

# 具有分布时滞和随机测量数据丢失的离散切换系统 $H_\infty$ 滤波

李艳辉<sup>†</sup>, 柳 桐

(东北石油大学 电气信息工程学院, 黑龙江 大庆 163318)

**摘要:** 由于传感器间接失效、信号带宽限制等原因,测量数据丢失和分布时滞成为无线传感器网络中的常见现象,若不能有效地考虑这些现象对系统的影响,则无法保证系统的性能. 为此,针对一类具有分布时滞和随机测量数据丢失的离散切换系统研究  $H_\infty$  滤波问题,采用已知概率的 Bernoulli 随机序列描述测量数据丢失,构造 Lyapunov-Krasovskii 函数,基于平均驻留时间法和 LMI 技术提出保证滤波误差系统均方指数稳定且满足  $H_\infty$  性能的充分条件. 数值仿真验证了所提出方法的可行性.

**关键词:** 离散切换系统; 分布时滞; 测量数据丢失;  $H_\infty$  滤波

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## $H_\infty$ filtering for discrete switched systems with distributed delays and random measurement data missing

LI Yan-hui<sup>†</sup>, LIU Tong

(College of Electrical and Information Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China)

**Abstract:** Due to sensor indirect failure, signal bandwidth limitation and other reasons, measurement data missing and distributed delays become common phenomena in wireless sensor networks. System performance cannot be guaranteed if the effects on the system can not be considered effectively. The problem of  $H_\infty$  filtering for a class of discrete-time switched systems with distributed delays and random measurement data missing is studied. Bernoulli random sequence with known probability is used to describe the measurement data missing, and the filtering error system is then discussed by constructing a Lyapunov-Krasovskii functional. The sufficient condition for guaranteeing the mean square exponential stability and the  $H_\infty$  performance of filtering error system is given by using the average dwell time method and LMI technique. The numerical simulation results show the feasibility of the proposed method.

**Keywords:** discrete switched systems; distributed delays; measurement data missing;  $H_\infty$  filtering

## 0 引 言

分布时滞现象普遍存在于系统中,如机械传输过程和锅炉温度控制过程在不同位置上会有信号接收的时间差,如果不考虑此现象,系统性能可能会受到影响. 如何有效降低分布时滞对系统的影响,国内外学者进行了大量的研究并取得了相应的成果<sup>[1-3]</sup>. 文献[1]针对一类含有非线性无穷分布时滞的参数不确定系统,构造 Lyapunov-Krasovskii 函数,设计了  $H_\infty$  滤波器;文献[2]分析了一类具有离散时滞和分布时滞的连续不确定广义线性系统  $H_\infty$  滤波问题. 目前,对于分布时滞问题的研究主要集中在连续系统,离散系

统的相关报道较少,尤其是无线传感器网络环境下的研究鲜有报道. 由于传感器间接失效、信号带宽限制或网络拥塞等原因会导致测量数据丢失,此现象可能使系统性能变差甚至导致系统不稳定. 因此,具有分布时滞和测量数据丢失的离散系统的研究有着重要的意义.

切换系统作为混杂系统中的一类重要系统而被广泛关注,系统模型可用于描述有源电力滤波器<sup>[4]</sup>、机器人控制<sup>[5]</sup>等实际工程问题. 文献[6]基于平均驻留时间法和参数依赖性稳定的思想,设计了不确定线性切换系统的鲁棒  $H_\infty$  控制器,是切换系统鲁棒控

收稿日期: 2016-07-27; 修回日期: 2016-10-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61673102); 黑龙江省自然科学基金项目(F201403); 中国高等教育机构博士基金项目(20132322120003); 黑龙江省博士后科学研究发展基金项目(LBH-Q13177); 东北石油大学培育基金项目(XN2014112).

作者简介: 李艳辉(1970—),女,教授,博士生导师,从事鲁棒控制及滤波、智能控制等研究; 柳桐(1992—),女,硕士生,从事鲁棒控制及滤波的研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: LY\_hui@hotmail.com

制器设计的一种重要方法. 文献[7]利用多参数依赖 Lyapunov 函数方法设计了切换 LPV 系统鲁棒  $H_\infty$  滤波器; 文献[8]运用投影定理和引入附加矩阵变量的方法, 研究了一类具有分布时滞和离散时滞的线性参数变化系统鲁棒  $H_\infty$  滤波问题; 文献[9]针对切换 LPV 系统, 基于满足最小平均驻留时间的切换逻辑和 Lyapunov 稳定性理论设计了鲁棒  $L_1$  滤波器. 由以上分析可以看出, 考虑无线传感器网络环境的研究成果报道较少, 因此具有分布时滞和测量数据丢失的离散切换系统  $H_\infty$  滤波器设计问题是一个值得研究的领域.

本文针对具有分布时滞和随机测量数据丢失的离散切换系统, 将测量数据丢失用 Bernoulli 随机序列描述, 构造时滞依赖的泛函, 利用平均驻留时间法得到满足  $H_\infty$  性能指标的充分条件, 将滤波器的设计转化为一组线性矩阵不等式的求解. 本文用到的平均驻留时间法与周期切换法不同, 子系统有着各自的平均驻留时间, 很好地降低了系统的保守性. 最后通过一个数值算例验证了所提出设计方法的有效性.

### 1 问题描述

考虑如下具有分布时滞和随机测量数据丢失的离散切换系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_\sigma x(k) + A_{d\sigma} x(k-d(k)) + \\ \quad A_{h\sigma} \sum_{m=1}^{\pi} \mu_m x(k-m) + B_\sigma \omega(k), \\ y(k) = \\ \quad \theta(k)[C_\sigma x(k) + C_{d\sigma} x(k-d(k)) + D_\sigma \omega(k)], \\ z(k) = L_\sigma x(k) + L_{d\sigma} x(k-d(k)) + E_\sigma \omega(k), \\ x(s) = \phi(s), s = -d_2, -d_2 + 1, \dots, 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(k) \in R^{n_x}$  是系统状态变量,  $y(k) \in R^{n_y}$  是测量输出,  $z(k) \in R^{n_z}$  是待估计信号;  $\omega(k) \in R^{n_w}$  是扰动信号, 且  $\omega(k) \in l_2[0, \infty)$ ;  $\pi$  是分布时滞的上界, 是一个已知的常数;  $d(k)$  是系统的时变离散时滞, 满足  $0 < d_1 \leq d(k) \leq d_2$ ,  $d_1$  和  $d_2$  分别为时滞的下界和上界; 常数  $\mu_m \geq 0$ ; 用  $\sigma$  代替  $\sigma(k) : [t_0, \infty) \rightarrow \aleph = \{1, 2, \dots, p\}$  表示切换信号,  $\sigma = i$  意味着第  $i$  个子系统被激活, 如  $A_\sigma(\cdot)$  表示为  $A_i(\cdot)$ , 是已知常矩阵;  $\phi(s)$  是初始函数值.

传感器间接失效、测量数据不连续、信号带宽限制或网络拥塞等原因会导致测量数据发生丢失现象, 影响滤波器的性能, 因此本文采用满足 Bernoulli 分布的随机变量来描述对象到滤波器之间的数据随机丢

失情况.  $\theta(k) = 0$  表示发生数据丢包,  $\theta(k) = 1$  表示没有发生数据丢包, 且  $\theta(k)$  满足  $\text{Prob}\{\theta(k) = 1\} = \bar{\theta}$ , 其中  $\bar{\theta}$  代表概率. 具有测量数据丢失和时滞的系统示意如图1所示.

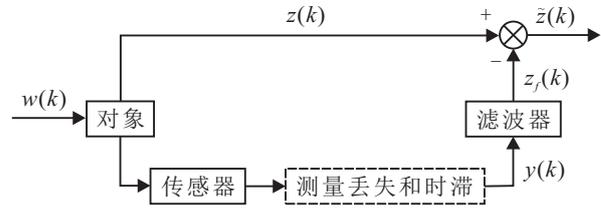


图1 发生测量丢失的系统示意图

设计如下模式依赖全阶滤波器:

$$\begin{cases} x_f(k+1) = A_{f\sigma} x_f(k) + B_{f\sigma} y(k), \\ z_f(k) = C_{f\sigma} x_f(k) + D_{f\sigma} y(k). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $x_f(k)$  是滤波器状态,  $z_f(k)$  是滤波器输出信号;  $A_{f\sigma}, B_{f\sigma}, C_{f\sigma}, D_{f\sigma}$  是待求的滤波器参数, 当  $\sigma = i$  时, 上述矩阵表示为  $A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}$ .

选取状态变量  $\tilde{x}(k) = [x^T(k) \quad x_f^T(k)]^T$ , 滤波误差输出  $\tilde{z}(k) = z(k) - z_f(k)$ . 结合式(1)和(2), 应用状态增广思想得到滤波误差系统

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}_i \tilde{x}(k) + \tilde{A}_{di} E \tilde{x}(k-d(k)) + \\ \quad \tilde{A}_{hi} E \times \sum_{m=1}^{\pi} \mu_m \tilde{x}(k-m) + \\ \quad \tilde{B}_i \omega(k) + (\theta(k) - \bar{\theta}) [\tilde{A}_{mi} \tilde{x}(k) + \\ \quad \tilde{A}_{ni} E \tilde{x}(k-d(k)) + \tilde{B}_{oi} \omega(k)], \\ \tilde{z}(k) = \tilde{C}_i \tilde{x}(k) + \tilde{C}_{di} E \tilde{x}(k-d(k)) + \\ \quad \tilde{D}_i \omega(k) - (\theta(k) - \bar{\theta}) [\tilde{C}_{mi} \tilde{x}(k) + \\ \quad \tilde{C}_{ni} E \tilde{x}(k-d(k)) + \tilde{D}_{oi} \omega(k)]. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_f(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ \bar{\theta} B_{fi} C_i & A_{fi} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{hi} = \begin{bmatrix} A_{hi} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{fi} C_i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{ni} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{fi} C_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{di} = \begin{bmatrix} A_{di} \\ \bar{\theta} B_{fi} C_{di} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ \bar{\theta} B_{fi} D_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{oi} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{fi} D_i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_i = [L_i - \bar{\theta} D_{fi} C_i \quad -C_{fi}], \quad \tilde{C}_{mi} = [D_{fi} C_i \quad 0],$$

$$\tilde{C}_{ni} = D_{fi} C_{di}, \quad \tilde{C}_{di} = L_{di} - \bar{\theta} D_{fi} C_{di},$$

$$\tilde{D}_{oi} = D_{fi} D_i, \quad \tilde{D}_i = E_i - \bar{\theta} D_{fi} D_i,$$

$$E = [I \quad 0].$$

**定义1**<sup>[6]</sup> 对于切换信号和任意  $k_0 < k_s < k_v$ , 令  $N_\sigma(k_s, k_v)$  表示切换信号  $\sigma$  在  $[k_s, k_v]$  上的切换次数. 给定  $0 < \tau^*$  和  $0 \leq N_0$ , 则

$$N_\sigma(k_s, k_v) \leq N_0 + \frac{k_v - k_s}{\tau^*}.$$

其中  $\tau^*$  和  $N_0$  分别为平均驻留时间和震荡界, 这里假设  $N_0 = 0$ .

**引理1**<sup>[10]</sup> 对于任意正实矩阵  $U_i$  以及常数  $\mu_m \geq 0 (m = 1, 2, \dots, \pi)$ , 有向量函数  $x(k-m)$  满足下面的不等式

$$\left( \sum_{m=1}^{\pi} \mu_m x(k-m) \right)^T U_i \left( \sum_{m=1}^{\pi} \mu_m x(k-m) \right) \leq \bar{\mu}_m \sum_{m=1}^{\pi} \mu_m x^T(k-m) U_i x(k-m), \quad (4)$$

其中  $\bar{\mu}_m = \sum_{m=1}^{\pi} \mu_m$ .

**引理2**<sup>[11]</sup> 对于矩阵  $A$  以及  $Q = Q^T > 0, P > 0$ , 下列不等式成立:

$$A^T P A - Q < 0,$$

当且仅当存在一个适当维数的矩阵  $\Omega$  使得

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T \Omega \\ * & P - \Omega - \Omega^T \end{bmatrix} < 0.$$

本文的目标是对于给定常数  $\gamma > 0$ , 设计如式(2)的  $H_\infty$  滤波器, 使得滤波误差系统(3)均方指数稳定且满足  $H_\infty$  性能, 即在零初始条件下, 对所有非零的  $w(k) \in l_2[0, \infty)$ , 满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^2 w^T(k) w(k).$$

## 2 $H_\infty$ 滤波器设计

选取时滞依赖的 Lyapunov-Krasovskii 泛数, 给出滤波误差系统(3)均方指数稳定且满足  $H_\infty$  性能指标的充分条件.

**定理1** 对于滤波误差系统(3), 给定  $1 > \alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$  和  $\mu \geq 1$ , 如果存在对称正定矩阵  $R_{1i}, R_{2i}, Z_{1i}, Z_{2i}, P_i, Q_i$  和矩阵  $\Omega_i, \hat{\Omega}_i, M_{1i}, M_{2i}, M_{3i}, S_{1i}, S_{2i}, S_{3i}, N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}$  使得

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 \\ * & \Xi_4 & 0 \\ * & * & \Xi_5 \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} P_i \leq \mu P_j, Q_i \leq \mu Q_j, R_{1i} \leq \mu R_{1j}, \\ R_{2i} \leq \mu R_{2j}, Z_{1i} \leq \mu Z_{1j}, Z_{2i} \leq \mu Z_{2j}, \end{cases} \quad (6)$$

并且切换信号的平均驻留时间满足

$$\tau_\alpha \geq \tau^* = -\ln \mu / \ln \alpha, \quad (7)$$

则滤波误差系统(3)是均方指数稳定的, 且具有  $H_\infty$  性能指标  $\gamma$ . 其中

$$\forall \sigma(k) = i \in \mathbb{N}, \forall \sigma(k-1) = j \in \mathbb{N},$$

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & N_{1i} - S_{1i} & 0 \\ * & r_{22} & r_{23} & N_{2i} - S_{2i} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & N_{3i} - S_{3i} & 0 \\ * & * & * & r_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & r_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & r_{66} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} M_{1i} & S_{1i} & N_{1i} & \tilde{A}_i^T \Omega_i^T \\ M_{2i} & S_{2i} & N_{2i} & E^T \tilde{A}_{di}^T \Omega_i^T \\ M_{3i} & S_{3i} & N_{3i} & \tilde{B}_i^T \Omega_i^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^T \tilde{A}_{hi}^T \Omega_i^T \end{bmatrix},$$

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} \theta \tilde{A}_{mi}^T \Omega_i^T & \tilde{C}_i^T \\ \theta E^T \tilde{A}_{ni}^T \Omega_i^T & E^T \tilde{C}_{di}^T \\ \theta \tilde{B}_{oi}^T \Omega_i^T & \tilde{D}_i^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} \theta \tilde{C}_{mi}^T & E^T (A_i^T - I) \hat{\Omega}_i^T \\ \theta E^T \tilde{C}_{ni}^T & E^T \tilde{A}_{di}^T \hat{\Omega}_i^T \\ \theta \tilde{D}_{oi}^T & \tilde{B}_i^T \hat{\Omega}_i^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E^T \tilde{A}_{hi}^T \hat{\Omega}_i^T \end{bmatrix}.$$

$$\Xi_4 = \text{diag}(-Z_{1i}, -Z_{3i}, -Z_{2i}, P_i - (\Omega_i + \Omega_i^T)),$$

$$\Xi_5 = \text{diag}(P_i - (\Omega_i + \Omega_i^T), -I, -I, Z_{4i} - (\hat{\Omega}_i + \hat{\Omega}_i^T)),$$

$$r_{11} = -\alpha P_i + E^T (\tau Q_i + R_{1i} + R_{2i} + \bar{\mu}_m U_i + M_{1i}^T + M_{1i}) E,$$

$$r_{12} = E^T M_{2i} - M_{1i} + S_{1i} - N_{1i},$$

$$r_{13} = E^T M_{3i}^T,$$

$$r_{22} = -\alpha^{d_2} Q_i - M_{2i} - M_{2i}^T + S_{2i} + S_{2i}^T - N_{2i} - N_{2i}^T,$$

$$r_{23} = S_{3i}^T - M_{3i}^T - N_{3i}^T,$$

$$r_{44} = -\alpha^{d_1} R_{1i},$$

$$r_{55} = -\alpha^{d_2} R_{2i},$$

$$r_{66} = -\alpha^\pi / \bar{\mu}_m U_i,$$

$$Z_{3i} = Z_{1i} + Z_{2i},$$

$$Z_{4i} = d_2 Z_{1i} + \tau Z_{2i},$$

$$\tau = d_2 - d_1 + 1,$$

$$\theta = \sqrt{\bar{\theta}(1 - \bar{\theta})}.$$

**证明** 选取 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V_i(k) = \sum_{\nu=1}^7 V_{\nu i}(k). \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} V_{1i}(k) &= \tilde{x}^T(k)P_i\tilde{x}(k), \\ V_{2i}(k) &= \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} \alpha^{k-l-1}x(l)^TQ_ix(l), \\ V_{3i}(k) &= \sum_{l=k-d_1}^{k-1} \alpha^{k-l-1}x(l)^TR_{1i}x(l), \\ V_{4i}(k) &= \sum_{l=k-d_2}^{k-1} \alpha^{k-l-1}x(l)^TR_{2i}x(l), \\ V_{5i}(k) &= \sum_{j=-d_2}^{-1} \sum_{l=k+j}^{k-1} \alpha^{k-l-1}\eta(l)^TZ_{1i}\eta(l), \\ V_{6i}(k) &= \sum_{j=-d_2}^{-d_1} \sum_{l=k+j}^{k-1} \alpha^{k-l-1}\eta(l)^TZ_{2i}\eta(l), \\ V_{7i}(k) &= \sum_{j=1}^{\pi} \mu \sum_{l=k+j}^{k-1} \alpha^{k-l-1}x(l)^TU_ix_l, \\ \eta(l) &= x(l+1) - x(l). \end{aligned}$$

沿系统状态求差分  $\Delta V_i(k) = V_i(k+1) - \alpha V_i(k)$ ,

可得

$$\begin{aligned} \Delta V_{1i}(k) &= \tilde{x}^T(k+1)P_i\tilde{x}(k+1) - \alpha\tilde{x}^T(k)P_i\tilde{x}(k), \\ \Delta V_{2i}(k) &\leq \tau x^T(k)Q_ix(k) - \alpha^{d_2}x^T(k-d(k))Q_ix(k-d(k)), \\ \Delta V_{3i}(k) &= x^T(k)R_{1i}x(k) - \alpha^{d_1}x^T(k-d_1)R_{1i} \times x(k-d_1), \\ \Delta V_{4i}(k) &= x^T(k)R_{2i}x(k) - \alpha^{d_2}x^T(k-d_2)R_{2i} \times x(k-d_2), \\ \Delta V_{5i}(k) &= d_2\eta(k)^TZ_{1i}\eta(k) - \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} \alpha^{k-l}\eta(l)^TZ_{1i}\eta(l) - \\ &\quad \sum_{l=k-d_2}^{k-d(k)-1} \alpha^{k-l}\eta(l)^TZ_{1i}\eta(l), \\ \Delta V_{6i}(k) &= \tau\eta(k)^TZ_{2i}\eta(k) - \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} \alpha^{k-l}\eta(l)^TZ_{2i}\eta(l) - \\ &\quad \sum_{l=k-d_2}^{k-d(k)-1} \alpha^{k-l}\eta(l)^TZ_{2i}\eta(l), \\ \Delta V_{7i}(k) &\leq \bar{\mu}_m x^T(k)U_ix(k) - \frac{\alpha^\pi}{\bar{\mu}_m} \left( \sum_{m=1}^{\pi} \mu_m \alpha^{k-l} \times \right. \\ &\quad \left. x(k-m) \right)^T U_i \left( \sum_{m=1}^{\pi} \mu_m \alpha^{k-l} x(k-m) \right). \end{aligned}$$

根据恒等式变形,可得

$$\begin{aligned} E\{\Delta V_i(k)\} + \tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k) - \gamma^2\omega^T(k)\omega(k) &= \\ E\{\Delta V_i(k)\} + \tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k) - \gamma^2\omega^T(k)\omega(k) + \\ 2\xi^T(k)M_i \left[ (k) - x(k-d(k)) - \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} \eta_l \right] + 2\xi^T(k)S_i \left[ x(k-d(k)) - \right. \\ &\quad \left. x(k-d_2) - \sum_{l=k-d_2}^{k-d(k)-1} \eta_l \right] + 2\xi^T(k)N_i \left[ x(k- \right. \\ &\quad \left. d_1) - x(k-d(k)) - \sum_{l=k-d(k)}^{k-d_1-1} \eta_l \right] \leq \\ \xi^T(k) &(\Xi_1 + M_i Z_{1i}^{-1} M_i^T + S_i Z_{3i}^{-1} S_i^T + \\ N_i Z_{2i}^{-1} N_i^T) &\xi(k) + \eta_k^T Z_{4i} \eta_k - \\ &\sum_{l=k-d(k)}^{k-1} [\xi_1^T(k)M_i + \alpha^{k-l}\eta_l^T Z_{1i}] \alpha^{l-k} \times \\ Z_{1i}^{-1} &[M_i^T \xi_1(k) + \alpha^{k-l} Z_{1i} \eta_l] - \\ &\sum_{l=k-d_2}^{k-d(k)-1} [\xi_1^T(k)S_i + \alpha^{k-l}\eta_l^T Z_{3i}] \alpha^{l-k} \times \\ Z_{3i}^{-1} &[S_i^T \xi_1(k) + \alpha^{k-l} Z_{3i} \eta_l] - \\ &\sum_{l=k-d_2}^{k-d_1} [\xi_1^T(k)N_i + \alpha^{k-l}\eta_l^T Z_{2i}] \alpha^{l-k} Z_{2i}^{-1} \times \\ &[N_i^T \xi_1(k) + \alpha^{k-l} Z_{2i} \eta_l]. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \xi(k) &= \left[ \tilde{x}^T(k) x^T(k-d(k)) \omega^T(k) x^T(k-d_1) \right. \\ &\quad \left. x^T(k-d_2) \left( \sum_{m=1}^{\pi} \mu_m x(k-m) \right)^T \right]^T, \\ \xi_1(k) &= [x(k)^T x(k-d(k))]^T. \end{aligned}$$

考虑  $-\Omega_i P_i^{-1} \Omega_i^T \leq P_i - (\Omega_i + \Omega_i^T)$ ,  $-\hat{\Omega}_i Z_{4i}^{-1} \hat{\Omega}_i^T \leq Z_{4i} - (\hat{\Omega}_i + \hat{\Omega}_i^T)$ , 利用  $\text{diag}\{I, I, I, I, I, I, I, I, -\Omega_i^{-T}, -\Omega_i^{-T}, I, I, -\Omega_i^{-T}\}$  对式(5)进行全等变换. 以及  $Z_{1i} > 0, Z_{2i} > 0$ , 恒等式变形的后3项之和是小于等于零的, 由Schur引理有

$$E\{\Delta V_i(k)\} + \tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k) - \gamma^2\omega^T(k)\omega(k) \leq 0. \quad (9)$$

由式(6)和(8)可得  $V_i(k) \leq \mu V_j(k)$ , 即  $V_{\sigma k_s}(k) \leq \mu V_{\sigma k_{s-1}}(k)$ . 如果式(5)成立, 则式(9)成立, 在  $[k_0, k]$  上迭代, 进而得

$$\begin{aligned} V_i(k+1) &\leq \alpha V_i(k) - \Gamma(l) \leq \\ \alpha^{k-k_s} \mu V_{\sigma k_{s-1}}(k_s) &- \sum_{l=k_s}^{k-1} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l) \dots \leq \end{aligned}$$

$$\alpha^{k-k_0} \mu^{N_{\sigma}(k_0,k)} V_{\sigma k_0}(k_0) - \sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{N_{\sigma}(l,k)} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l). \quad (10)$$

由定义1、式(7)和(10)可知

$$V_{\sigma k_s}(k) \leq e^{\lambda(k-k_0)} V_{\sigma k_0}(k_0) - \sum_{l=k_0}^{k-1} e^{\lambda(k-l)} \alpha^{-1} \Gamma(l).$$

其中

$$\lambda = \ln \alpha + \ln \mu / \tau^* < 0,$$

$$\Gamma(l) = \tilde{z}^T(l) \tilde{z}(l) - \gamma^2 \omega^T(l) \omega(l).$$

当  $\omega(k) = 0$  时, 有  $0 < a_{\sigma k_s}$  和  $0 < b_{\sigma k_0}$  使  $a_{\sigma k_s} \|\tilde{x}(k)\|^2 \leq V_{\sigma k_s}(k)$ ,  $V_{\sigma k_0}(k_0) \leq b_{\sigma k_0} \|\tilde{x}(k_0)\|^2$ , 则  $\|\tilde{x}(k)\| \leq \sqrt{b_{\sigma k_0}/a_{\sigma k_s}} e^{\frac{\lambda(k-k_0)}{2}} \|\tilde{x}(k_0)\|$ . 因此, 滤波误差系统(3)均方指数稳定.

零初始条件下, 由式(10)有  $\sum_{l=0}^{k-1} e^{\lambda(k-l)} \alpha^{-1} \Gamma(l) \leq 0$ , 对于任何  $\omega(k) \in l_2[0, +\infty)$  具有可加性, 那么  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} e^{\lambda(k-l)} \alpha^{-1} \Gamma(l) \leq 0$ , 从而得到  $\sum_{l=0}^{\infty} \Gamma(l) \sum_{k=l+1}^{\infty} e^{\lambda(k-l)} \alpha^{-1} = \frac{e^{\lambda} \alpha^{-1}}{1 - e^{\lambda}} \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma(l)$ , 即  $\Gamma(l) \leq 0$ . 因此推得  $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k)$ , 滤波误差系统满足  $H_{\infty}$  性能指标  $\gamma$ .  $\square$

**注1** 对于切换无时滞系统, 构造  $V_i(k) = \tilde{x}^T(k) P_i \tilde{x}(k)$  很容易满足  $\Delta V_i(k) = V_i(k+1) - \alpha V_i(k) < 0$ . 而本文研究的是切换时滞系统, 构造时滞依赖的 Lyapunov-Krasovskii 函数, 因此在式(8)中除了  $V_{1i}(k)$  的其他项都引入因子  $\alpha$ , 可以解决  $V_{\nu i}(k+1)$  和  $\alpha V_{\nu i}(k)$  ( $\nu = 2, 3, \dots, 7$ ) 没有共同项的问题. 比如  $V_{2i}(k+1) = \sum_{l=k-d(k)+1}^k \alpha^{k-l} x_l^T Q_i x_l$  和  $\alpha V_{2i}(k) = \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} \alpha^{k-l} x_l^T \times Q_i x_l$  出现了共同项, 可以直接消去.

**注2** 离散时间切换系统的切换时刻可能发生在某一个采样时刻, 也有可能在采样周期内发生多次子系统切换, 这样的快速切换会造成信息丢失, 从而导致系统的性能下降. 本文采用平均驻留时间法(ADT), 在连续两次切换的平均运行时间大于一个常数, 即平均驻留时间  $\tau_{\alpha} \geq 1$ , 此方法与其他方法相比具有更小的保守性.

**定理2** 给定标量  $1 > \alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$  和  $\mu \geq 1$ , 如果存在正定对称矩阵  $P_{1i}, P_{2i}, Q_i, R_{1i}, R_{2i}, Z_{1i}, Z_{2i}$  和矩阵  $P_{3i}, \tilde{M}_{1i}, \tilde{S}_{1i}, \tilde{N}_{1i}, M_{2i}, S_{2i}, N_{2i}, M_{3i}, S_{3i}, N_{3i}, Z_i, \tilde{M}_i, \hat{\Omega}_i, G_i, H_i, K_i$ , 使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_1 & \tilde{\Xi}_2 & \tilde{\Xi}_3 \\ * & \tilde{\Xi}_4 & 0 \\ * & * & \tilde{\Xi}_5 \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \tilde{P}_i \leq \mu \tilde{P}_j, Q_i \leq \mu Q_j, R_{1i} \leq \mu R_{1j}, \\ R_{2i} \leq \mu R_{2j}, Z_{1i} \leq \mu Z_{1j}, Z_{2i} \leq \mu Z_{2j}, \forall i, j \in \mathfrak{N}, \end{cases} \quad (12)$$

且系统的平均驻留时间满足式(7), 则滤波误差系统(3)均方指数稳定且具有  $H_{\infty}$  性能指标  $\gamma$ . 滤波器参数为

$$\begin{bmatrix} A_{fi} & B_{fi} \\ C_{fi} & D_{fi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V}_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i & H_i \\ K_i & D_{fi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (13)$$

其中

$$\tilde{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & r_{13} & \tilde{N}_{1i} & -\tilde{S}_{1i} & 0 \\ * & r_{22} & r_{23} & N_{2i} & -S_{2i} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & N_{3i} & -S_{3i} & 0 \\ * & * & * & r_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & r_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & r_{66} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{1i} & \tilde{S}_{1i} & \tilde{N}_{1i} & \tilde{r}_{111}^T \\ M_{2i} & S_{2i} & N_{2i} & \tilde{r}_{211}^T \\ M_{3i} & S_{3i} & N_{3i} & \tilde{r}_{311}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{r}_{611}^T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Xi}_3 = \begin{bmatrix} \theta \tilde{r}_{112}^T & \tilde{r}_{113}^T & \theta \tilde{r}_{114}^T & E^T (A_i^T - I) \hat{\Omega}_i^T \\ \theta \tilde{r}_{212}^T & \tilde{r}_{213}^T & \theta \tilde{r}_{214}^T & E^T \tilde{A}_{di}^T \hat{\Omega}_i^T \\ \theta \tilde{r}_{312}^T & \tilde{r}_{313}^T & \theta \tilde{r}_{314}^T & \tilde{B}_i^T \hat{\Omega}_i^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^T \tilde{A}_{hi}^T \hat{\Omega}_i^T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Xi}_4 = \text{diag}(-Z_{1i}, -Z_{3i}, -Z_{2i}, \tilde{P}_i - (\tilde{\Omega}_i + \tilde{\Omega}_i^T)),$$

$$\tilde{\Xi}_5 = \text{diag}(\tilde{\varphi}_1, -I, -I, Z_{4i} - (\hat{\Omega}_i + \hat{\Omega}_i^T)),$$

$$\tilde{r}_{11} = -\alpha \tilde{P}_i + E^T (\tau Q_i + R_{1i} + R_{2i} +$$

$$\bar{\mu}_m U_i + M_{1i}^T + M_{1i}) E,$$

$$\tilde{r}_{12} = E^T M_{2i}^T + \tilde{S}_{1i} - \tilde{M}_{1i} - \tilde{N}_{1i},$$

$$\tilde{r}_{111} = \begin{bmatrix} Z_i A_i + \theta H_i C_i & G_i \\ \theta H_i C_i & G_i \end{bmatrix}, \tilde{r}_{112} = \begin{bmatrix} H_i C_i & 0 \\ H_i C_i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{r}_{113} = [L_i - \theta D_{fi} C_i \quad -K_i], \tilde{r}_{114} = [D_{fi} C_i \quad 0],$$

$$\tilde{r}_{211} = \begin{bmatrix} Z_i A_{di} + \theta H_i C_{di} \\ \theta H_i C_{di} \end{bmatrix}, \tilde{r}_{212} = \begin{bmatrix} H_i C_{di} & 0 \\ H_i C_{di} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{r}_{213} = [L_i - \theta D_{fi} C_{di} \quad 0], \tilde{r}_{214} = [D_{fi} C_{di} \quad 0],$$

$$\tilde{r}_{311} = [Z_i B_i + \theta H_i D_i \quad \theta H_i D_i], \tilde{r}_{312} = \begin{bmatrix} H_i D_i \\ H_i D_i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{r}_{313} = [E_i - \theta D_{fi} D_i \ 0], \tilde{r}_{314} = [D_{fi} D_i \ 0],$$

$$\tilde{r}_{611} = \begin{bmatrix} Z_i A_{hi} \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{P}_i = \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{3i} \\ * & P_{2i} \end{bmatrix}, \tilde{\Omega}_i = \begin{bmatrix} Z_i & \bar{M}_i \\ 0 & \bar{M}_i \end{bmatrix}.$$

证明 假设式(11)成立, 则

$$\begin{bmatrix} Z_i + Z_i^T & \bar{M}_i \\ * & \bar{M}_i + \bar{M}_i^T \end{bmatrix} > 0,$$

存在非奇异矩阵 $\hat{V}_i$ 和 $V_i$ 满足 $\bar{M}_i = \hat{V}_i V_i^{-T} \hat{V}_i^T$ . 引入

$$F_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{V}_i V_i^{-1} \end{bmatrix}, \Omega_i = \begin{bmatrix} Z_i & \hat{V}_i \\ 0 & V_i \end{bmatrix},$$

$$H_i \triangleq \hat{V}_i B_{fi}, G_i \triangleq \hat{V}_i A_{fi} V_i^{-T} \hat{V}_i^T,$$

$$K_i \triangleq C_{fi} V_i^{-T} \hat{V}_i^T, \tilde{M}_{1i} \triangleq F_i M_{1i},$$

$$\tilde{S}_{1i} \triangleq F_i S_{1i}, \tilde{N}_{1i} \triangleq F_i N_{1i}, \tilde{P}_i \triangleq F_i P_i F_i.$$

利用  $\text{diag}(F_i, I, I, I, I, I, I, I, I, F_i, F_i, I, I, F_i)$  对式(5)进行全等变换得到式(11), 式(6)成立则式(12)成立, 那么滤波误差系统(3)均方指数稳定且具有 $H_\infty$ 性能指标 $\gamma$ . 进而由式(13)求得滤波器参数.  $\square$

注3 定理1中系统矩阵与时滞依赖Lyapunov-Krasovskii函数矩阵之间存在耦合, 定理2证明过程无法直接求得滤波器的参数矩阵, 运用引理2可以实现解耦的目的.

### 3 数值仿真

考虑具有分布时滞和随机测量数据丢失的离散切换系统(1), 相应的系统参数矩阵如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.6 & -0.3 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_{h1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0.1 \ 0.2], C_{d1} = [0.2 \ 0.3],$$

$$D_1 = 0.2, D_2 = 0.1, E_1 = 0.1,$$

$$L_1 = [0.2 \ 0.5], L_{d1} = [0.1 \ 0.2],$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$A_{h2} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = 0.2,$$

$$C_2 = [0.2 \ 0.1], C_{d2} = [0.3 \ 0.4],$$

$$L_2 = [0.1 \ 0.2], L_{d2} = [0.2 \ 0.1],$$

$$d(k) = 1 + \frac{1 + (-1)^k}{2}, \pi = 5.$$

选取 $d_1 = 1, d_2 = 4, \theta = 9.5, \bar{\mu}_m = 2^{-8}, \gamma = 1.6, \alpha = 0.96, \mu = 1.15$ . 由式(7)算得系统最小平均

驻留时间为 $\tau^* = 3.4237$ , 则取 $\tau_\alpha = 4$ . 通过定理2求得一组可行解, 进而确定滤波器参数为

$$A_{f1} = \begin{bmatrix} -0.1740 & 0.0107 \\ 0.0066 & -0.0431 \end{bmatrix}, B_{f1} = \begin{bmatrix} -2.8236 \\ -1.4895 \end{bmatrix},$$

$$C_{f1} = [-0.0170 \ -0.0511], D_1 = 1.0102,$$

$$A_{f2} = \begin{bmatrix} -0.0447 & 0.0420 \\ 0.0477 & -0.0860 \end{bmatrix}, B_{f2} = \begin{bmatrix} 1.0014 \\ 0.4305 \end{bmatrix},$$

$$C_{f2} = [0.0172 \ -0.0027], D_2 = 1.5572.$$

假设系统的初始状态为 $x(0) = [1 \ 1]^T$ , 能量有界的干扰为 $w(k) = 0.5e^{-0.1k} \cos(0.2\pi k)$ , 得到仿真结果如图2所示. 从图2可以看出, 在任意切换信号下(见图3), 所设计的滤波器能够较好地估计系统状态, 且滤波误差系统是渐近稳定的. 这表明所提出的方法是有效的.

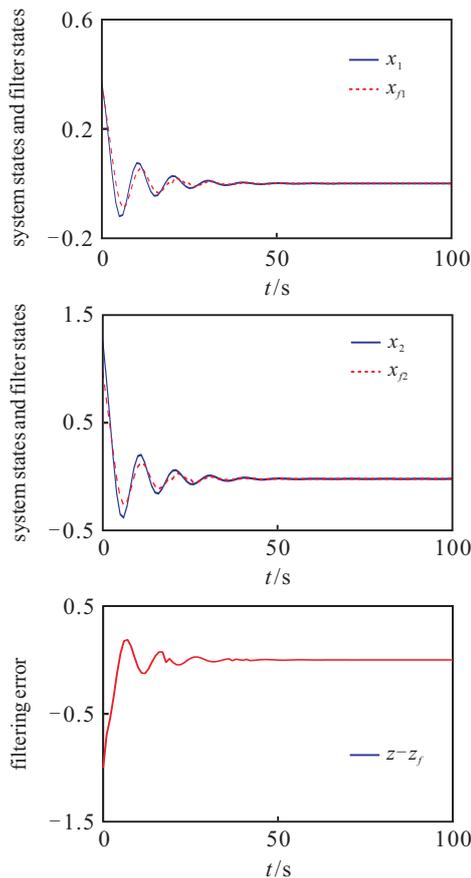


图2 系统状态及估计误差

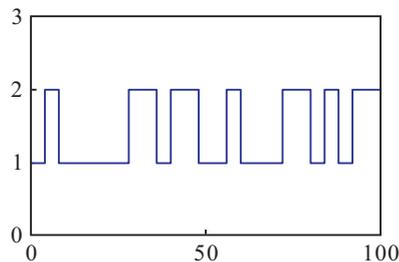


图3 切换信号

### 4 结 论

本文针对一类具有分布时滞和随机测量数据丢失的离散切换系统,利用时滞依赖泛函和平均驻留时间法给出了滤波误差系统均方指数稳定的充分条件,并设计出满足 $H_\infty$ 性能指标的滤波器.数值仿真验证了滤波器设计的有效性.本文只设计了一般形式的模式依赖滤波器,具有不同结构的模态依赖滤波器设计问题有待后续的扩展研究.

#### 参考文献(References)

[1] 马大中,王占山,冯健,等.带有无穷分布时滞的不确定系统的鲁棒 $H_\infty$ 滤波器设计[J].控制理论与应用,2010,27(2):138-142.  
(Ma D Z, Wang Z S, Feng J, et al. Robust  $H_\infty$  filter design for a class of uncertain systems with infinitely distributed time delay[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(2): 138-142.)

[2] Dong Yue, Qinglong Han. Robust  $H_\infty$  filter design of uncertain descriptor systems with discrete and distributed delays[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2004, 52(11): 3200-3212.

[3] Ligang Wu, Peng Shi, Huijun Gao. A new approach to Robust  $H_\infty$  Filtering for uncertain systems with both discrete and distributed delays[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2007, 26(2): 229-248.

[4] 张永峰,程新功,宗西举,等.基于切换系统理论的有源电力滤波器交流测电感值设计[J].电力系统保护与控制,2011,39(15):110-116.  
(Zhang Y F, Cheng X G, Zong X J, et al. The design method of AC-side inductance of active power filter based on switched system[J]. Power System Protection

and Control, 2011, 39(15): 110-116.)

[5] Lee T C, Jiang Z P. Uniform asymptotic stability of nonlinear switched systems with an application to mobile robots[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(5): 1235-1252.

[6] Lixian Zhang, El-kebir Boukas, Peng Shi, et al. A  $\mu$ -dependent approach to  $H_\infty$  control of uncertain switched linear systems with average dwell time[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2011, 32(1): 15-27.

[7] 李艳辉,黄娜,关正伟.连续切换LPV系统的 $H_\infty$ 滤波器[J].控制与决策,2013,28(3):456-460.  
(Li Y H, Huang N, Guan Z W. Robust  $H_\infty$  filtering for continuous switched LPV system[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 456-460.)

[8] 吴立刚,王常虹,高会军.一类分布式时滞LPV系统的鲁棒 $H_\infty$ 滤波[J].控制与决策,2006,21(9):1059-1064.  
(Wu L G, Wang C H, Gao H J. Robust  $H_\infty$  filtering for a class of LPV system with distributed delays[J]. Control and Decision, 2006, 21(9): 1059-1064.)

[9] Li Y H, Shi Q, Karimi H R. Robust  $L_1$  fixed-order filtering for switched LPV systems with parameter-dependent delays[J]. J of the Franklin Institute, 2015, 352(3): 761-775.

[10] Liu Y R, Wang Z D, Liu X H. Robust  $H_\infty$  filtering for discrete nonlinear stochastic systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2009, 30(2): 229-236.

[11] Geromel J C, de Cliveira M C, Bernussou J. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions[J]. SIAM J of Control and Optimization, 2002, 41(3): 700-711.

(责任编辑:齐 霖)

## 下 期 要 目

全状态约束的时滞系统神经网络输出反馈控制 ..... 司文杰, 等

参数未知航天器的姿态接管控制 ..... 黄攀峰, 等

二维分割贯序正则化超限学习机 ..... 郭 威, 等

具有双边随机时延和丢包的网路控制系统稳定性分析 ..... 刘义才, 等

基于SEAD任务特性约束的协同任务分配方法 ..... 吴蔚楠, 等

求解离散调度问题的双机制头脑风暴优化算法 ..... 吴秀丽, 等

基于特征融合与分类器在线学习的目标跟踪算法 ..... 胡秀华, 等

昂贵区间多目标优化空间数据挖掘求解策略 ..... 陈志旺, 等

基于证据马尔可夫随机场模型的图像分割 ..... 张 喆, 等

两类品种工件混流的多站点CSPS系统优化控制 ..... 唐 昊, 等