文章编号: 1001-0920(2017)08-1475-06　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0677

基于核与灰度的灰色综合关联贴近度决策模型

刘中侠[1,2†], 刘思峰[1], 方志耕[1]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 铜陵学院 财税与公共管理学院，安徽 铜陵 244000)

摘　要: 针对指标值为区间灰数且权重属性部分已知、部分未知的决策问题, 提出一种基于核与灰度的灰色关联综合贴近度的决策方法. 首先, 通过定义区间灰数的离散度和接近度, 构造一个确定指标权重的多目标优化模型; 然后, 利用区间灰数的简化形式, 求出方案与正、负理想方案核的关联度和灰度的关联度, 进而计算出方案的综合关联度; 最后, 构建灰色综合关联贴近度模型并依综合关联贴近度大小对方案排序. 算例分析验证了所提出方法的合理性和可行性.

关键词: 灰色关联决策；离散度；接近度；核与灰度

中图分类号: N941.5　　**文献标志码:** A

Decision making model of grey comprehensive correlation and relative close degree based on kernel and greyness degree

LIU Zhong-xia[1,2†], *LIU Si-feng*[1], *FANG Zhi-geng*[1]

(1. College of Economic and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China；2. College of Finance and Taxation and Public Administration，Tongling University，Tongling 244000，China)

Abstract: According to the grey decision problem with the attribute's values of interval grey numbers and the attributes of weights that are partially known, a decision method of grey comprehensive closed to degree based on the kernel and the greyness degree of the interval grey numbers is proposed. Firstly, by defining the discrete and close degree of the interval grey number, the paper constructs a multi-objective optimization model and calculates the weight of each index. Then, by using the simplified form of the proposed interval grey number, the correlation degree of kernel and greyness between the scheme and the positive and negative ideal schemes is derived, the comprehensive correlation degree of the scheme is calculated. Finally, the model with gray comprehensive correlation and relative close degree is built, and the scheme is sorted according to the size of the comprehensive correlation degree. An example is given to illustrate the rationality and feasibility of the proposed method.

Keywords: grey relational decision making；discrete degree；close to degree；kernel and degree of greyness

0　引　言

多属性决策问题广泛应用于经济与管理等相关领域,灰色关联决策也是解决多属性决策的一个重要的方法. 目前,人们对指标为实数的灰色关联决策问题的研究较多并取得了相应的丰硕成果,但对于指标值为区间灰数的灰色关联决策的研究成果相对较少.

对于灰色关联分析,其基本思想是根据序列曲线几何形状的相似程度来判断其联系是否紧密,曲线越接近,关联度越大,反之亦然[1]. 此后,很多学者对此方法进行了改进,文献[2]针对属性值以区间数形式给出并且已知方案偏好信息的多属性决策问题,提出了区间数多属性灰色关联决策模型;文献[3]研究了观测值为区间灰数的灰色关联度的算法,用非线性规划的方法计算出指标的权重;文献[4]通过引入区间数序列的范数,提出了多指标灰区间数关联决策模型. 文献[2-4]的一个共同特点是利用区间数的研究方法来研究区间灰数,所得到的结果肯定不理想. 因为区间数与区间灰数有着本质的区别,区间数在整个区间上取值是均匀的,而区间灰数不一定在区间上服从均匀分布,要通过信息补充,使其真值在区间上分布越来越清晰. 文献[5]提出了基于理想方案的最大关联度方法、基于临界方案的最小关联度方法,

收稿日期: 2016-05-30；**修回日期:** 2016-08-09.

基金项目: 安徽省社科规划项目 (AHSKY2016D27)；国家自然科学基金与英国皇家学会国际合作交流项目 (71111130211).

作者简介: 刘中侠(1973−), 女, 博士生, 从事灰色理论、管理决策分析的研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色理论、数量经济学等研究.

†通讯作者. E-mail: lzhx97@163.com

以及同时考虑理想方案和临界方案的综合关联度方法及其相关概念. 将灰色关联分析理论与TOPSIS理论、层次分析法、累积前景理论等组合集成是灰关联决策模型的一个改进方向[6-10]. 文献[6-10]主要是将灰色关联度模型与其他方法进行集成研究,且大多数决策指标值都是实数形式,几乎没有涉及区间灰数形式的关联度. 另外,利用TOPSIS思想若只考虑方案与正理想的关联度而没有考虑与负理想的关联度,则有时会造成判别的不一致性问题. 由于区间灰数在区间上分布不一定是均匀分布,有学者试图通过白化权函数来描述区间灰数的分布,进而构建区间灰数关联度是一个有意义的尝试[11]. 为解决指标值为区间灰数形式的决策问题,有学者通过对区间灰数进行分解和还原[12-13],然后构建灰关联决策模型. 文献[12-13]只研究了信息在加减运算过程中通过对信息分解与还原使有限的信息得到充分利用且误差较小,但对于乘除运算过程中误差和信息的利用程度没有研究. 通过核与灰度构建的灰代数系统与灰色代数运算,在一定程度上解决了灰代数运算难题. 在灰代数运算系统基础上,文献[14-20]从不同的角度对已有的关联度进行了拓展研究,将属性值真正拓展到区间灰数,使灰色关联度理论逐步趋于完善.

综上可以看出,目前针对属性值为区间灰数的处理可能会造成决策信息利用不充分的问题. 为此,本文基于前人的研究,利用核与灰度将区间灰数进行白化处理,通过定义区间灰数的离散度和接近度,构建方案与正、负理想解的综合接近度的多目标优化模型. 在此基础上构建方案的核与正、负理想解的核之间的关联度和灰度之间的关联度模型,进而构建综合关联贴近度公式,依据每个方案的综合关联贴近度的大小对方案进行排序.

1 基本概念与定义

定义1[1] 既有下界$\underline{a}$又有上界$\overline{a}$的灰数称为区间灰数,记为$\otimes\in[\underline{a},\overline{a}]$, $\underline{a}<\overline{a}$.

定义2[1] 设区间灰数$\otimes\in[\underline{a},\overline{a}]$, $\underline{a}<\overline{a}$, 在缺乏灰数$\otimes$分布信息的情况下:

1) 若$\otimes$为连续灰数,则称$\hat{\otimes}=\dfrac{1}{2}(\underline{a}+\overline{a})$为灰数$\otimes$的核;

2) 若$\otimes$为离散灰数, $a_i\in[\underline{a},\overline{a}](i=1,2,\cdots,n)$为灰数$\otimes$的所有可能取值,则称$\hat{\otimes}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$为灰数$\otimes$的核.

定义3[1] 设灰数$\otimes$产生的背景或论域为$\varOmega$, $\mu(\otimes)$为灰数$\otimes$取数域的测度,则称$g^\circ(\otimes)=\dfrac{\mu(\otimes)}{\mu(\varOmega)}$为灰数的灰度.

定义4[1] 设$\hat{\otimes}$为灰数$\otimes$的核, g°为灰数$\otimes$的灰度,称$\hat{\otimes}_{(g^\circ)}$为灰数$\otimes$的简化形式.

公理1[1](灰度不减公理) 两个灰度不同的灰数进行和、差、积、商运算时,运算结果的灰度不小于灰度较大的灰数的灰度.

设有两个区间灰数$\otimes_k\in[\underline{a}_k,\overline{a}_k]$, $\underline{a}_k<\overline{a}_k$, 简记为$\hat{\otimes}_{k(g_k^\circ)}$, $\otimes_t\in[\underline{a}_t,\overline{a}_t]$, $\underline{a}_t<\overline{a}_t$, 简记为$\hat{\otimes}_{t(g_t^\circ)}$, 基于灰数的简化形式$\hat{\otimes}_{(g^\circ)}$, 有如下的运算法则.

法则1 $\hat{\otimes}_{k(g_k^\circ)}\pm\hat{\otimes}_{t(g_t^\circ)}=(\hat{\otimes}_k\pm\hat{\otimes}_t)_{(g_k^\circ\vee g_t^\circ)}$;

法则2 $\hat{\otimes}_{k(g_k^\circ)}\times\hat{\otimes}_{t(g_t^\circ)}=(\hat{\otimes}_k\times\hat{\otimes}_t)_{(g_k^\circ\vee g_t^\circ)}$;

法则3 $\hat{\otimes}_{k(g_k^\circ)}/\hat{\otimes}_{t(g_t^\circ)}=(\hat{\otimes}_k/\hat{\otimes}_t)_{(g_k^\circ\vee g_t^\circ)}$.

定义5 设区间灰数序列

$$X(\otimes)=(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\cdots,\otimes(t_n)).$$

其中: $\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]$, $k=1,2,\cdots,n$; $X(\otimes)$中所有区间灰数的论域为$\varOmega\in[a,b]$, 且假设$\otimes(t_k)$在其范围内的取值可能性均等. 则$X(\otimes)$所有"核"组成的序列称为$X(\otimes)$的核序列,记为K, 所有"灰度"构成的序列称为$X(\otimes)$的灰度序列,记为G, 即

$$X(\otimes)=$$
$$(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\cdots,\otimes(t_n))\Rightarrow$$
$$\begin{cases}K=(\hat{\otimes}(t_1),\hat{\otimes}(t_2),\cdots,\hat{\otimes}(t)),\\ G=(g^\circ(\otimes(t_1)),g^\circ(\otimes(t_2)),\cdots,g^\circ(\otimes(t_n))).\end{cases}$$

定义6 设区间灰数$\otimes_1\in[\underline{a_1},\overline{a_1}]$, $\otimes_2\in[\underline{a_2},\overline{a_2}]$, 记$l(\otimes_1)=\overline{a_1}-\underline{a_1}$, $l(\otimes_2)=\overline{a_2}-\underline{a_2}$, 称

$$d(\otimes_1,\otimes_2)=\frac{|\overline{a_2}-\overline{a_1}|+|\underline{a_2}-\underline{a_1}|}{l(\otimes_1)+l(\otimes_2)}$$

为区间灰数$\otimes_1$与$\otimes_2$的离散度. 其中$\otimes_1$与$\otimes_2$可以退化为实数. 若两个都退化为实数,则

$$d(\otimes_1,\otimes_2)=|\overline{a_2}-\overline{a_1}|.$$

定义7 设区间灰数$\otimes_1\in[\underline{a_1},\overline{a_1}]$, $\otimes_2\in[\underline{a_2},\overline{a_2}]$, 称

$$T(\otimes_1,\otimes_2)=\begin{cases}\dfrac{1-d(\otimes_1,\otimes_2)}{1+d(\otimes_1,\otimes_2)},\ 0\leqslant d(\otimes_1,\otimes_2)<1;\\ 0,\ d(\otimes_1,\otimes_2)\geqslant 1\end{cases}$$

为区间灰数$\otimes_1$与$\otimes_2$的接近度.

2 基于核与灰度的区间灰数关联度及综合关联贴近度模型

定理1 基于核与灰度的区间灰数的白化序列与原区间灰数序列所含的信息量相等.

证明 由定义2、定义3和定义5可知,在区间灰数的"核"序列和"灰度"序列中,基于区间灰数$\otimes(t_k)$的上、下界的和(a_k+b_k)与差(a_k-b_k)可以建立如下的方程组:

$$\hat{\otimes}(t_k)=\frac{a_k+b_k}{2}\Rightarrow a_k+b_k=2\hat{\otimes}(t_k),\qquad(1)$$

$$g^\circ(\otimes(t_k))=\frac{b_k-a_k}{b-a}\Rightarrow$$
$$b_k-a_k=(b-a)\cdot g^\circ(\otimes(t_k)). \tag{2}$$

由式(1)和(2)可以构成关于a_k、b_k的二元一次方程组. 解该方程组,得

$$\begin{cases} a_k=\hat{\otimes}(t_k)-\dfrac{1}{2}(b-a)\cdot g^\circ(\otimes(t_k)), \\ b_k=\hat{\otimes}(t_k)+\dfrac{1}{2}(b-a)\cdot g^\circ(\otimes(t_k)). \end{cases} \tag{3}$$

由于论域$(b-a)$为已知条件,可通过"核"与"灰度"反解出区间灰数的上、下界b_k和a_k, 也即

$$\begin{cases} \hat{\otimes}(t_k) \\ g^\circ(\otimes(t_k)) \end{cases}\Leftrightarrow\otimes(t_k).$$

因此, 当$k=1,2,\cdots,n$时,可以推出结论成立. □

定理2(核的灰色关联度) 设$X_i(\otimes)(i=1,2,\cdots,m)$为系统行为序列,其相应"核"序列如下:

$$K_0=(\hat{\otimes}_0(1),\hat{\otimes}_0(2),\cdots,\hat{\otimes}_0(n)),$$
$$K_1=(\hat{\otimes}_1(1),\hat{\otimes}_1(2),\cdots,\hat{\otimes}_1(n)),$$
$$K_i=(\hat{\otimes}_i(1),\hat{\otimes}_i(2),\cdots,\hat{\otimes}_i(n)),$$
$$K_m=(\hat{\otimes}_m(1),\hat{\otimes}_m(2),\cdots,\hat{\otimes}_m(n)).$$

对于$\xi\in(0,1)$, 令

$$\gamma(\hat{\otimes}_0(k),\hat{\otimes}_i(k))=$$
$$\frac{\min\limits_i\min\limits_k|\hat{\otimes}_0(k)-\hat{\otimes}_i(k)|+}{|\hat{\otimes}_0(k)-\hat{\otimes}_i(k)|+}\longrightarrow$$
$$\longleftarrow\frac{\xi\max\limits_i\max\limits_k|\hat{\otimes}_0(k)-\hat{\otimes}_i(k)|}{\xi\max\limits_i\max\limits_k|\hat{\otimes}_0(k)-\hat{\otimes}_i(k)|},$$
$$\gamma(K_0,K_i)=\sum_{k=1}^n\gamma(\hat{\otimes}_0(k),\hat{\otimes}_i(k))\cdot\omega_j,$$

则$\gamma(K_0,K_i)$满足灰色关联公理. 其中: ξ称为分辨系数, $\gamma(K_0,K_i)$称为$X_0(\otimes)$与$X_i(\otimes)$的"核"的灰色关联度.

定理3(灰度的关联度) 设$X_i(\otimes)(i=1,2,\cdots,m)$为系统行为序列,其相应"灰度"序列如下:

$$G_0=(g_0^\circ(\otimes_1),g_0^\circ(\otimes_2),\cdots,g_0^\circ(\otimes_n)),$$
$$G_1=(g_1^\circ(\otimes_1),g_1^\circ(\otimes_2),\cdots,g_1^\circ(\otimes_n)),$$
$$G_i=(g_i^\circ(\otimes_1),g_i^\circ(\otimes_2),\cdots,g_i^\circ(\otimes_n)),$$
$$G_m=(g_m^\circ(\otimes_1),g_m^\circ(\otimes_2),\cdots,g_m^\circ(\otimes_n)).$$

对于$\xi\in(0,1)$, 令

$$\gamma(g_0^\circ(\otimes(k)),g_i^\circ(\otimes(k)))=$$
$$\frac{\min\limits_i\min\limits_k|g_0^\circ(\otimes(k))-g_i^\circ(\otimes(k))|+}{g_0^\circ(\otimes(k))-g_i^\circ(\otimes(k))|+}\longrightarrow$$
$$\longleftarrow\frac{\xi\max\limits_i\max\limits_k|g_0^\circ(\otimes(k))-g_i^\circ(\otimes(k))|}{\xi\max\limits_i\max\limits_k|g_0^\circ(\otimes(k))-g_i^\circ(\otimes(k))|},$$
$$\gamma(G_0,G_i)=\sum_{k=1}^n\gamma(g_0^\circ(\otimes(k)),g_i^\circ(\otimes(k)))\cdot\omega_j,$$

则$\gamma(G_0,G_i)$满足灰色关联公理. 其中: ξ称为分辨系数, $\gamma(G_0,G_i)$称为$X_0(\otimes)$与$X_i(\otimes)$的"灰度"的灰色关联度.

定义8 令$\gamma_i=\gamma(K_0,K_i)+\gamma(G_0,G_i)$, 则称$\gamma_i$为区间灰数型综合关联度, $\gamma_i^+=\gamma(K_0^+,K_i)+\gamma(G_0^+,G_i)$和$\gamma_i^-=\gamma(K_0^-,K_i)+\gamma(G_0^-,G_i)$分别表示方案与正、负理想的综合关联度.

定义9 令γ_i^+、γ_i^-分别表示方案与正、负理想的综合关联度,称$\lambda_i=\dfrac{\gamma_i^+}{\gamma_i^++\gamma_i^-}$为综合关联相对贴近度, $i=1,2,\cdots,m$.

3 基于核与灰度的多属性关联决策模型构建

Step 1 设多属性决策的方案集$X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$, 由n个评价指标组成指标属性集$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$, 属性权重为

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n),$$

其中$0\leqslant\omega_j^L\leqslant\omega_j\leqslant\omega_j^U\leqslant1$且$\sum\limits_{j=1}^n\omega_j=1$. 方案集$X$对指标集$S$的区间灰数决策矩阵为$M$, 即

$$M=([x_{ij}^L,x_{ij}^U]),\ i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m.$$

Step 2 对区间灰数决策矩阵进行规范化处理,得到规范化区间灰数矩阵R. 设指标$A_j=[x_{ij}^L,x_{ij}^U]$. 若A_j为效益型,则规范化处理计算公式为

$$r_{ij}^L=x_{ij}^L\Big/\sum_{i=1}^n x_{ij}^U,\ r_{ij}^U=x_{ij}^U\Big/\sum_{i=1}^n x_{ij}^L;$$

若A_j为成本型,则规范化处理计算公式为

$$r_{ij}^L=\frac{1}{x_{ij}^U}\Big/\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_{ij}^L},\ r_{ij}^U=\frac{1}{x_{ij}^L}\Big/\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_{ij}^U}.$$

显然$r_{ij}^L,r_{ij}^U\in[0,1]$, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,m$, 由此可以得到规范化矩阵$R=([r_{ij}^L,r_{ij}^U])_{m\times n}=(r_{ij})_{m\times n}$, 由定理1知,可将$R$转化为区间灰数简化的矩阵$R'$, 即

$$R'=\begin{bmatrix} \hat{\otimes}_{11(g_{11}^\circ)} & \hat{\otimes}_{12(g_{12}^\circ)} & \cdots & \hat{\otimes}_{1n(g_{1n}^\circ)} \\ \hat{\otimes}_{21(g_{21}^\circ)} & \hat{\otimes}_{22(g_{22}^\circ)} & \cdots & \hat{\otimes}_{2n(g_{2n}^\circ)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\otimes}_{m1(g_{m1}^\circ)} & \hat{\otimes}_{m2(g_{m2}^\circ)} & \cdots & \hat{\otimes}_{mn(g_{mn}^\circ)} \end{bmatrix}.$$

Step 3 指标权重的确定. 在规范化决策矩阵$R=([r_{ij}^L,r_{ij}^U])_{m\times n}=(r_{ij})_{m\times n}$中确定正、负理想解,即令

$$r_j^+=[r_j^L,r_j^U]=[\max_i r_{ij}^L,\max_i r_{ij}^U],\ j=1,2,\cdots,n;$$
$$r_j^-=[r_j^L,r_j^U]=[\min_i r_{ij}^L,\min_i r_{ij}^U],\ j=1,2,\cdots,n.$$

则正理想解为$r^+=(r_1^+,r_2^+,\cdots,r_n^+)$, 负理想解为

$r^-=(r_1^-,r_2^-,\cdots,r_n^-)$.

根据定义6和定义7, 再结合权向量,则可以确定方案X_i与正、负理想解的综合接近度. 为此,建立如下多目标规划模型,以此确定各指标权重:

$$\max T_i^+=\sum_{j=1}^n T(r_{ij},r_j^+)\omega_j,\ i=1,2,\cdots,m;$$

$$\min T_i^-=\sum_{j=1}^n T(r_{ij},r_j^-)\omega_j,\ i=1,2,\cdots,m.$$

$$\text{s.t. } 0\leqslant\omega_j^L\leqslant\omega_j\leqslant\omega_j^U\leqslant 1\text{且}\sum_{j=1}^n\omega_j=1.$$

若对各个方案不存在任何偏爱关系,则可以通过如下的单目标规划模型确定指标权重:

$$\max\ T=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(T(r_{ij},r_j^+)-T(r_{ij},r_j^-))\omega_j;$$

$$\text{s.t. } 0\leqslant\omega_j^L\leqslant\omega_j\leqslant\omega_j^U\leqslant 1\text{且}\sum_{j=1}^n\omega_j=1.$$

Step 4 计算方案与正、负理想的''核''关联度和''灰度''关联度. 因为每个指标的权重不一样,所以在计算关联度时不是等权处理的,即''核''关联度和''灰度''关联度分别为

$$\gamma(K_0,K_i)=\sum_{k=1}^n\gamma(\hat{\otimes}_0(k),\hat{\otimes}_i(k))\cdot\omega_j,$$

$$\gamma(G_0,G_i)=\sum_{k=1}^n\gamma(g_0^\circ(\otimes(k)),g_i^\circ(\otimes(k)))\cdot\omega_j.$$

Step 5 按照综合关联相对贴近度进行方案排序. 按照定义8, 首先分别计算γ_i^+、γ_i^-; 其次计算综合关联相对贴近度λ_i; 最后按照定义9中λ_i的大小对各方案进行排序.

4 算例分析

某企业生产的机器上有一种零件需从供应链上其他企业购进,有4家供应商$X=(X_1,X_2,X_3,X_4)$可供选择,现对这4家供应商进一步筛选. 专家给出4个指标:产品质量s_1, 产品价格s_2, 服务能力s_3, 产品设计方案s_4. 其中产品质量、服务能力和产品设计方案是效益性指标,产品价格为成本型指标,具体值如表1所示.

表1 各指标属性值

供应商	s_1	s_2	s_3	s_4
X_1	[9.4, 9.8]	[15.0, 15.6]	[14.0, 15.0]	[9.6, 9.8]
X_2	[9.2, 9.6]	[15.0, 15.4]	[15.5, 16.0]	[9.3, 9.8]
X_3	[9.0, 9.4]	[14.8, 15.2]	[15.0, 16.0]	[9.0, 9.4]
X_4	[9.1, 9.7]	[14.5, 15.3]	[15.5, 16.0]	[9.2, 9.6]

Step 1 根据供应商提供的产品能力指数,建立区间数样本评价矩阵如下:

$$\begin{bmatrix}[9.4,9.8] & [15.0,15.6] & [14.0,15.0] & [9.6,9.8]\\ [9.2,9.6] & [15.0,15.4] & [15.5,16.0] & [9.3,9.8]\\ [9.0,9.4] & [14.8,15.2] & [15.0,16.0] & [9.0,9.4]\\ [9.1,9.4] & [14.5,15.3] & [15.5,16.0] & [9.2,9.6]\end{bmatrix}.$$

Step 2 对区间灰数决策矩阵进行规范化处理,得到如下规范化区间灰数矩阵R:

$$R=\begin{bmatrix}[0.244\,2,0.267\,0] & [0.237\,5,0.255\,2]\\ [0.239\,0,0.261\,6] & [0.240\,6,0.255\,2]\\ [0.233\,8,0.256\,1] & [0.243\,8,0.259\,7]\\ [0.236\,4,0.264\,3] & [0.242\,2,0.265\,0]\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{bmatrix}[0.222\,2,0.250\,0] & [0.248\,7,0.264\,2]\\ [0.246\,0,0.266\,7] & [0.238\,3,0.264\,2]\\ [0.238\,1,0.266\,7] & [0.233\,2,0.253\,4]\\ [0.246\,0,0.266\,7] & [0.238\,3,0.258\,8]\end{bmatrix}.$$

Step 3 指标权重的确定. 在规范化决策矩阵$R=([r_{ij}^L,r_{ij}^U])_{m\times n}$中确定正、负理想解.

正理想解为

$$r^+=([0.244\,2,0.287\,0],[0.243\,8,0.265\,0],\\ [0.246\,0,0.266\,7],[0.248\,7,0.264\,2]);$$

负理想解为

$$r^-=([0.233\,8,0.256\,1],[0.237\,5,0.255\,2],\\ [0.222\,2,0.250\,0],[0.233\,2,0.253\,4]).$$

因为对任何方案不存在''偏爱'', 故建立单目标规划模型,确定指标权重. 有

$$\max\ T=0.374\omega_1+0.465\,8\omega_2-\\ 1.366\,5\omega_3-0.444\,3\omega_4.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}0\leqslant\omega_j\leqslant 1,\ j=1,2,3,4;\\ \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=1;\\ 0.1\leqslant\omega_j\leqslant 0.35,\ j=1,2,3,4.\end{cases}$$

通过Lingo求解,得到

$$\omega_1=0.35,\omega_2=0.35,\ \omega_3=0.1,\ \omega_4=0.2.$$

Step 4 分别计算方案与正、负理想的''核''关联系数矩阵和''灰度''的关联系数矩阵. 方案与正理想的''核''关联系数矩阵

$$\begin{bmatrix}1.000\,0 & 0.945\,5 & 0.873\,0 & 0.335\,5\\ 1.000\,0 & 0.991\,1 & 0.962\,9 & 0.335\,6\\ 1.000\,0 & 0.943\,9 & 0.952\,4 & 0.333\,4\\ 1.000\,0 & 0.968\,6 & 0.963\,2 & 0.333\,3\end{bmatrix};$$

方案与负理想的''核''关联系数矩阵

$$\begin{bmatrix}1.000\,0 & 0.443\,3 & 0.455\,0 & 0.764\,8\\ 1.000\,0 & 0.685\,6 & 0.355\,5 & 0.756\,6\\ 1.000\,0 & 0.602\,2 & 0.333\,3 & 0.994\,0\\ 1.000\,0 & 0.821\,2 & 0.356\,3 & 0.992\,5\end{bmatrix};$$

方案与正理想的“灰度”关联系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.6029 & 0.4281 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.4509 & 0.9667 & 0.3333 \\ 1.0000 & 0.5181 & 0.3836 & 0.5077 \\ 1.0000 & 0.6742 & 0.5841 & 0.8093 \end{bmatrix};$$

方案与负理想的“灰度”关联系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9355 & 0.9023 & 0.5275 \\ 1.0000 & 0.6308 & 0.4328 & 0.5123 \\ 1.0000 & 0.7577 & 0.8755 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.9149 & 0.3333 & 0.5960 \end{bmatrix}.$$

Step 5　分别计算方案与正、负理想的“核”的加权关联度和“灰度”的加权关联度. 由$\gamma(K_0,K_i)=\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma(\hat{\otimes}_0(k),\hat{\otimes}_i(k))\cdot\omega_j$分别计算方案“核”与正、负理想“核”的关联度

$$\gamma^+(K_0,K_1)=0.8353,\ \gamma^+(K_0,K_2)=0.8603,$$
$$\gamma^+(K_0,K_3)=0.8423,\ \gamma^+(K_0,K_4)=0.8519,$$
$$\gamma^-(K_0,K_1)=0.7036,\ \gamma^-(K_0,K_2)=0.7768,$$
$$\gamma^-(K_0,K_3)=0.7929,\ \gamma^-(K_0,K_4)=0.8716;$$

由$\gamma(G_0,G_i)=\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma(g_0^\circ(\otimes(k)),g_i^\circ(\otimes(k)))\cdot\omega_j$分别计算方案“灰度”与正、负理想“灰度”的关联度

$$\gamma^+(G_0,G_1)=0.8038,\ \gamma^+(G_0,G_2)=0.6711,$$
$$\gamma^+(G_0,G_3)=0.6712,\ \gamma^+(G_0,G_4)=0.8062,$$
$$\gamma^-(G_0,G_1)=0.8732,\ \gamma^-(G_0,G_2)=0.7165,$$
$$\gamma^-(G_0,G_3)=0.9024,\ \gamma^-(G_0,G_4)=0.8227.$$

Step 6　分别计算方案与正、负理想的综合关联度和综合关联相对贴近度. 由定义7分别得到方案与正理想的综合关联度如下:

$$\gamma_1^+=1.6391,\ \gamma_2^+=1.5314,$$
$$\gamma_3^+=1.5135,\ \gamma_1^+=1.6581;$$

由定义7分别得到方案与负理想的综合关联度如下:

$$\gamma_1^-=1.5768,\ \gamma_2^-=1.4933,$$
$$\gamma_3^-=1.6953,\ \gamma_1^-=1.6943;$$

由定义8分别得到方案的综合关联相对贴近度为

$$\lambda_1=0.5097,\ \lambda_2=0.5062,$$
$$\lambda_3=0.4717,\ \lambda_4=0.4946.$$

根据综合关联相对贴近度的大小得到如下排序:

$$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_4>\lambda_3,$$

即方案1为最优方案.

为了说明该方法的有效性和普适性,现将该方法与文献[21]和文献[1]中邓氏关联度的方法进行比较,具体结果见表2.

表2　不同方法结果比较

方案	文献[21]方法		文献[1]方法		本文方法	
	相对核值	排序	关联度值	排序	综合相对贴近度值	排序
X_1	0.3309	3	0.7717	2	0.5097	1
X_2	0.3753	1	0.7548	3	0.5062	2
X_3	0.3110	4	0.7049	4	0.4717	4
X_4	0.3675	2	0.7916	1	0.4946	3

文献[1]的方法没有考虑与负理想方案的关系,只考虑了与正理想方案的关联度,所以其方案排序可能会比较片面. 文献[21]首先将区间灰数转化为标准区间灰数;其次,利用核与灰度构建两个优化模型,分别确定核的权重和灰度的权重;最后,利用相对核方法对方案进行序. 由于笔误,文献[21]在通过优化模型求解指标的权重时有错误,如果按照文献[21]中的模型求解,则指标权重不是文中所述的值,因此对此排序的结果值得商榷. 与以上两个方法相比较,利用核与灰度的方法对区间灰数进行处理能充分利用区间灰数所含有的信息,而且综合关联贴近度能够将各方案与正、负理想方案的关系进行综合考虑,比较切合实际,因此,模型求解结果具有科学性和合理性.

5　结　论

本文对决策信息为区间灰数且指标权重信息不确定的多属性决策问题进行了深入研究. 在区间灰数的核与灰度及离散度与接近度概念的基础上,构建了方案与正、负理想综合关联度模型以及综合关联贴近度排序模型. 该决策方法与现有的灰色关联决策模型相比较而言,它能够综合考虑各方案与正、负理想方案之间关系,使得决策不会产生偏离现象,即不会产生变化的不一致性;能够较好地解决指标属性值为区间灰数的权重问题;该模型符合灰理论的思想,即通过核与灰度对区间灰数进行白化处理方法,使得决策信息得到了充分利用. 该决策模型对方案的评价科学合理,同时也为处理决策信息为不确定数值的决策问题提供了一个解决问题的视角.

参考文献(References)

[1]　刘思峰,党耀国,方志耕,等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 63-66.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its application[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010：63-66.)

[2]　卫贯武,魏宇. 对方案有偏好的区间数多属性灰色关联决策模型[J]. 中国管理科学, 2008, 16(1): 158-160.

(Wei G W, Wei Y. Model of grey relational analysis for interval multiple attribute decision making with preference information on alternatives[J]. Chinese J of Management Science, 2008, 16(1): 158-160.)

[3] 丁宝苍,杨鹏,孙鹤旭,等. 离线鲁棒预测控制器综合方法的改进方案[J]. 控制与决策, 2005, 20(3): 312-314.
(Ding B C, Yang P, Sun H X, et al. Improved off-linsynthesis approach of robust model predicitive control[J]. Control and Decision, 2005, 20(3): 312-314.)

[4] 钟诗胜,王体春,丁刚. 基于多指标灰区间数关联决策模型的产品方案设计[J]. 控制与决策, 2008, 23(12): 1379-1381.
(Zhong S S, Wang T C, Ding G. Mechanism scheme design based on multi-attribute gray interval relevant optimized decision-making model[J]. Control and Decision, 2008, 23(12): 1379-1381.)

[5] 罗党,刘思峰. 灰色关联决策方法研究[J]. 中国管理科学, 2005, 13(1): 101-106.
(Luo D, Liu S F. Study on the method for grey incidence decision-making[J]. Chinese J of Management Science, 2005, 131(1)：101-106.)

[6] 孙晓东,焦玥,胡劲松. 基于灰色关联度和理想解法的决策研究[J]. 中国管理科学, 2005(4): 63-67.
(Sun X D, Jiao Y, Hu J S. Research on decision-making method based on gray correlation degree and TOPSIS[J]. Chinese J of Management Science, 2005, 13(4): 63-67.)

[7] 王砚羽,张卓,王正新. 基于灰色关联系数改进的加权TOPSIS法[J]. 华东经济管理, 2011, 21(11): 139-142.
(Wang Y Y, Zhang Z, Wang Z X. An improved weighted TOPSIS method and its application based on grey relational coefficient[J]. East China Economic Management, 2011, 21(11): 139-142.)

[8] 王正新,党耀国,裴玲玲, 等. 基于累积前景理论的多指标灰关联决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(2): 232-236.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L, et al. Multi-index grey relational decision-making based on cumulative prospect theory[J]. Control and Decision, 2010, 25(2): 232-236.)

[9] 苏博,刘鲁,杨方廷. 基于灰色关联分析的神经网络模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(9): 98-103.
(Su B, Liu L, Yang F T. Research of artificial neural network forecasting model based on grey relational analysis[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 28(9): 98-103.)

[10] 穆瑞,张家泰. 基于灰色关联分析的层次综合评价[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(10): 125-130.
(Mu R, Zhang J T. Research of hierarchy synthetic evaluation based on grey relational analysis[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 28(10): 125-130.)

[11] 张志勇,吴声. 基于白化权函数的区间灰数关联度模型[J]. 中国管理科学, 2015, 23(1): 154-160.
(Zhang Z Y, Wu S. Incidence degree model of interval grey number based on whitenization weight function[J]. Chinese J of Management Science, 2015, 23(1): 154-160.)

[12] 曾波,孟伟,王正新. 灰色预测系统建模对象拓展研究[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 55-56.
(Zeng B, Meng W, Wang Z X. A extended research on modeling object of grey forecasting system[M]. Beijing: Science Press, 2014: 55-56.)

[13] 杨保华,方志耕,周伟, 等. 基于信息还原算子的多指标区间灰数关联决策模型[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 182-186.
(Yang B H, Fang Z G, Zhou W, et al. Incidence decision model of multi-attribute interval grey number based on information reduction operator[J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 182-186.)

[14] Zhang K, Ye W, Zhao L P. The absolute degree of grey incidence for grey sequence base on standard grey interval number operation[J]. Kybernetes, 2012, 41(7/8): 934-944.

[15] Wang Z X. Correlation analysis of sequences with interval grey numbers based on the kernel and greyness degree[J]. Kybernetes, 2013, 42(2): 309-317.

[16] Xie N M, Liu S F. A novel grey relational model based on grey number sequences[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2011, 1(2): 117-128.

[17] Yang Y J, Liu S F. Reliability of operations of grey numbers using kernels[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2011, 1(1): 57-71.

[18] Zavadskas E K, Kaklauskas A, Turskis Z, et al. Multi attribute decision-making model by applying grey number[J]. Informatica, 2009, 20(2): 305-320.

[19] Mingli Hu, Linli Li. A novel dominance relation and application in interval grey number decision[J]. J of Grey System, 2014, 26(1): 91-98.

[20] Luo D, Wang X. The multi-attribute grey target decision method for attribute value within three-parameter interval grey number[J]. Applied Mathematical Modeling, 2012, 36(5): 1957-1763.

[21] 郭三党, 刘思峰, 方志耕. 基于核与灰度的区间灰数多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1042-1046.
(Guo S D, Liu S F, Fang Z G. Multi-attribute decision making model based on the kernei and the degree of greyness of the interval grey numbers[J]. Control and Decision, 2016, 31(6): 1042-1046.)

（责任编辑：曹洪武）