文章编号: 1001-0920(2017)08-1457-08 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0696

# 近似非齐次指数递减序列NGOM(1,1)模型的构建与优化

丁 松[1†], 党耀国[1], 徐 宁[2], 魏 龙[1]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 211106；2. 南京审计大学 管理科学与工程学院，南京 211815)

**摘 要:** 针对一类具有近似非齐次指数特征的衰减序列建模预测问题,构建NGOM(1,1)模型,推导出其参数估计的最小二乘解与时间响应函数的表达式.鉴于背景值和初始条件对于该模型作用的复杂性和噪声扰动的不确定性,运用方程组的数据融合技术对背景值进行全局性优化,并利用平均相对误差平方和构建期望函数,实现模型优化目标函数和平均相对误差最小两个准则一致性条件下模型初始条件的最优选择. 实例研究表明了所提出模型在处理衰减非齐次序列时具有较高的精度.

**关键词:** 反向累加生成；非齐次指数；初始条件；背景值

**中图分类号:** N945.1 **文献标志码:** A

## Modeling and optimizing the grey model NGOM(1,1) for the approximation non-homogenous decreasing series

*DING Song*[1†], *DANG Yao-guo*[1], *XU Ning*[2], *WEI Long*[1]

(College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 211106，China；College of Management Science and Engineering，Nanjing Audit University，Nanjing 211815，China)

**Abstract:** Aiming at solving the predicting problems for the decreasing non-homogenous series, the grey model NGOM(1,1) is proposed with the method of accumulated generating operation in opposite-direction. The parameters and time response function are estimated. For the background value and the initial condition have a great effect on the simulating and predicting accuracy of the grey model, the background value is optimized by using the equations, and the initial condition is modified by using the expectation function, which ensures the consistency between the two rules, namely, the minimum values of optimized objective function and the minimum average relative errors. The results of the case study show that the NGOM(1,1) model has better simulating accuracy compared to other optimized models, which demonstrates the effectiveness and practicability of the proposed model dealing with the decreasing non-homogeneous sequences.

**Keywords:** accumulated generating operation in opposite-direction；non-homogeneous；initial condition；background value

## 0 引 言

自邓聚龙教授提出灰色系统理论以来,该理论经过20多年的发展,其应用价值在众多领域获得了认可[1-3]. 灰色预测理论是灰色系统理论的一个重要组成部分,它通过序列的累加生成,挖掘数据序列中存在的内在规律,进而构建灰色预测模型,揭示系统未来的发展趋势. GM(1,1)模型是灰色预测模型中的基础和核心模型,其对具有灰指数增长规律的数据拟合与预测具有较好的效果,因此在经济社会领域中得到了广泛应用. 随着GM(1,1)模型的应用范围不断拓展,该模型的优化与改进引起了许多学者的重视,主要集中在以下方面: 1) 背景值改进. Wang等[4-5]通过对齐次与非齐次指数函数关系的研究,构建了GM(1,1)模型符合数理关系的最优背景值;张彬[6]将背景值和边值进行组合优化,提高了建模精度. 2) 灰导数优化. 李玻等[7]利用向前差商和向后差商的加权平均对GM(1,1)模型的灰导数进行优化. 3) 初始条件优化. Dang等[8]基于最新信息原理以$x^{(1)}(n)$作为

**收稿日期:** 2016-06-02；**修回日期:** 2016-08-11.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(71371098)；江苏普通高校研究生科研创新计划项目(KYZZ16_0153)；南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金项目(BCXJ16-09)；中央高校基本科研业务费专项资金项目(2017301)；江苏省高校自然科学研究项目(16KJD120001)；江苏省社科基金重点研究项目(16GLA001).

**作者简介:** 丁松(1992−), 男, 博士生, 从事灰色系统理论、产业经济的研究；党耀国(1964−), 男, 教授, 博士生导师,从事灰色系统理论、数量经济等研究.

†通讯作者. E-mail: dingsong1129@163.com

初始条件; 董奋义等[9]和Wang等[10]基于误差最小原理对初始条件进行了优化. 4) 时间响应式优化. 刘斌等[11]利用最小二乘法构建了GM(1,1)模型时间响应函数的最优模型. 5) 模型特性研究. 王正新[12]初步探索了GM(1,1)模型的稳定性与发展系数间的关系以及无偏GM(1,1)模型的混沌特性;郑照宁等[13]探索了GM(1,1)模型的病态性问题. 6) 拓展模型研究. 谢乃明等[14]提出了离散GM(1,1)模型, 王正新等[15]研究了GM(1,1)幂模型参数识别过程中可能出现的病态性问题. 在上述研究中,学者从不同角度对原模型进行了不断地修正,使得原模型能够更好地拟合具有齐次指数律特性的数据序列,这对完善灰色预测理论体系,推动灰色系统理论的发展起到了积极的作用.

然而,现实生活中存在大量具有非齐次指数特性的系统特征数据序列,利用原有模型对这些数据进行建模时会产生较大的偏差. 因此,展开对具有非齐次指数特征序列的建模研究有着十分重要的意义. 谢乃明等[16]构建了近似非齐次指数序列的离散灰色模型,并利用演绎推理的方法对该模型的仿射特性进行了研究;崔杰等[17]研究了非齐次指数序列的建模问题,构建了NGM(1,1)模型;朱超余等[18]分析了NDGM模型的参数特性,验证了该模型对非齐次指数序列的预测具有无偏性;陈芳等[19]构建了近似非齐次指数序列的GM(1,1)模型,并对其灰导数进行了优化,证明了此模型具有白指数重合性;战立青等[20]提出了基于非齐次指数数据的灰色模型,并对其初始条件进行了优化,获得了良好的模拟预测效果.

与传统的GM(1,1)模型在正向累加生成方法的基础上建模不同,许多学者对反向累加生成的方法进行了研究. 宋中民等[21]针对递减序列的处理采用了反向累加,在此基础上建立了GOM(1,1)模型预测衰减序列的发展趋势;杨知等[22]对GOM(1,1)模型进行了优化研究,利用指数的积分方法修正了背景值的生成,推导出新的背景值公式;练郑伟等[23]证明了反向累减生成序列满足灰色预测模型的建模条件,在分析反向累加条件下的齐次与非齐次指数关系的基础上,构建了新GOM(1,1)模型,并优化了其背景值. 随着灰色预测模型应用范围的不断扩展,各种新问题不断涌现出来,如传统GM(1,1)模型对递减非齐次特征序列预测效果较差,误差检验准则一致性下参数优化等问题,这要求对GM(1,1)模型进行一定的改进.

本文在非齐次指数序列和反向累加生成方法的最新研究基础上,针对一类具有近似非齐次指数特征的衰减序列建模预测问题,构建基于近似非齐次指数序列的反向累加生成灰色预测(NGOM(1,1))模型),利用最小二乘法和矩阵运算推导出该模型的参数估计公式,并借助一阶非齐次微分方程的求解公式,求出新模型的时间响应序列函数. 另外,鉴于背景值和初始条件对于灰色预测模型精度的重要作用,本文对二者进行组合优化,尝试利用构建方程组思想优化NGOM(1,1)模型背景值,并实现优化目标函数和模型误差检验标准相一致条件下的模型初始条件最优化,进一步提高模型精度和拓展模型的应用范围. 最后,结合实际数据,分别建立传统模型及其改进模型,并对结果进行比较分析.

## 1 反向累加生成及NGOM(1,1)模型的建模原理

**定义1**[22] 设非负的原始序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1), x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$,令 $\bar{x}^{(1)}(k)=\sum_{i=k}^{n}x^{(0)}(i), k=1,2,\cdots,n$,则称 $\bar{X}^{(1)}=(\bar{x}^{(1)}(1),\bar{x}^{(1)}(2),\cdots,\bar{x}^{(1)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的一次反向累加生成序列.

**定义2** 设非负的原始序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1), x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$,取

$$\bar{x}^{(-1)}(k)=\begin{cases}x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k+1), k=1,2,\cdots,n-1;\\ x^{(0)}(n),\ k=n.\end{cases}$$

则称 $\bar{X}^{(-1)}=(\bar{x}^{(-1)}(1),\bar{x}^{(-1)}(2),\cdots,\bar{x}^{(-1)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的一次反向累减生成序列.

易知,一次反向累加生成与一次反向累减生成是互逆运算, 并且 $\bar{x}^{(1)}(k)-\bar{x}^{(1)}(k+1)=\sum_{i=k}^{n}x^{(0)}(i)-\sum_{i=k+1}^{n}x^{(0)}(i)=x^{(0)}(k), k=1,2,\cdots,n-1$. 由上述定义可知,反向累加生成是以最新数据 $x^{(0)}(n)$ 作为不动点,从最新数据开始向前累加挖掘系统能量递减的灰色趋势. 任意的非负序列经过反向累加生成后,序列的光滑性会得到提高,具有准指数规律,满足建立灰色预测模型的初始条件[23]. 从新信息优先原理角度看,反向累加生成运算不仅充分挖掘了原始数据的信息,而且更加充分利用了新信息,反映了新信息所表征的趋势,提高了灰色建模的功效. 从系统能量的积累与释放角度来分析,累加生成运算可以看成是系统能量的积累过程,而反向累加生成运算则是系统能量的释放过程,从这个角度来说,他们有着本质的区别. 对于非负的衰减序列 $X^{(0)}$,其累加生成序列 $X^{(1)}$ 必是单调递增,模拟值 $\hat{X}^{(1)}$ 也是递增的,用能量积累的系统预测能量释放的过程会产生不合理的误差[22];而对于反向累加生成序列 $\bar{X}^{(1)}$,

是单调递减,其模拟序列 $\hat{\bar{X}}^{(1)}$ 也是递减的,用该能量系统去预测能量的衰减过程可以避免上述的不合理误差. 根据经典灰色预测模型的建模机理,本文仍然采用灰色微分方程与白化方程的形式,其中灰色微分方程用来估计模型的参数,白化方程求解用来进行预测. 根据以上分析,建立新模型定义如下:

**定义3**　设 $X^{(0)}$ 为非负的原始序列,其一次反向累加生成序列为 $\bar{X}^{(1)}$,建立基于近似非齐次指数序列的反向累加生成灰色预测模型,简记为NGOM(1,1)模型:

$$-x^{(0)}(k-1)+az^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(2k-1)b+c,\quad k=2,3,\cdots,n. \tag{1}$$

其中: $a$ 为发展系数, $b$ 为时间项, $c$ 为灰作用量; $z^{(1)}(k)$ 为背景值,一般情况下取 $\bar{X}^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列.

该模型的白化方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+a\bar{x}^{(1)}(t)=bt+c. \tag{2}$$

**定理1**　设 $X^{(0)}$、$X^{(1)}$、$Z^{(1)}$ 如上述定义,若 $\hat{a}=[a,b,c]^{\mathrm{T}}$ 为参数列,且设

$$Y=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(1)\\-x^{(0)}(2)\\\vdots\\-x^{(0)}(n-1)\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(0)}(2)&3/2&1\\-z^{(0)}(3)&5/2&1\\\vdots&\vdots&\vdots\\-z^{(0)}(n)&(2n-1)/2&1\end{bmatrix},$$

则NGOM(1,1)模型(1)的最小二乘参数估计满足 $\hat{P}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$.

**证明**　将数据代入模型(1),得到

$$\begin{cases}-x^{(0)}(1)+az^{(1)}(2)=\dfrac{3}{2}b+c,\\-x^{(0)}(2)+az^{(1)}(3)=\dfrac{5}{2}b+c,\\\quad\vdots\\-x^{(0)}(n-1)+az^{(1)}(n)=\dfrac{(2n-1)}{2}b+c.\end{cases}$$

上述方程组可以写成矩阵形式

$$Y=B\hat{P}.$$

对于 $\hat{P}=[a,b,c]^{\mathrm{T}}$ 的一组参数估计序列,以 $-az^{(1)}(k)+\frac{1}{2}(2k-1)b+c$ 代替 $-x^{(0)}(k-1)(k=2,3,\cdots,n)$,可以得到误差序列

$$\varepsilon=Y-B\hat{P}.$$

设

$$s=\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon=(Y-B\hat{P})^{\mathrm{T}}(Y-B\hat{P})=\sum_{k=2}^{n}\Big(-x^{(0)}(k-1)+az^{(1)}(k)-\frac{(2k-1)}{2}b-c\Big)^2,$$

使 $s$ 最小的 $a,b,c$ 应满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial a}=2\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(-x^{(0)}(k-1)+az^{(1)}(k)-\\\quad\dfrac{(2k-1)}{2}b-c\Big)^2\cdot z^{(1)}(k)=0,\\\dfrac{\partial s}{\partial b}=-(2k-1)\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(-x^{(0)}k-1)+\\\quad az^{(1)}(k)-\dfrac{(2k-1)}{2}b-c\Big)^2=0,\\\dfrac{\partial s}{\partial c}=-2\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(-x^{(0)}(k-1)+az^{(1)}(k)-\\\quad\dfrac{(2k-1)}{2}b-c\Big)^2\cdot z^{(1)}(k)=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(-x^{(0}(k-1)+az^{(1)}(k)-\\\dfrac{(2k-1)}{2}b-c\Big)^2\cdot z^{(1)}(k)=0,\\(2k-1)\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(-x^{(0}(k-1)+\\az^{(1)}(k)-\dfrac{(2k-1)}{2}b-c\Big)^2=0,\\\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(-x^{(0}(k-1)+az^{(1)}(k)-\\\dfrac{(2k-1)}{2}b-c\Big)^2\cdot z^{(1)}(k)=0.\end{cases}$$

即 $B^{\mathrm{T}}\varepsilon=0$,于是 $B^{\mathrm{T}}(Y-B\hat{P})=0$ 或者 $B^{\mathrm{T}}Y-B^{\mathrm{T}}B\hat{P}=0$,即 $B^{\mathrm{T}}Y=B^{\mathrm{T}}B\hat{P}$,所以

$$\hat{P}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y.$$ □

**定理2**　设 $B$、$Y$ 如定理1所述, $\hat{a}=[a,b,c]^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$,取边值条件 $\hat{x}^{(1)}(n)=\bar{x}^{(1)}(n)$,则:

1) 白化方程式(2)的解(即时间响应函数)为

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\Big(x^{(0)}(n)-\frac{b}{a}n-\frac{c}{a}+\frac{b}{a^2}\Big)\mathrm{e}^{-a(t-n)}+\frac{b}{a}t+\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}.$$

2) NGOM(1,1)模型的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\Big(x^{(0)}(n)-\frac{b}{a}n-\frac{c}{a}+\frac{b}{a^2}\Big)\mathrm{e}^{-a(k-n)}+\frac{b}{a}k+\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}.$$

3) 序列的还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\begin{cases}\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k+1),k<n;\\\hat{x}^{(1)}(k),\ k=n;\\\hat{x}^{(1)}(k-1)-\hat{x}^{(1)}(k),\ k>n.\end{cases}$$

**证明**　令 $\bar{x}^{(1)}=x$,则白化方程为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+a\bar{x}^{(1)}(t)=bt+c.$$

可以将其看成是一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+ax=bt+c$$

求解,根据一阶非齐次线性微分方程的通解公式可得

$$x=G\mathrm{e}^{-at}+\frac{b}{a}t+\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}. \tag{3}$$

将$\hat{x}^{(1)}(n)=\bar{x}^{(1)}(n)=x^{(0)}(n)$代入式(3),得到时间响应函数

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\Big(x^{(0)}(n)-\frac{b}{a}n-\frac{c}{a}+\frac{b}{a^2}\Big)\mathrm{e}^{-a(t-n)}+\frac{b}{a}t+\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}. \tag{4}$$

再将$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k+1)$代入$\hat{x}^{(1)}(k)$和$\hat{x}^{(1)}(k+1)$的具体表达式即可. □

## 2 基于背景值和初始条件组合优化的NGOM(1,1)模型构建

### 2.1 NGOM(1,1)模型的背景值优化分析

由定理1可知,背景值$z^{(1)}(k)$的构造方式直接影响到NGOM(1,1)模型的模拟和预测精度,为了提高对背景值的优化效果,当务之急是先搞清楚NGOM(1,1)模型的背景值误差来源. 对白化方程式(2)两边在区间$[k-1,k]$上取积分得

$$-x^{(0)}(k-1)+a\int_{k-1}^{k}\bar{x}^{(1)}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(2k-1)b+c. \tag{5}$$

从背景值的几何意义看,$z^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}\bar{x}^{(1)}(t)\mathrm{d}t$才是背景值的精确计算公式,而传统模型中以梯形公式

$$z(k)=(x^{(0)}(k)+x^{(0)}(k+1))/2$$

代替

$$z^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}\bar{x}^{(1)}(t)\mathrm{d}t,$$

造成与实际背景值的偏离. 故本文拟借助方程组思想对传统背景值进行优化,以实现背景值的全局性合理估计,充分利用全局信息,避免局部信息未被利用的情况发生. 设$x^{(0)}(k)=C\mathrm{e}^{Ak}+B$为原始序列,其一次反向累加生成为

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=k}^{n}x^{(0)}(i)=C\mathrm{e}^{Ak}(1+\mathrm{e}^{A}+\cdots+\mathrm{e}^{(n-k+1)A})+(n-k+1)B=\frac{C\mathrm{e}^{Ak}}{1-\mathrm{e}^{A}}-\frac{C\mathrm{e}^{(n+1)A}}{1-\mathrm{e}^{A}}+(n-k+1)B.$$

背景值化简可得

$$z^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}\bar{x}^{(1)}(t)\mathrm{d}t=\int_{k-1}^{k}C\frac{1-\mathrm{e}^{(n-t+2)A}}{1-\mathrm{e}^{A}}\mathrm{e}^{At}\mathrm{d}t+\int_{k-1}^{k}(n-t+1)B\mathrm{d}t=B\Big[n+\frac{3}{2}-k\Big]-\frac{C\mathrm{e}^{A(k-1)}}{A}-\frac{C\mathrm{e}^{(n+1)A}}{1-\mathrm{e}^{A}}. \tag{6}$$

为了求解背景值,只需求出$A$、$B$、$C$,再代入上式即可. 鉴于非齐次递减序列预测模型背景值构建的复杂性,少有学者对其进行优化求解,本文尝试利用方程组思想,实现真实背景值参数的求解. 为了能够使得背景值取值覆盖$k=2,3,\cdots,n$的取值范围,本文建立两个方程组,并通过数据融合实现背景值求解统一.

为了删除现求$A$、$B$、$C$,当$k=2,3,\cdots,n-1$时,建立如下方程组:

**方程组1**

$$x^{(0)}(k-1)=C\mathrm{e}^{A(k-1)}+B, \tag{7}$$

$$x^{(0)}(k)=C\mathrm{e}^{A(k)}+B, \tag{8}$$

$$x^{(0)}(k+1)=C\mathrm{e}^{A(k+1)}+B, \tag{9}$$

$$k=2,3,\cdots,n-1.$$

由方程组运算$\dfrac{\text{式(7)}-\text{式(8)}}{\text{式(9)}-\text{式(10)}}$可得

$$A=\ln\frac{x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k+1)}{x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)}.$$

由式(7)和(8)可消去$B$,再代入$A$,即可解得$C$,则

$$C=\frac{\big[x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)\big]^2}{x^{(0)}(k-1)-2x^{(0)}(k)+x^{(0)}(k+1)}\times\Big[\frac{x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k+1)}{x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)}\Big]^{1-k}=\frac{[x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)]^{k+1}\times[x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k+1)]^{1-k}}{x^{(0)}(k-1)-2x^{(0)}(k)+x^{(0)}(k+1)}.$$

代入式(8)得

$$B=\frac{x^{(0)}(k-1)\times x^{(0)}(k+1)-\big[x^{(0)}(k)\big]^2}{x^{(0)}(k-1)-2x^{(0)}(k)+x^{(0)}(k+1)}.$$

将参数$A$、$B$、$C$代入改进后的背景值公式,可得

$$z_1^{(1)}(k)=\Big(n+\frac{3}{2}-k\Big)\{x^{(0)}(k-1)x^{(0)}(k+1)-\big[x^{(0)}(k)\big]^2\}\Big/[x^{(0)}(k-1)-2x^{(0)}(k)+x^{(0)}(k+1)]-[x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)]^{k-n+1}\times[x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k+1)]^{n+2-k}/[x^{(0)}(k-1)-2x^{(0)}(k)+x^{(0)}(k+1)]^2-[x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)]^2\Big/\Big\{\ln\frac{x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k+1)}{x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)}\times[x^{(0)}(k-1)-2x^{(0)}(k)+x^{(0)}(k+1)]\Big\}. \tag{10}$$

其中: $x^{(0)}(k)\neq x^{(0)}(k+1)$, $k=2,3,\cdots,n-1$. 当$x^{(0)}(k)=x^{(0)}(k+1)$时,曲线$x^{(1)}(t)$与$t$轴围成的图

形退化为一个矩形,此时背景值的大小相当于矩形面积:

$$z^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)\mathrm{d}t=$$
$$x^{(1)}(k)\cdot[k-(k-1)]=x^{(1)}(k).$$

此时,背景值与用紧邻均值表示一致,这也说明了原始GM(1,1)在对增长平缓序列建模时具有较高精度的原因. 另外,当$k=n$时,不符合上述方程组求值条件,因此,为了能够求出背景值$z^{(1)}(n)$,需要寻找其他路径.

还是借助构建方程组思想,当$k=3,4,\cdots,n$时,建立如下方程组:

**方程组2**

$$x^{(0)}(k-2)=C\mathrm{e}^{A(k-2)}+B, \tag{11}$$
$$x^{(0)}(k-1)=C\mathrm{e}^{A(k-1)}+B, \tag{12}$$
$$x^{(0)}(k)=C\mathrm{e}^{A(k)}+B, \tag{13}$$
$$k=3,4,\cdots,n.$$

由方程组运算$\dfrac{式(11)-式(12)}{式(13)-式(14)}$可得

$$A=\ln\frac{x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-2)-x^{(0)}(k-1)}.$$

由式(11)和(12)得

$$C=$$
$$\frac{[x^{(0)}(k-2)-x^{(0)}(k-1)]^2}{x^{(0)}(k-2)-2x^{(0)}(k-1)+x^{(0)}(k)}\times$$
$$\Big[\frac{x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-2)-x^{(0)}(k-1)}\Big]^{2-k}=$$
$$\frac{[x^{(0)}(k-2)-x^{(0)}(k-1)]^k\times[x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)]^{2-k}}{x^{(0)}(k-2)-2x^{(0)}(k-1)+x^{(0)}(k)}.$$

将$A$、$C$代入式(12)得

$$B=\frac{x^{(0)}(k-2)\times x^{(0)}(k)-[x^{(0)}(k\text{-}1)]^2}{x^{(0)}(k-2)-2x^{(0)}(k-1)+x^{(0)}(k)}.$$

求解参数过程与上面方程组一样,可以求得改进后的背景值为

$$z_2^{(1)}(k)=$$
$$\Big(n+\frac{3}{2}-k\Big)\{x^{(0)}(k-2)x^{(0)}(k)-[x^{(0)}(k-1)]^2\}\Big/$$
$$[x^{(0)}(k-2)-2x^{(0)}(k-1)+x^{(0)}(k)]-$$
$$[x^{(0)}(k-2)-x^{(0)}(k-1)]^{k-n+1}\times$$
$$[x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)]^{n+2-k}/$$
$$[x^{(0)}(k-2)-2x^{(0)}(k-1)+x^{(0)}(k)]^2-$$
$$[x^{(0)}(k-2)-x^{(0)}(k-1)]^2\Big/$$
$$\Big\{\ln\frac{x^{(0)}(k-1)-x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-2)-x^{(0)}(k-1)}\times$$
$$[x^{(0)}(k-2)-2x^{(0)}(k-1)+x^{(0)}(k)]\Big\}. \tag{14}$$

其中:$x^{(0)}(k-2)\neq x^{(0)}(k-1),k=3,4,\cdots,n.$ 综合式(10)和(14),得到优化后的背景值为

$$Z^{(1)}(k)=$$
$$\begin{cases}z_1^{(1)}(k),\ k=2;\\(z_1^{(1)}(k)+z_2^{(1)}(k))/2,\ k=3,4\cdots,n-1;\\z_2^{(1)}(k),\ k=n.\end{cases} \tag{15}$$

式(15)即为NGOM(1,1)模型背景值的优化公式,其实现了对近似非齐次递减序列灰色建模的背景值优化求解. 本文通过构建两个方程组对背景值进行求解,其共同取值部分采用算术平均数进行取值,而对于首末两点则直接取值.

### 2.2 NGOM(1,1)模型的初始条件优化

一般情况下,选取实际值$x^{(1)}(1)$或$x^{(1)}(n)$作为灰色模型的初始条件,即模型建立在拟合曲线过点$(1,x^{(1)}(1))$或$(n,x^{(1)}(n))$的基础之上,从而求出时间响应函数中的参数$G$. 但从控制模型误差角度来讲,为了实现整体误差最小,最优的拟合曲线未必一定经过历史数据中的某一点. 关于GM模型初始条件优化,刘卫峰等[24]和王义闹等[25]分别以残差绝对值之和最小、累加序列相对误差之和最小为目标,刘斌等[26]和张辉等[27]分别以累加序列残差平方和最小、原始序列残差平方和最小为目标,上述学者均给出了初始条件优化的解析式. 由于上述方法优化的目标函数均为误差平方和最小或相对误差之和最小,与模型的检验标准平均相对误差最小不一致,两个准则的不一致性造成了模型优化效果不理想. 误差平方和最小准则侧重于等精度序列,表现出大致相同的绝对误差;而相对误差平方和最小准则侧重于非等精度序列,表现为大致相同的相对误差. 鉴于模型精度一般以平均误差作为衡量模型拟合效果的指标,即原始数据越大,所能接受的拟合绝对误差越大,而平均相对误差函数不可微,本文以还原序列的相对误差平方和作为最优目标函数,以期模型的平均相对误差最小. 定理3给出了在原始时间序列模拟值与真实值之间相对误差平方和最小时,确定模型的最优初始条件.

**定理3** 在还原NGOM(1,1)相对误差平方和最小意义下,模型的最优初始条件是

$$\hat{x}^{(0)}(n)=$$

$$\left\{ \mathrm{e}^{-an}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{-ak}(1-\mathrm{e}^{-a})\left[x^{(0)}(k)+\frac{b}{a}\right]}{x^{(0)}(k)^2}+\frac{\mathrm{e}^{-2an}\left[x^{(0)}(n)-\frac{b}{a}n-\frac{c}{a}+\frac{b}{a^2}\right]}{x^{(0)}(n)^2}\right\} \Big/ \left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{-2ak}(1-\mathrm{e}^{-a})^2}{x^{(0)}(k)^2}+\frac{\mathrm{e}^{-2an}}{x^{(0)}(n)^2}\right]+\frac{b}{a}n+\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}.$$

**证明** 令$F(G)$为模型的误差平方和,在边值条件未知时,原始序列的新预测值可以表示为

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\begin{cases} G\mathrm{e}^{-ak}(1-\mathrm{e}^{-a})-\dfrac{b}{a},\ k=1,2,\cdots,n-1; \\ G\mathrm{e}^{-an}+\dfrac{b}{a}n+\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{a^2},\ k=n. \end{cases} \tag{16}$$

初始条件为

$$\hat{x}^{(0)}(n)=G\mathrm{e}^{-an}+\frac{b}{a}n+\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}. \tag{17}$$

其中:$G$为未知量,$a$、$b$、$c$值同前. 则模型的相对误差平方和$F(G)$为

$$F(G)=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{x^{(0)}(k)-G\mathrm{e}^{-ak}(1-\mathrm{e}^{-a})+\frac{b}{a}}{x^{(0)}(k)}\right]^2+\left[\frac{x^{(0)}(n)-G\mathrm{e}^{-an}-\frac{b}{a}n-\frac{c}{a}+\frac{b}{a^2}}{x^{(0)}(n)}\right]^2.$$

显然$F(G)$为关于未知量$G$的函数,对$F(G)$求最小值可以求得$G$的最优值,然后代入式(17)便可求得模型的最优初始条件.

令$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}G}=0$,可得唯一驻点.

$$G=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{-ak}(1-\mathrm{e}^{-a})\left[x^{(0)}(k)+\frac{b}{a}\right]}{x^{(0)}(k)^2}+\frac{\mathrm{e}^{-an}\left[x^{(0)}(n)-\frac{b}{a}n-\frac{c}{a}+\frac{b}{a^2}\right]}{x^{(0)}(n)^2}\right\}\Big/\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{-2ak}(1-\mathrm{e}^{-a})^2}{x^{(0)}(k)^2}+\frac{\mathrm{e}^{-2an}}{x^{(0)}(n)^2}\right]. \tag{18}$$

将式(18)代入(17),可得边值条件的最优值,即定理得证. □

定理3表明,NGOM(1,1)模型的精度与初始条件的选择有着很大的关系,本文初始条件的优化思路与传统思路[24-27]有一定的差异,选择原始序列相对误差平方和作为无约束优化目标函数,能够实现最优目标函数与误差检验标准原则的统一,可以进一步提高模型精度.

## 3 案例分析

NGOM(1,1)模型的构建是为了能够对于近似非齐次递减规律的数据建模时避免不合理误差,因此对具有递减特征的序列建模具有较好的模拟和预测效果. 为了能够充分说明本文组合优化方法的优越性和适应性,本文拟选择文献[21]中的实例计算数据,并与传统GM(1,1)模型、文献[21]和文献[22]中的方法进行对比分析,说明本文模型的优化效果. 表1给出了一种害虫在某农药作用下单位面积内的数量随时间变化的采样数据[21].

**表1 某农药作用下单位面积内害虫数量变化信息**

| | 时间 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 数据 | 8 | 6.5 | 5.2 | 4.5 | 3.2 |

利用上述数据信息分别建立传统GM(1,1)模型、文献[21]模型、文献[22]模型和本文模型,时间响应式分别如下.

GM(1,1)模型:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=-33.407\,4\mathrm{e}^{-0.216\,7k}+41.407\,4;$$

文献[21]模型:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=42.836\,6\mathrm{e}^{-0.217\,2k}-15.436\,6;$$

文献[22]模型:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=44.419\,9\mathrm{e}^{-0.197\,7k}-17.019\,9;$$

本文模型:

$$\hat{x}^{(1)}(k)=17.733\,3\mathrm{e}^{-0.208(k-5)}-0.246\,2k-14.468\,3+1.834.$$

**表2 本文模型与GM(1,1)模型、文献[21]模型、文献[22]模型模拟精度比较**

| 模型 | 原始数据 | 8 | 6.5 | 5.2 | 4.5 | 3.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| GM(1,1) | 模拟值 | 8 | 6.508 6 | 5.240 4 | 4.219 4 | 3.397 3 |
| | 相对误差/% | 0 | 0.13 | 0.78 | 6.24 | 6.17 |
| | 平均相对误差/% | | | 2.73 | | |
| 文献[21] | 模拟值 | 8.020 1 | 6.518 5 | 5.298 | 4.306 2 | 3.257 2 |
| | 相对误差/% | 0.23 | 0.28 | 1.8 | 4.3 | 1.78 |
| | 平均相对误差/% | | | 1.67 | | |
| 文献[22] | 模拟值 | 7.969 7 | 6.539 8 | 5.366 5 | 4.403 6 | 3.120 3 |
| | 相对误差/% | 0. 38 | 0.61 | 3.20 | 2.14 | 2.49 |
| | 平均相对误差/% | | | 1.76 | | |
| 本文模型 | 模拟值 | 7.901 7 | 6.463 8 | 5.295 9 | 4.347 4 | 3.217 4 |
| | 相对误差/% | 1.23 | 0.56 | 1.84 | 3.39 | 0.54 |
| | 平均相对误差/% | | | 1.51 | | |

由表2分析可知:通过比较4种模型的模拟效果可以发现,本文模型的平均相对误差仅为1.51%,而其他3种模型的平均误差分别达到2.73%、1.67%和1.76%. 传统GM(1,1)模型的平均误差最大,表明传统

的正向累加方法对于能量递减序列的预测存在不合理的系统偏差,未能充分利用系统信息,所以建模误差较大; 文献[21]中的原始GOM(1,1)模型虽然克服了能量递增系统预测能量递减系统的固有偏差,对于低速递减序列具有改善的拟合效果,但是未能解决背景值对模型精度的影响,因此建模平均误差为1.67%; 文献[22]的优化模型通过对背景值优化,改善了模型精度,但是对于本文实例中具有非齐次噪声扰动序列建模效果相对较差,表明该背景值优化方法对于扩展递减序列的预测范围存在一定的缺陷; 而本文构建的近似非齐次指数序列的NGOM(1,1)模型通过对背景值和初始条件的组合优化,进一步提高了建模精度, 使得拟合误差达到最低1.51%, 表明在具有一定的噪声扰动下,本文模型对于齐次和非齐次序列具有较好的精度,证明了本文模型的实用性和优越性. 另外,从拟合序列相似程度角度做检验,对比拟合序列与原始序列的形状相似程度,以此作为可否进行预测的依据,保证建模得到的拟合序列与原始序列保持趋势的一致性. 采用绝对关联度进行拟合序列和原始序列形状相似性的判断依据,计算公式如下:

$$|s_0| = \sum_{k=2}^{n-1} |x_0^0(k)| + \frac{1}{2}|x_0^0(n)|,$$

$$|s_j| = \sum_{k=2}^{n-1} |x_j^0(k)| + \frac{1}{2}|x_j^0(n)|,$$

$$|s_j - s_0| = \sum_{k=2}^{n-1} |x_j^0(k) - x_0^0(k)| + \frac{1}{2}|x_j^0(n) - x_0^0(n)|,$$

其中 $X_0^0$ 和 $X_j^0$ 分别为序列 $X_0$ 和 $X_j$ 的始点零化像,则关联度计算公式为

$$\gamma_{0j} = \frac{1 + |s_0| + |s_j|}{1 + |s_0| + |s_j| + |s_j - s_0|}.$$

计算得到本文模型与原始序列的绝对关联度为0.986 4,而传统GM(1,1)模型、文献[21]和文献[22]模型得到的拟合序列与原始序列之间的绝对关联度分别为0.980 4、0.984 4和0.984 1. 由此可知,本文模型相对于其他3种模型对序列特征的描述更为精准,用于预测的可行性更高.

## 4　结　论

对于一类具有近似非齐次指数特征的衰减序列,本文构建了近似非齐次指数序列的NGOM(1,1)模型,并推导出参数的最小二乘解和时间相应函数表达式,避免了用能量递增系统去预测能量递减系统所产生的不合理误差. 鉴于背景值和初始条件对于模型精度有着重要影响,本着充分考虑各个系统序列对背景值的作用效果,运用方程组思想对背景值进行了优化处理,实现了背景值参数的优化估计. 另外,本文还改进了以往模型初始条件优化目标函数和模型检验标准不一致问题,实现了相对误差平方和最小条件下对模型的初始条件的最优选择. 通过背景值和初始条件的组合优化,模型取得了较好的实例应用效果,并采用绝对关联度分析得出本文模型对原始序列信息描述精确,说明了本文模型构建的合理性及有效性.

## 参考文献(References)


[1] 邓聚龙. 灰色论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 2-3.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002: 2-3.)

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 1-3.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004: 1-3.)

[3] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 1-10.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. The basis of grey technology and its application[M]. Beijing: Science Press, 2005: 1-10.)

[4] Wang Z X, Dang Y G, Liu S F, et al. The optimization of background value in GM(1,1) model[J]. J of Grey System, 2007, 10(2): 69-74.

[5] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于离散指数函数优化的GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008(2): 61-67.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. An optimal GM(1,1) based on the discrete function with exponential law[J]. Systems Engineerin — Theory & Practice, 2008(2): 61-67.)

[6] 张彬, 西桂权. 基于背景值和边值修正的GM(1,1)模型优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 682-688.
(Zhang B, Xi G Q. GM(1,1) model optimization based on the background value and boundary value correction[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(3): 682-688.)

[7] 李玻, 魏勇. 优化灰导数后的新GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(2): 100-105.
(Li B, Wei Y. Optimizes grey derivative of GM(1,1)[J]. System Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(2): 100-105.)

[8] Dang Y G, Lü S F, Chen K J. The models that be taken as initial value[J]. Kybernetes, 2004, 33(2): 247-254.

[9] 董奋义, 田军. 背景值和初始条件同时优化的GM(1,1)模型[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(3): 464-466.
(Dong F Y, Tian J. Optimization integrated background value with original condition for GM (1,1)[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(3): 464-466.)

[10] Wang Y H, Dang Y G, Li Y Q , et al. An approach to increase prediction precision of GM(1,1) model based on

optimization of the initial condition[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(8): 5640-5644.

[11] 刘斌, 刘思峰, 翟振杰, 等. GM(1,1)模型时间响应函数的最优化[J]. 中国管理科学, 2003, 11(4): 54-57.
(Liu B, Liu S F, Zhai Z J, et al. Optimum time response sequence for GM(1,1)[J]. Chinese J of Management Science, 2003, 11(4): 54-57.)

[12] 王正新. GM(1,1)模型的特性与优化研究[D]. 南京: 南京航空航天大学经济与管理学院, 2007.
(Wang Z X. Study on the characteristics and optimization of GM(1,1) model[D]. Nanjing: College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007.)

[13] 郑照宁, 武玉英, 包涵龄. GM模型的病态性问题[J]. 中国管理科学, 2001, 9(5): 39-45.
(Zheng Z N, Wu Y Y, Bao H L. Morbidity problem in grey model[J]. Chinese J of Management Science, 2001, 9(5): 39-45.)

[14] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM (1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2005, 15(1): 93-99.)

[15] 王正新, 党耀国, 刘思峰. GM(1,1)幂模型的病态性[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(7): 1859-1866.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. The morbidity of GM(1,1) power model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(7): 1859-1866.)

[16] 谢乃明, 刘思峰. 近似非齐次指数序列的离散灰色模型特性研究[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 9(5): 863-867.
(Xie N M, Liu S F. Research on the non-homogenous discrete grey model and its parameter's properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 9(5): 863-867.)

[17] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 一种新的灰色预测模型及其建模机理[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1702-1706.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel grey forecasting model and its modeling mechanism[J]. Control and Decision, 2009, 24(11): 1702-1706.)

[18] 朱超余, 谢乃明. NDGM模型的性质及预测效果分析[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(9): 1915-1918.
(Zhu C Y, Xie N M. Research on properties of non-homogenous discrete grey model and its predictive results[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(9): 1915-1918.)

[19] 陈芳, 魏勇. 近非齐次指数序列GM(1,1)模型灰导数的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2874-2879.
(Chen F, Wei Y. Approximate non-homogeneous index sequence GM(1,1) model of grey derivative optimization[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(11): 2874-2879.)

[20] 战立青, 施化吉. 近似非齐次指数数据的灰色建模方法与模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 689-694.
(Zhan L Q, Shi H J. Methods and model of grey modeling for approximation non-homogenous exponential data[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(3): 689-694.)

[21] 宋中民, 肖新平. 反向累加生成及灰色GOM(1,1)模型[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2002, 26(4): 231-233.
(Song Z M, Xiao X P. The accumulated generating operation in opposite direction and its use in grey model GOM(1,1)[J]. J of Wuhan University of Technology: Transportation Science & Engineering, 2002, 26(4): 231-233.)

[22] 杨知, 任鹏, 党耀国. 反向累加生成与灰色GOM(1,1)模型的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(8): 160-164.
(Yang Z, Ren P, Dang Y G. Grey opposite-direction accumulated generating and optimization of GOM(1,1) model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(7): 160-164.)

[23] 练郑伟, 党耀国, 王正新. 反向累加生成的特性及GOM(1,1)模型的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(9): 2306-2312.
(Lian Z W, Dang Y G, Wang Z X. Properties of accumulated generating operation in opposite-direction and optimization of GOM(1,1) model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(9): 2306-2312.)

[24] 刘卫锋, 何霞. 基于最小一乘准则的GM(1,1)模型边值分析[J]. 统计与决策, 2011(20): 167-168.
(Liu W F, He X. Bassed on the least one criterion of boundary value analysis of GM(1,1) model[J]. Statistics and Decision, 2011(20): 167-168.)

[25] 王义闹, 吴利丰. 基于平均相对误差绝对值最小的GM(1,1)建模[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2009(10): 29-31.
(Wang Y N, Wu L F. Modeling GM(1,1) based on the minimum of mean absolute percentage error[J]. J of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science Edition, 2009(10): 29-31.)

[26] 刘斌, 刘思峰, 翟振杰, 等. GM(1,1)模型时间响应函数的最优化[J]. 中国管理科学, 2003, 11(4): 54-57.
(Liu B, Liu S F, Cui Z J, et al. Optimum time response sequence for GM(1,1)[J]. Chinese J of Management and Science, 2003, 11(4): 54-57.)

[27] 张辉, 胡适耕. GM(1,1)模型的边值分析[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2001, 29(4): 110-111.
(Zhang H, Hu S G. Analysis of boundary condition for GM(1,1) model[J]. J of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science Edition, 2001, 29(4): 110-111.)

（责任编辑：齐　霁）