 2 稳定性分析

设切换模糊系统(5)在初始时刻  $t_0$  驻留在子模糊 系统  $S_{i_0}$  上,  $i_0 \in P$ . 令  $k_1, k_2, \dots, k_t$  表示模糊系统在 间隔  $[t_0, t)$  内的切换点, 且  $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_t < t$ ,  $t \geq 1$ , 则在切换信号  $\sigma(t)$  作用下, 系统  $S_{\sigma(k)}$  按以下 切换时间序列切换:

$$\Sigma: \{(s_0, k_0), (s_1, k_1), \dots, (s_t, k_t), \dots \mid s_i \in F\}, \\ m = 0, 1, \dots, t.$$

当  $t = k_m$  时, 第  $s_m$  个子模糊系统被激活, 从 而在间隔  $[k_m, k_{m+1})$  内, 模糊系统驻留在子模糊系统  $S_{s_m}$  ( $m = 0, 1, \dots, t$ ) 上. 对于切换模糊系统(5), 其满 足如下定理时, 系统稳定.

**定理1** 考虑闭环切换模糊系统(6), 若存在正标 量  $\lambda < 1, \zeta \geq 1$ , 适当维数矩阵  $P_i > 0$  和适当维 数矩阵  $H_{ijl}, H_{ilv}, H_{ilvjl}, i = 1, 2, \dots, N; l, v, j, \iota = 1, 2, \dots, c$ , 使得以下不等式成立:

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} Q_{i1111} & \dots & Q_{i111c} & Q_{i1121} & \dots & Q_{i112c} & \dots & Q_{i11cc} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & \dots & \vdots & & & & & Q_{i1ccc} \\ * & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ * & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{icccc} \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$P_a < \zeta P_b, \forall a, b \in F, \quad (8)$$

$$t_a > t_a^* = \frac{\ln \zeta}{2 \ln(1/\lambda)}, \quad (9)$$

则闭环模糊系统(6)指数稳定并具有指数衰减率  $\rho(\lambda, t_a) = \lambda \zeta^{1/2t_a}$ . 其中  $Q_{ilvjl} = A_{il}^T P_i A_{ij} + A_{il}^T H_{ijl} + H_{ilv}^T A_{ij} + H_{ilvjl} - \lambda^2 P_i$ , “\*” 为对称元素.

**证明** 选取Lyapunov函数

$$V_{\sigma(k)}(k) = x^T(k)P_{\sigma(k)}x(k),$$

其中  $P_i > 0 (i \in F)$  为待定的对称正定矩阵. 考虑  $V_i(k)$  沿着子系统  $S_{s_i}$  轨迹的变化情况. 由式(6)可得

$$V_i(k+1) - \lambda^2 V_i(k) = \\ x^T(k+1)P_i x(k+1) - \lambda^2 x^T(k)P_i x(k) = \\ \left[ \sum_{l=1}^c \mu_i^l(k) \sum_{v=1}^c \mu_i^v(k)(A_{il} + B_{il}K_{iv})x(k) \right]^T P_i \times \\ \left[ \sum_{l=1}^c \mu_i^l(k) \sum_{v=1}^c \mu_i^v(k)(A_{il} + B_{il}K_{iv})x(k) \right] -$$

$$\lambda^2 x^T(k)P_i x(k) = x^T(k) \left[ \sum_{l=1}^c \mu_i^l(k) \sum_{v=1}^c \mu_i^v(k) (A_{il} + B_{il}K_{iv})^T P_i \times \sum_{l=1}^c \mu_i^l(k) \sum_{v=1}^c \mu_i^v(k) (A_{il} + B_{il}K_{iv}) - \lambda^2 P_i \right] x(k) = \begin{bmatrix} \mu_i^1(k)\mu_i^1(k)x(k) \\ \vdots \\ \mu_i^1(k)\mu_i^c(k)x(k) \\ \mu_i^2(k)\mu_i^1(k)x(k) \\ \vdots \\ \mu_i^2(k)\mu_i^c(k)x(k) \\ \vdots \\ \mu_i^c(k)\mu_i^c(k)x(k) \end{bmatrix}^T \Omega_i \begin{bmatrix} \mu_i^1(k)\mu_i^1(k)x(k) \\ \vdots \\ \mu_i^1(k)\mu_i^c(k)x(k) \\ \mu_i^2(k)\mu_i^1(k)x(k) \\ \vdots \\ \mu_i^2(k)\mu_i^c(k)x(k) \\ \vdots \\ \mu_i^c(k)\mu_i^c(k)x(k) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

其中:

$$Q_{ilvj\mu} = (A_{il} + B_{il}K_{iv})^T P_i (A_{ij} + B_{ij}K_{iu}) - \lambda^2 P_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad l, v, j, \mu = 1, 2, \dots, c.$$

另外, 还能得到

$$Q_{ilvj\mu} = (A_{il} + B_{il}K_{iv})^T P_i (A_{ij} + B_{ij}K_{iu}) - \lambda^2 P_i = A_{il}^T P_i A_{ij} + A_{il}^T P_i B_{ij} K_{iu} + (B_{il}K_{iv})^T P_i A_{ij} + (B_{il}K_{iv})^T P_i (B_{ij}K_{iu}) - \lambda^2 P_i = A_{il}^T P_i A_{ij} + A_{il}^T H_{ij\mu} + H_{ilv}^T A_{ij} + H_{ilvj\mu} - \lambda^2 P_i.$$

其中

$$H_{ij\mu} = P_i B_{ij} K_{iu}, \quad H_{ilv} = P_i B_{il} K_{iv}, \quad H_{ilvj\mu} = (B_{il}K_{iv})^T P_i (B_{ij}K_{iu}).$$

由不等式(7)和(10)可得

$$V_i(k+1) - \lambda^2 V_i(k) = x^T(k) \Omega_i x(k) \leq 0. \quad (11)$$

从而由式(11)可得

$$V_i(k+1) \leq \lambda^2 V_i(k). \quad (12)$$

式(12)意味着  $V_i(k) (i \in F)$  沿着各自子系统的轨迹指数衰减, 即  $(i = 1, 2, \dots, t)$

$$\begin{cases} V_{\sigma(k_t)}(k) < \lambda^{2(k-k_t)} V_{\sigma(k_t)}(k_t), \\ V_{\sigma(k_{i-1})}(k_i) < \lambda^{2(k_i-k_{i-1})} V_{\sigma(k_{i-1})}(k_{i-1}). \end{cases} \quad (13)$$

另一方面, 由于

$$V_{\sigma(k)}(k) = V_{\sigma(k_t)}(k), \quad V_{\sigma(k_{i-1})}(k_i) = V_{\sigma(k_{i-1})}(k_i),$$

由式(13)可得  $(i = 1, 2, \dots, t)$

$$\begin{cases} V_{\sigma(k)}(k) < \lambda^{2(k-k_t)} V_{\sigma(k_t)}(k_t), \\ V_{\sigma(k_{i-1})}(k_i) < \lambda^{2(k_i-k_{i-1})} V_{\sigma(k_{i-1})}(k_{i-1}). \end{cases} \quad (14)$$

由于系统状态在切换点不跳变, 由不等式  $P_a <$

$\zeta P_b, \forall a, b \in F$ , 可得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k_i)}(k_i) &= x^T(k_i) P_{\sigma(k_i)} x(k_i) \leq \\ \zeta x^T(k_i) P_{\sigma(k_{i-1})} x(k_i) &= \zeta V_{\sigma(k_{i-1})}(k_i), \end{aligned} \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, t.$$

取抖动界  $N_0 = 0$ , 则由平均驻留时间的定义<sup>[10]</sup>及式(14)和(15), 可递推求得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(k) &\leq \lambda^{2(k-k_t)} V_{\sigma(k_t)}(k_t) \leq \\ \lambda^{2(k-k_t)} \zeta V_{\sigma(k_{t-1})}(k_t) \cdots &\leq \\ \zeta^{\frac{k-k_0}{t_a}} \lambda^{2(k-k_0)} V_{\sigma(k_0)}(k_0) &= \\ \rho(\lambda, t_a)^{2(k-k_0)} V_{\sigma(k_0)}(k_0). \end{aligned} \quad (16)$$

由式(16)可得

$$\begin{aligned} \beta_1 \|x(k)\|^2 &\leq V_{\sigma(k)}(k) \leq \\ \rho(\lambda, t_a)^{2(k-k_0)} V_{\sigma(k_0)}(k_0) &\leq \\ \rho(\lambda, t_a)^{2(k-k_0)} \beta_2 \|x(k_0)\|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\beta_1 = \min_{i \in F} \lambda_{\min}(P_i), \beta_2 = \max_{i \in F} (\lambda_{\max}(P_i))$ . 由式(17), 进一步可得

$$\|x(k)\| \leq \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \rho(\lambda, t_a)^{(k-k_0)} \|x(k_0)\|, \quad (18)$$

$t_a > t_a^*$  保证了  $\rho(\lambda, t_a) < 1$ . 从而, 由指数衰减率的定义<sup>[10]</sup>可知, 系统(6)指数稳定并具有指数衰减率  $\rho(\lambda, t_a)$ .  $\square$

根据定理1, 采用LMI技术求解出矩阵  $P_i, H_{ij\mu}, H_{ilv}, H_{ilvj\mu}$ , 从而根据  $H_{ij\mu} = P_i B_{ij} K_{iu}, H_{ilv} = P_i B_{il} K_{iv}$ , 求得  $K_{iu}$  和  $K_{iv}$ .

### 3 仿真实例

考虑一个离散切换模糊系统<sup>[12]</sup>

$$R_1^l: \text{If } \varphi(k) \text{ is } F_1^l,$$

$$\text{Then } x(k+1) = A_{1l}x(k) + B_{1l}u(k);$$

$$R_1^2: \text{If } \varphi(k) \text{ is } F_1^2,$$

$$\text{Then } x(k+1) = A_{12}x(k) + B_{12}u(k);$$

$$R_2^l: \text{If } \varphi(k) \text{ is } F_2^l,$$

$$\text{Then } x(k+1) = A_{2l}x(k) + B_{2l}u(k);$$

$$R_2^2: \text{If } \varphi(k) \text{ is } F_2^2,$$

$$\text{Then } x(k+1) = A_{22}x(k) + B_{22}u(k).$$

其中模糊模型的后件参数矩阵为

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0493 & -1.0493 \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4926 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0132 & -0.4529 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1316 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.8 & -0.9 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

模糊模型输入  $\varphi(k) = [x_1(k), x_2(k)]^T$ , 系统经过聚类后, 得到的聚类中心为  $\bar{\varphi}_{11} = [1, 1.5]^T, \bar{\varphi}_{12} = [3, 0]^T, \bar{\varphi}_{21} = [0.7, 1.1]^T, \bar{\varphi}_{22} = [3.5, 0.2]^T$ . 在研究中, 取采样时间为  $0.02 \text{ s}, \zeta = 1.1, \lambda = 0.56$ , 由式(7)和(8)可解得

$$K_{11} = [-0.131 \quad -0.1148],$$

$$K_{12} = [-0.0623 \quad -2.302],$$

$$K_{21} = [-4.4991 \quad 8.4986],$$

$$K_{22} = [-5.4991 \quad 8.4986].$$

此时平均驻留时间满足

$$t_a > t_a^* = \frac{\ln \zeta}{2 \ln(1/\lambda)} = 0.0819,$$

则系统在切换率(9)下是指数稳定的. 对于初始点  $[-0.5, 2.5]$ , 采用上述控制参数的模糊控制器对切换模糊系统进行控制. 仿真结果如图1和图2所示.

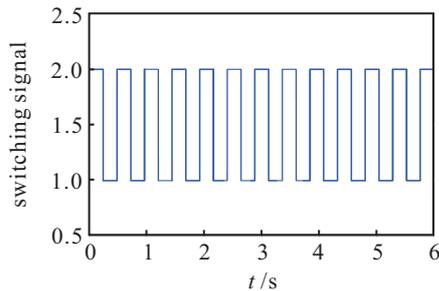


图1 切换控制信号

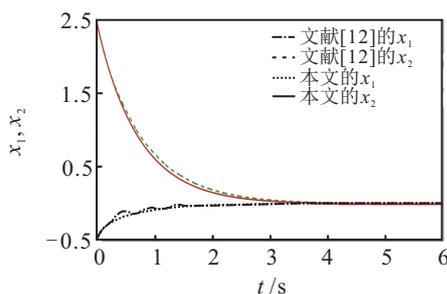


图2 切换模糊系统的状态响应

图1给出了切换信号  $\sigma(t)$  的变化. 图2为在切换信号  $\sigma(t)$  的切换下, 切换模糊系统的状态轨迹  $x_1, x_2$  的变化轨迹, 最终按照指数变化趋向于原点, 保持系统指数稳定. 另外, 与文献[12]中的方法进行了比较, 显然, 本文方法的收敛速度较快, 系统状态稳定性较好.

### 4 结 论

针对切换模糊系统难于控制的问题, 本文提出了基于聚类型的切换模糊系统, 用定理证明了其控制有

效性. 但是, 定理1的稳定条件要求较强, 所以在下一步的研究中, 需要通过线性矩阵不等式的方式, 找到一个相对宽松的条件来完善控制器设计. 另外, 对于含有时滞切换模糊系统控制, 仍然是一件很困难的事情, 是作者今后的研究方向.

### 参考文献(References)

- [1] 莫以为, 萧德云. 混合动态系统及其应用综述[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1): 1-8.  
(Mo Y W, Xiao D Y. Overview of hybrid dynamic system and its application[J]. Control Theory & Applications, 2002, 19(1): 1-8.)
- [2] Gassaandra C G, Pepyne D L, Wardi Y. Optimal control of a class of hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(3): 398-415.
- [3] Rainer P, Dimiter D. Fuzzy switched hybrid systems: Modeling and identification[C]. The 1998 IEEE ISIC/CIRA/ISAS Joint Conference. Gaithers-burg, 1998: 130-135.
- [4] Doo J C, PooGyeno P. Guaranteed cost controller design for discrete-time switching fuzzy systems[J]. IEEE Trans on Systems, Man & Cybernetics, Part A, 2004, 34(2): 110-119.
- [5] Doo J C, PooGyeno P. Output feedback control of discrete-time switching fuzzy systems[C]. Proc of the 2003 IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Missouri, 2003: 441-446.
- [6] Doo J C, PooGyeno P. State feedback controller design for discrete-time switching fuzzy systems[C]. Proc of the 41st IEEE Conf on Decision and Control. Las Vegas, 2002: 191-196.
- [7] Yang Hong, Lu Huanhuan, Zhang Le. Stability of a class of discrete-time switched fuzzy systems by arbitrary switching[J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 53(6): 1187-1190.
- [8] Yang Hong, Lu Huanhuan, Zhang Le. Tracking control for a class of switched fuzzy systems[J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 63(5): 1378-1381.
- [9] Zhai Ding, Yu An-yang, Dong Jiuxiang, et al. Dynamic output feedback control for switched T-S fuzzy systems via discretized Lyapunov function technique[J]. Neurocomputing, 2016, 17(7): 651-669.
- [10] Wang Tiechao, Tong Shaocheng. Control design for discrete-time switched fuzzy systems[J]. Neurocomputing, 2015, 16(7): 782-789.
- [11] Yang Wei, Tong Shaocheng. Adaptive output feedback fault-tolerant control of switched fuzzy systems[J]. Information Science, 2016, 32(9): 478-490.
- [12] 杨红. 切换模糊系统的稳定性与鲁棒控制理论[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2012: 8-9.  
(Yang H. Stabilization and robust control theory for switched fuzzy systems[M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2012: 8-9.)

(责任编辑: 孙艺红)