第 32 卷 第 8 期
2017 年 8 月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.32 No.8
Aug. 2017

文章编号: 1001-0920(2017)08-1493-06
DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.0769

不确定广义大系统有限时间鲁棒分散控制

沃松林†, 赵俊杰, 李 博

(江苏理工学院 电气信息工程学院，江苏 常州 213001)

摘 要: 研究不确定连续广义大系统的有限时间鲁棒分散控制问题,设计系统的有限时间鲁棒分散状态反馈控制器. 首先应用广义Lyapunov 函数法,给出不确定广义大系统有限时间鲁棒稳定的充分条件;其次,给出不确定广义大系统应用分散状态反馈控制器鲁棒镇定的充分条件和有限时间鲁棒分散控制器的设计方法;最后,通过仿真例子验证所提出方法的有效性.

关键词: 不确定广义大系统；有限时间鲁棒稳定；分散状态反馈；有限时间鲁棒镇定

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Finite-time robust decentralized control for uncertain singular large-scale systems

WO Song-lin†, *ZHAO Jun-jie*, *LI Bo*

(School of Electrical and Information Engineering，Jiangsu University of Technology，Changzhou 213001，China)

Abstract: This paper considers the problem of finite-time robust decentralized control for uncertain continuous-time singular large-scale systems(UCSLSS). The finite-time robust decentralized state feedback controller is designed. Firstly, a sufficient condition for finite-time robust stability of UCSLSS is presented via the generalized Lyapunov function approach. Then, a sufficient condition for finite-time robust decentralized stabilization via state feedback and the design approach of the finite-time robust decentralized state feedback controller are also presented. Finally, an example is provided to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: uncertain singular large-scale systems；finite-time robust stability；decentralized state feedback；finite-time robust stabilization

0 引 言

广义大系统能较好地描述许多复杂系统,如大型电力系统、化工系统、互联网系统等而备受关注[1],由于具有维数高、影响因素多和子系统之间信息交换频繁等原因而一般采用分散控制策略. 近年来,广义大系统分散控制的研究是很多学者研究的热点之一,在广义大系统的稳定性与分散控制器设计[2-3]、分散保性能控制器设计[4-5] 以及非脆弱分散控制器的设计[6] 等方面取得了一系列有意义的研究成果,这些成果都是在Lyapunov 意义下(即时间趋于无穷)展开的,通常情况下渐近稳定能够满足大多数实际工程的要求. 然而在实际工程中,系统本身有时也会存在Lyapunov 渐近稳定性,同时也具有很坏的暂态性能,甚至对一些系统的暂态性能本身要求较高,例如机器人操控系统、导弹系统、通信网络系统等系统本身工作时间有限. 因此,在这些工程中人们除了对其Lyapunov 稳定性感兴趣外,更关心系统是否满足一定的暂态性能要求(即有限时间控制问题).

近年来,随着一些先进控制技术特别是线性矩阵不等式(LMI)技术的广泛应用,有限时间控制问题引起了学者们的广泛关注,正常状态系统的有限时间稳定、有限时间有界和有限时间控制问题得到了充分研究,取得了一批好的成果[7-9]. 最近一些学者也将有限时间稳定性和控制问题推广到随机系统[10-11]、正常大系统[12-13] 和广义系统[14-18]. 目前,对广义大系统的有限时间控制与综合问题才刚刚开始,相关研究成果报道较少,仍需要引起足够的重视.

本文研究不确定连续广义大系统的有限时间鲁棒控制问题,系统状态系数矩阵和控制系数矩阵的不确定性是时不变且模有界的. 在应用广义Lyapunov

收稿日期: 2016-06-17；**修回日期:** 2016-09-14.
基金项目: 机械系统与振动国家重点实验室课题(MSV201509).
作者简介: 沃松林(1964−), 男, 教授, 博士, 从事广义系统理论、大系统分散控制理论等研究；赵俊杰(1986−), 男, 讲师, 博士, 从事随机系统理论的研究.
†通讯作者. E-mail: wosonglin@jsut.edu.cn

函数方法给出不确定广义大系统有限时间鲁棒稳定条件的基础上,采用分散状态反馈控制策略设计系统的有限时间鲁棒分散状态反馈控制器,使得闭环广义大系统正则、脉冲自由且状态有界;同时,给出了分散控制器的参数化设计方法. 作为主要结果的推论,分别给出了广义大系统有限时间稳定的充分条件和有限时间分散状态反馈控制器的设计方法.

符号说明: 如无特别声明,本文中所有矩阵均为具有适当维数的实数矩阵; 符号 I 表示适当维数的单位矩阵; 实对称矩阵 X 和 Y, 符号 $X \geqslant Y(X > Y)$ 表示矩阵 $X-Y$ 为半正定(正定)矩阵; 符号 $\mathrm{diag}(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ 表示对角线上是 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 的块对角矩阵; 符号 A^{T} 表示矩阵 A 的转置矩阵; 符号 $\mathrm{rank}\,X$ 表示矩阵 X 的秩; 符号 $((M)_{ij})$ 为 $n \times n$ 维分块矩阵(同文献[3]); 符号 $\begin{bmatrix} X & Z \\ * & Y \end{bmatrix}$ 表示对称矩阵 $\begin{bmatrix} X & Z \\ Z^{\mathrm{T}} & Y \end{bmatrix}$.

1 定义与问题描述

考虑一类由 N 个子系统组成的不确定连续广义大系统

$$\begin{cases} E_i\dot{x}_i(t) = (A_{ii} + \Delta A_{ii})x_i(t) + (B_i + \Delta B_i)u_i(t) + \\ \qquad \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} (A_{ij} + \Delta A_{ij})x_j(t), \\ x_i(0) = x_{i0},\ i = 1, 2, \cdots, N. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_i(t) \in R^{n_i}, u_i(t) \in R^{m_i}$ 分别为第 i 个子系统的状态和控制输入向量, 矩阵 E_i 可能是奇异矩阵且 $\mathrm{rank}E_i = r_i \leqslant n_i$; 矩阵 A_{ii}, A_{ij}, B_i 均为维数兼容的常数矩阵; A_{ij} 为第 j 个子系统与第 i 个子系统的关联矩阵; 矩阵 $\triangle A_{ij}$ 和 $\triangle B_i$ 分别为状态系数矩阵和控制系数输入矩阵的不确定性, 它是时不变的, 系统参数不确定性且有如下的数值界(同文献[3-4]):

$$|\triangle A_{ij}| \prec F_{ij},\ |\triangle B_i| \prec H_i,\ i, j = 1, 2, \cdots, N. \tag{2}$$

令

$$E = \mathrm{diag}(E_1, E_2, \cdots, E_N),\ A = (A_{ij}),$$
$$B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_N),\ \triangle A = (\triangle A_{ij}),$$
$$\triangle B = \mathrm{diag}(\triangle B_1, \triangle B_2, \cdots, \triangle B_N),$$
$$x(t) = \mathrm{col}(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_N(t)),$$
$$u(t) = \mathrm{col}(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_N(t)),$$
$$x_0 = \mathrm{col}(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{N0}),$$

则整个不确定广义大系统(1)可描述为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3}$$

本文的目的是设计不确定广义大系统(1)的有限时间鲁棒分散状态反馈控制器

$$u_i(t) = K_i x(t),\ i = 1, 2, \cdots, N, \tag{4}$$

使得系统(1)在分散控制器(4)作用下的闭环系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A_K + \triangle A_K)x(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5}$$

是正则、脉冲自由且有限时间鲁棒稳定的. 其中 $A_K = A + BK, \triangle A_K = \triangle A + \triangle BK$, $K = \mathrm{diag}(K_1, K_2, \cdots, K_N)$.

为此, 首先给出不确定广义大系统(1) 的有限时间鲁棒稳定和有限时间鲁棒分散控制器的定义.

定义 1 对于给定的正数 $0 < c_1 < c_2, 0 < T$ 和正定矩阵 $R_1, R_2, \cdots, R_N$, 如果满足式(2)的所有不确定性, 不确定广义大系统(1)$(B_i + \triangle B_i = 0)$ 是正则的、脉冲自由且

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^{\mathrm{T}}(0)E_i^{\mathrm{T}}R_iE_ix_i(0) < c_1 \Longrightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i^{\mathrm{T}}(t)E_i^{\mathrm{T}}R_iE_ix_i(t) < c_2,\ t \in [0, T], \tag{6}$$

则不确定广义大系统(1)$(B_i + \triangle B_i = 0)$ 称为关于 $(c_1, c_2, T, R_1, R_2, \cdots, R_N)$ 有限时间鲁棒稳定的.

定义 2 对于不确定广义大系统(1), 如果存在分散控制器(4), 使得对满足式(2)的所有不确定性, 不确定闭环广义大系统(5)是关于 $(c_1, c_2, T, R_1, R_2, \cdots, R_N)$ 有限时间鲁棒稳定的, 则称不确定广义大系统(1)是可有限时间鲁棒分散稳定化的, 而分散控制器(5)称为不确定广义大系统(1)的一个有限时间鲁棒分散控制器.

为研究不确定广义大系统的有限时间分散控制问题, 下面先介绍如下假设和准备知识.

假设 1 E_i 的奇异值分解为

$$E_i = U_i \begin{bmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_i^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

其中: $\Sigma_i = \mathrm{diag}(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \cdots, \sigma_{ir_i}), \sigma_{ij} > 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$, $j = 1, 2, \cdots, r_i$, $U_i = [U_{1i}, U_{2i}]$, $V_i = [V_{1i}, V_{2i}]$ 为正交矩阵, 满足 $E_i^{\mathrm{T}}U_{2i} = 0$, $V_{2i}^{\mathrm{T}}E_i = 0$.

引理 1[18] 对于广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = x_0, \tag{8}$$

如果存在 $\gamma \geqslant 0$ 和非奇异矩阵 P, 满足

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \geqslant 0,\ A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A - \gamma E^{\mathrm{T}}P < 0, \tag{9}$$

则广义系统(8)是正则和脉冲自由的.

引理2[3] 若$n\times m$阶矩阵$\triangle A$满足$|\triangle A|\prec F$, 则$\Omega(F)\geqslant(\triangle A)(\triangle A)^{\mathrm T}$, $\Gamma(F)\geqslant(\triangle A)^{\mathrm T}(\triangle A)$. 其中

$$\Omega(F)=\begin{cases}\|FF^{\mathrm T}\|I,\ \|FF^{\mathrm T}\|I<n\mathrm{diag}(FF^{\mathrm T});\\ n\mathrm{diag}(FF^{\mathrm T}),\ \text{else};\end{cases}$$

$$\Gamma(F)=\begin{cases}\|F^{\mathrm T}F\|I,\ \|F^{\mathrm T}F\|I<m\mathrm{diag}(FF^{\mathrm T});\\ m\mathrm{diag}(F^{\mathrm T}F),\ \text{else};\end{cases}$$

$\|\cdot\|$为最大奇异值矩阵范数.

2 主要结果

定理1 对于不确定广义大系统(1), 正数c_1,c_2, T和正定矩阵$R_1,R_2,\cdots,R_N$, 如果存在实数$\varepsilon>0$, $\alpha>0,\lambda_1>0,\lambda_2>0,\gamma\geqslant 0$, 非奇异矩阵$P_i$, 满足

$$E_i^{\mathrm T}P_i=P_i^{\mathrm T}E_i\geqslant 0, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix}\varPi_i & I & I\\ * & -\alpha I & 0\\ * & * & -F_i^{-1}\end{bmatrix}<0, \tag{11}$$

$$\lambda_1E_i^{\mathrm T}P_i<E_i^{\mathrm T}R_iE_i<\lambda_2E_i^{\mathrm T}P_i, \tag{12}$$

$$\lambda_2c_1e^{\gamma\mathrm T}<\lambda_1c_2, \tag{13}$$

则不确定广义大系统(1)($B_i+\triangle B_i=0$)是关于($c_1,c_2,T,R_1,R_2,\cdots,R_N$)有限时间鲁棒稳定的. 其中

$$\varPi_i=A_{ii}^{\mathrm T}P_i+P_i^{\mathrm T}A_{ii}-\gamma E_i^{\mathrm T}P_i+ P_i\Big[\varepsilon\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(A_{ij}A_{ij}^{\mathrm T}+\varOmega(F_{ij}))+\alpha\varOmega(F_{ii})\Big]P_i,$$

$$F_i=\frac{2(N-1)}{\varepsilon},\ i=1,2,\cdots,N.$$

证明 记$P=\mathrm{diag}(P_1,P_2,\cdots,P_N)$. 一方面, P是非奇异的, 且

$$E^{\mathrm T}P=P^{\mathrm T}E\geqslant 0. \tag{14}$$

由Schur补引理可知: 条件(11)等价于

$$\varPi_i+\frac{1}{\alpha}I+F_i<0. \tag{15}$$

由引理2和文献[5]的引理2可知

$$\begin{aligned}&[A+\triangle A]^{\mathrm T}P+P^{\mathrm T}[A+\triangle A]-\gamma E^{\mathrm T}P\leqslant\\ &\sum_{i=1}^{N}((A_{ii}^{\mathrm T}P_i+P_i^{\mathrm T}A_{ii}-\gamma E_i^{\mathrm T}P_i)_{ii})+\\ &\sum_{i=1}^{N}\Big(\Big(\varepsilon P_i^{\mathrm T}\Big[\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(A_{ij}A_{ij}^{\mathrm T}+\triangle A_{ij}\triangle A_{ij}^{\mathrm T})\Big]P_i+\\ &F_i\Big)_{ii}\Big)+\sum_{i=1}^{N}\Big(\Big(\alpha P_i^{\mathrm T}\triangle A_{ii}\triangle A_{ii}^{\mathrm T}P_i+\frac{1}{\alpha}I\Big)_{ii}\Big)\leqslant\\ &\sum_{i=1}^{N}\Big(\Big(\varPi_i+\frac{1}{\alpha}I+F_i\Big)_{ii}\Big).\end{aligned} \tag{16}$$

注意到式(15)和(16), 条件(11)蕴含有

$$[A+\triangle A]^{\mathrm T}P+P^{\mathrm T}[A+\triangle A]-\gamma E^{\mathrm T}P<0, \tag{17}$$

从而由引理1可知: 不确定广义大系统(1)($B_i+\triangle B_i=0$)是正则、脉冲自由的.

另一方面, 条件(12)等价于

$$\frac{1}{\lambda_2}E^{\mathrm T}RE<E^{\mathrm T}P<\frac{1}{\lambda_1}E^{\mathrm T}RE. \tag{18}$$

设$V(x(t))=x^{\mathrm T}(t)E^{\mathrm T}Px(t)\geqslant 0$, 则由式(17)有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm dV(x(t)}{\mathrm dt}\Big|_{(1)}=\\ &x^{\mathrm T}(t)[(A+\triangle A)^{\mathrm T}P+P^{\mathrm T}(A+\triangle A)]x(t)<\\ &\gamma V(x(t)).\end{aligned} \tag{19}$$

应用式(19), 有

$$\begin{aligned}&V(x(t)<e^{\gamma t}V(x(0))<\\ &e^{\gamma\mathrm T}x^{\mathrm T}(0)E^{\mathrm T}Px(0),\ t\in[0,T].\end{aligned} \tag{20}$$

由式(18)有

$$V(x(t))=x^{\mathrm T}(t)E^{\mathrm T}Px(t)>\frac{1}{\lambda_2}x^{\mathrm T}(t)E^{\mathrm T}REx(t). \tag{21}$$

由式(20)和(21)并注意到条件(13), 当

$$\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm T}(0)E_i^{\mathrm T}R_iE_ix_i(0)<c_1$$

时, 有

$$\begin{aligned}&x^{\mathrm T}(t)E^{\mathrm T}REx(t)<\lambda_2V(x(t)<\\ &\lambda_2e^{\gamma\mathrm T}x^{\mathrm T}(0)E^{\mathrm T}Px(0)<\\ &\frac{\lambda_2}{\lambda_1}e^{\gamma\mathrm T}x^{\mathrm T}(0)E^{\mathrm T}REx(0)<\\ &\frac{\lambda_2}{\lambda_1}e^{\gamma\mathrm T}c_1<c_2.\end{aligned} \tag{22}$$

所以在定理1条件下, 不确定广义大系统(1)($B_i+\Delta B_i=0$)是关于($c_1,c_2,T,R_1,R_2,\cdots,R_N$)有限时间鲁棒稳定的. □

注1 定理1虽然给出了不确定广义大系统(1)($B_i+\triangle B_i=0$)关于($c_1,c_2,T,R_1,R_2,\cdots,R_N$)有限时间鲁棒稳定的充分条件, 但条件(10)是关于P_i非线性的约束, 故不便于判定应用.

定理2 对于不确定广义大系统(1), 正数c_1,c_2, T和正定矩阵$R_1,R_2,\cdots,R_N$, 如果存在实数$\varepsilon>0,\alpha>0,\lambda_1>0,\lambda_2>0,\gamma\geqslant 0$, 正定矩阵$\widehat{W}_i$和矩阵$\widehat{S}_i$, 满足式(13)和

$$\begin{bmatrix}\varPhi_i & X_i & X_i\\ * & -\alpha I & 0\\ * & * & -F_i^{-1}\end{bmatrix}<0, \tag{23}$$

$$\lambda_1(\varSigma_iU_{1i}^{\mathrm T}R_iU_{1i}\varSigma_i)^{-1}<\widehat{W}_i<$$

$$\lambda_2(\Sigma_i U_{1i}^{\mathrm{T}} R_i U_{1i} \Sigma_i)^{-1}, \tag{24}$$

则不确定广义大系统(1)($B_i + \triangle B_i = 0$)是关于($c_1, c_2, T, R_1, R_2, \cdots, R_N$)有限时间鲁棒稳定的. 其中

$$\Phi_i = X_i A_{ii}^{\mathrm{T}} + A_{ii} X_i^{\mathrm{T}} - \gamma X_i E_i^{\mathrm{T}} + \alpha \Omega(F_{ii}) + \varepsilon \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (A_{ij} A_{ij}^{\mathrm{T}} + \Omega(F_{ij})),$$

$$X_i = E_i V_{1i} \widehat{W}_i V_{1i}^{\mathrm{T}} + \widehat{S}_i V_{2i}^{\mathrm{T}},$$

$$F_i = \frac{2(N-1)}{\varepsilon},\ i = 1, 2, \cdots, N. \tag{25}$$

证明 在定理2条件下, 由式(23)成立可知$\Phi_i < 0$, 从而X_i非奇异. 由于$\widehat{W}_i > 0$, 由文献[19]中引理1可知: 存在正定矩阵$W_i > 0$和矩阵S_i, 使得$U_{1i} W_i U_{1i}^{\mathrm{T}} E_i + U_{2i} S_i$是非奇异的, 满足

$$(U_{1i} W_i U_{1i}^{\mathrm{T}} E_i + U_{2i} S_i)^{-1} = E_i V_{1i} \widehat{W}_i V_{1i}^{\mathrm{T}} + \widehat{S}_i V_{2i}^{\mathrm{T}},$$

其中$\widehat{W}_i = \Sigma_i^{-1} W_i^{-1} \Sigma_i^{-1}$.

令$P_i = U_{1i} W_i U_{1i}^{\mathrm{T}} E_i + U_{2i} S_i$, 则$P_i = X_i^{-\mathrm{T}}$.

一方面, 对式(23)分别左乘diag(P_i^{T}, I, I), 右乘diag(P_i, I, I), 则式(23)等价于(11).

另一方面, 因为

$$E_i^{\mathrm{T}} P_i = P_i^{\mathrm{T}} E_i = E_i^{\mathrm{T}} U_{1i} W_i U_{1i}^{\mathrm{T}} E_i = E_i^{\mathrm{T}} U_{1i} \Sigma_i^{-1} \widehat{W}_i^{-1} \Sigma_i^{-1} U_{1i}^{\mathrm{T}} E_i \geqslant 0, \tag{26}$$

所以由式(24)和(26)可知

$$\frac{1}{\lambda_2} E_i^{\mathrm{T}} R_i E_i < E_i^{\mathrm{T}} P_i < \frac{1}{\lambda_1} E_i^{\mathrm{T}} R_i E_i. \tag{27}$$

进一步有式(12)成立, 从而由定理1可知: 在定理2条件下, 不确定广义大系统(1)($B_i + \triangle B_i = 0$)是关于($c_1, c_2, T, R_1, R_2, \cdots, R_N$)有限时间鲁棒稳定的. □

注2 定理2给出了不确定广义大系统(1)($B_i + \triangle B_i = 0$)是关于($c_1, c_2, T, R_1, R_2, \cdots, R_N$)有限时间鲁棒稳定的充分条件, 对于给定的系数$\gamma$, 条件是关于$\varepsilon, \alpha, \lambda_1, \lambda_2, \widehat{W}_i$和$\widehat{S}_i$的LMI条件, 因此便于应用.

注意到定理1和定理2的证明, 直接可以得到广义大系统有限时间稳定的条件.

推论1 对于广义大系统

$$\begin{cases} E_i \dot{x}_i(t) = A_{ii} x_i(t) + \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} x_j(t) + B_i u_i(t), \\ x_i(0) = x_{i0},\ i = 1, 2, \cdots, N, \end{cases} \tag{28}$$

正数c_1, c_2, T和正定矩阵$R_1, R_2, \cdots, R_N$, 如果存在实数$\varepsilon > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \gamma \geqslant 0$, 正定矩阵$\widehat{W}_i$和矩阵$\widehat{S}_i$满足式(13)、(24)和

$$\begin{bmatrix} \overline{\Phi}_i & X_i \\ * & -\dfrac{1}{N-1} I \end{bmatrix} < 0, \tag{29}$$

则广义大系统(28)($B_i = 0$)是关于($c_1, c_2, T, R_1, R_2, \cdots, R_N$)有限时间稳定的. 其中

$$\overline{\Phi}_i = X_i A_{ii}^{\mathrm{T}} + A_{ii} X_i^{\mathrm{T}} - \gamma X_i E_i^{\mathrm{T}} + \varepsilon \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} A_{ij}^{\mathrm{T}},$$

$$X_i = E_i V_{1i} \widehat{W}_i V_{1i}^{\mathrm{T}} + \widehat{S}_i V_{2i}^{\mathrm{T}},\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

定理3 对于不确定广义大系统(1), 正数c_1, c_2, T和正定矩阵$R_1, R_2, \cdots, R_N$, 如果存在实数$\varepsilon > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \gamma \geqslant 0$, 正定矩阵$\widehat{W}_i$和矩阵$\widehat{S}_i, Z_i$满足式(13)、(24)和

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & X_i & X_i & Z_i \Gamma^{\frac{1}{2}}(H_i) \\ * & -F_i^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -\beta I \end{bmatrix} < 0, \tag{30}$$

则不确定广义大系统(1)关于($c_1, c_2, T, R_1, R_2, \cdots, R_N$)有限时间分散稳定化, 此时分散控制律可取为

$$K_i = Z_i^{\mathrm{T}} (E_i V_{1i} \widehat{W}_i V_{1i}^{\mathrm{T}} + \widehat{S}_i V_{2i}^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}},\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

其中

$$\Psi_i = X_i A_{ii}^{\mathrm{T}} + A_{ii} X_i^{\mathrm{T}} + Z_i B_i^{\mathrm{T}} + B_i Z_i^{\mathrm{T}} - \gamma X_i E_i^{\mathrm{T}} + \beta I + \varepsilon \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (A_{ij} A_{ij}^{\mathrm{T}} + \Omega(F_{ij})) + \alpha \Omega(F_{ii}),$$

$$X_i = E_i V_{1i} \widehat{W}_i V_{1i}^{\mathrm{T}} + \widehat{S}_i V_{2i}^{\mathrm{T}},$$

$$F_i = \frac{2(N-1)}{\epsilon},\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

证明 在定理3条件下, 不失一般性, 可以假设X_i非奇异, 否则由于$\widehat{W}_i > 0$, 可以取充分小的$\theta > 0$, 使得$\overline{X}_i = E_i V_{1i} (\widehat{W}_i + \theta I) V_{1i}^{\mathrm{T}} + \widehat{S}_i V_{2i}^{\mathrm{T}}$非奇异且满足式(24)和(30). 类似于定理2的证明, 存在正定矩阵$W_i > 0$和矩阵S_i, 使得$P_i = X_i^{-\mathrm{T}} = U_{1i} W_i U_{1i}^{\mathrm{T}} E_i + U_{2i} S_i$.

显然有

$$E_i^{\mathrm{T}} P^i = P_i^{\mathrm{T}} E_i \geqslant 0. \tag{31}$$

由Schur补引理可知: 条件(30)等价于

$$\Upsilon_i \doteq \Psi_i + X_i F_i X_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha} X_i X_i^i + \frac{1}{\beta} Z_i \Gamma(H_i) Z_i^{\mathrm{T}} < 0. \tag{32}$$

令$Z_i = X_i K_i^{\mathrm{T}}$, 类似于式(16)的推导, 可以得到

$$[A_K + \triangle A_K]^{\mathrm{T}} P + P^{\mathrm{T}} [A_K + \triangle A_K] - \gamma E^{\mathrm{T}} P \leqslant \sum_{i=1}^{N} ((P_i^{\mathrm{T}} \Upsilon_i P_i)_{ii}). \tag{33}$$

注意到式(31)和(33), 条件(30)蕴含有

$$[A_K + \triangle A_K]^{\mathrm{T}} P + P^{\mathrm{T}} [A_K + \triangle A_K] - \gamma E^{\mathrm{T}} P < 0, \tag{34}$$

从而由引理1可知: 闭环不确定广义大系统(6)是正

则、脉冲自由的. 类似于定理1和定理2的证明, 容易得到: 在定理3条件下, 不确定广义大系统(1)可关于$(c_1, c_2, T, R_1, R_2, \cdots, R_N)$有限时间分散稳定化, 此时分散控制律可以取为$K_i = Z_i^{\mathrm{T}}(E_iV_{1i}\widehat{W}_iV_{1i}^{\mathrm{T}} + \widehat{S}_iV_{2i}^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}$. □

推论2 对于广义大系统(28), 有正数c_1, c_2, T和正定矩阵$R_1, R_2, \cdots, R_N$, 如果存在实数$\varepsilon > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \gamma \geqslant 0$, 正定矩阵$\widehat{W}_i$和矩阵$\widehat{S}_i, Z_i$, 满足式(13)、(24)和

$$\begin{bmatrix} \overline{\Psi}_i & X_i \\ * & -\dfrac{1}{N-1}I \end{bmatrix} < 0, \tag{35}$$

则广义大系统(28)是关于$(c_1, c_2, T, R_1, R_2, \cdots, R_N)$有限时间分散稳定化, 此时分散控制律可以取为

$$K_i = Z_i^{\mathrm{T}}(E_iV_{1i}\widehat{W}_iV_{1i}^{\mathrm{T}} + \widehat{S}_iV_{2i}^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}},\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

其中

$$\overline{\Psi}_i = X_iA_{ii}^{\mathrm{T}} + A_{ii}X_i^{\mathrm{T}} + Z_iB_i^{\mathrm{T}} + B_iZ_i^{\mathrm{T}} - \gamma X_iE_i^{\mathrm{T}} + \varepsilon\sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}},$$

$$X_i = E_iV_{1i}\widehat{W}_iV_{1i}^{\mathrm{T}} + \widehat{S}_iV_{2i}^{\mathrm{T}},\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

注3 定理3和推论2分别给出了连续不确定广义大系统和广义大系统有限时间分散镇定的充分条件. 对于给定的c_1, c_2, T和γ, 式(13)、(24)和(30)是关于$\varepsilon, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \widehat{W}_i, \widehat{S}_i$和$Z_i$的LMIs, 可以应用Matlab软件的LMI工具箱求解.

3 仿真示例

考虑如下系数的不确定广义大系统:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ F_{12} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ F_{11} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.02 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0.1 & -0.1 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_{21}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix},\ H_1 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix},$$

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.02 \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix},$$

可以应用如下算法.

Step 1: 通过对给定的E_i矩阵进行奇异值分解, 可以求得对应的$\Sigma_i, U_i = [U_{1i}, U_{2i}], V_i = [V_{1i}, V_{2i}]$.

Step 2: 对给定的c_1, c_2, T, 选定稳定指标γ, 利用Matlab软件的LMI工具箱求解问题(13)、(24)和(30).

Step 3: 如果对选定的γ值, 问题无解, 则减少γ值; 否则, 可以增加γ值, 重复Step 2求取问题合适的解.

不失一般性, 选择$c_1 = 1,\ c_2 = 4,\ T = 10,\ R_1 = I,\ R_2 = I$. 首先应用奇异值分解, 有

$$U_1 = [U_{11}, U_{21}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V_1 = [V_{11}, V_{21}] = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix},$$

$$[U_{12}, U_{22}] = \begin{bmatrix} -0.2852 & 0.7651 & -0.5774 \\ -0.5199 & -0.6295 & -0.5774 \\ -0.8052 & 0.1352 & 0.5774 \end{bmatrix},$$

$$[V_{12}, V_{22}] = \begin{bmatrix} -0.8736 & 0.2650 & 0.4082 \\ 0.0849 & 0.9089 & -0.4082 \\ -0.4792 & -0.3220 & -0.8156 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_1 = 1.4142,\ \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 2.7651 & 0 \\ 0 & 1.5344 \end{bmatrix}.$$

应用定理3, 对应的指标$\gamma = 0.1$. 此时的有限时间鲁棒分散状态反馈控制器为

$$u_1(t) = [-1.7117 \quad -0.9141]x_1(t),$$

$$u_2(t) = \begin{bmatrix} -5.2902 & 4.2020 & -7.5952 \\ 8.9194 & -12.1209 & 14.5220 \end{bmatrix} x_2(t).$$

4 结 论

本文研究了连续不确定广义大系统的有限时间控制问题, 基于广义Lyapunov函数方法得到了广义大系统有限时间鲁棒稳定的条件; 提出了不确定广义大系统鲁棒分散状态反馈镇定的条件和分散状态反馈鲁棒控制器的设计方法; 作为推论, 给出了广义大系统有限时间稳定的条件和有限时间分散状态反馈控制器设计方法.

参考文献(References)

[1] 张庆灵. 广义大系统分散控制和鲁棒控制[M]. 西安: 西北大学出版社, 1997: 1-10.
(Zhang Q L. Decentralized control and robust control for singular large-scale systems[M]. Xi'an: Northwestern

University Press, 1997: 1-10.)

[2] 滕毓发, 张庆灵, 张明学, 等. 广义大系统的分散鲁棒镇定[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2008, 29(2): 178-184.
(Teng Y F, Zhang Q L, Zhang M X, et al. Decentralized robust stabilization for large-scale descriptor systems[J]. J of Northeastern University: Natural Science, 2008, 29(2): 178-184.)

[3] 沃松林, 邹云. 参数不确定的广义大系统的分散鲁棒镇定控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(8): 931-934.
(Wo S L, Zou Y. Decentralized robust stabilization for singular large-scale systems with parameter uncertainty[J]. Control and Decision, 2004, 19(8): 931-934.)

[4] 史国栋, 沃松林, 邹云. 不确定广义大系统的保性能控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(6): 913-918.
(Shi G D, Wo S L, Zou Y. Guaranteed cost decentralized control for singular large-scale systems with parameter uncertainty[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(6): 913-918.)

[5] 沃松林, 史国栋, 邹云. 不确定广义大系统的H_∞保性能控制[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(9): 1035-1040.
(Wo S L, Shi G D, Zou Y. Decentralized robust H_∞ and cost-guaranteed control for uncertain singular large-scale systems[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(9): 1035-1040.)

[6] 沃松林, 刘锋, 邹云. 广义大系统非脆弱分散 H_∞ 控制器设计[J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 487-493.
(Wo S L, Liu F, Zou Y. Non-fragile decentralized H_∞ controller design for singular large-scale systems[J]. Control and Decision, 2012, 27(4): 487-493.)

[7] Xiang Z R, Qiao C H, Mahmoud M. Finite-time analysis and control for switched stochastic systems[J]. J of the Franklin Institute, 2013, 349(3): 915-927.

[8] Zhao G L, Wang J C. Finite time stability and L_2-gain analysis for switched linear systems with state-dependent switching[J]. J of the Franklin Institute, 2013, 350(5): 1075-1092.

[9] Zhang X F, Feng G, Sun Y H. Finite-time stabilization by state feedback control for a class of time-varying nonlinear systems[J]. Automatica, 2014, 48(3): 499-504.

[10] Cheng J, Zhu H, Zhong S M, et al. Finite-time H_∞ control for a class of Markovian jump systems with mode-dependent time-varying delays via new Lyapunov functionals[J]. ISA Transactions, 2013, 52(6): 768-774.

[11] Zhang Y Q, Shi P, Sing Kiong Nguang, et al. Observer-based finite-time fuzzy H_∞ control for discrete-time systems with stochastic jumps and time-delays[J]. Signal Processing, 2014, 97(4): 252-261.

[12] 傅勤. 基于LMI的大型互联线性系统的分散有限时间镇定[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 763-768.
(Fu Q. Decentralized finite-time stabilization of large-scale interconnected linear systems based LMI[J]. Control and Decision, 2010, 25(5): 763-768.)

[13] 傅勤. 具有干扰输入的大型互联线性系统的分散有限时间镇定[J]. 控制与决策, 2011, 26(7): 1065-1073.
(Fu Q. Decentralized finite-time stabilization of large-scale interconnected linear systems with exogenous disturbances[J]. Control and Decision, 2011, 26(7): 1065-1073.)

[14] 李翠翠, 沈艳军, 朱琳. 不确定线性奇异系统的有限时间控制[J]. 山东大学学报: 理学版, 2007, 42(12): 104-109.
(Li C C, Shen Y J, Zhu L. Finite time control of an uncertain linear singular system with a time-varying disturbance[J]. J of Shandong University: Natural Science, 2007, 42(12): 104-109.)

[15] 樊仲光, 梁家荣, 肖剑. 广义系统的有限时间滑模变结构控制[J]. 信息与控制, 2010, 39(4): 418-422.
(Fan Z G, Liang J R, Xiao J. Finite-time sliding mode variable structure control for singular systems[J]. Information and Control, 2010, 39(4): 418-422.)

[16] Zhang Y Q, Liu C X, Mu X W. Robust finite-timeH_∞ control of singular stochastic systems via static output feedback[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(9): 5629-5640.

[17] Zhang Y Q, Shi P, Sing Kiong Nguang. Observer-based finite-time H_∞ control for discrete singular stochastic systems[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 38(2): 115-121.

[18] Wo S L, Han X X. Finite-time stability analysis of discrete-time linear singular systems[J]. Advanced Materials Research, 2014, 846/847: 383-387.

[19] Zhang L Q, Huang B, Lam J. LMI synthesis of H_2 and mixed H_2/H_∞ controllers for singular systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 2003, 50(9): 615-626.

(责任编辑：孙艺红)