

执行器饱和和受限不确定系统的次序优化多步预测控制

张浪文, 谢 巍[†]

- (1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640;
2. 华南理工大学 自主系统与网络控制教育部重点实验室, 广州 510640)

摘 要: 设计一种次序优化机制, 提出一类饱和和受限不确定系统的次序优化多步预测控制方法. 将系统的输入分解成多个子集合, 在各采样周期仅对其中一个集合的输入进行优化, 待优化的输入保持上一优化值. 针对每个输入集合, 确定闭环系统的不变集条件, 将次序优化预测控制器设计问题转化成“最小-最大”优化问题, 通过求解一组线性矩阵不等式问题得到控制器. 仿真算例表明, 采用次序优化预测控制方法可以减少控制器的设计时间.

关键词: 饱和受限; 不确定系统; 次序优化; 预测控制

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Multi-step predictive control for input-saturated uncertain systems based on sequential optimization scheme

ZHANG Lang-wen, XIE Wei[†]

- (1. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;
2. Key Laboratory of Autonomous Systems and Networked Control of Ministry of Education, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: This paper presents a multi-step predictive control algorithm for input saturated systems by designing a sequential optimization scheme. The control inputs are divided into several subsets, and only one subset of inputs are optimized at each time instant. The inputs that are not optimized at the current instant remains the latest optimized one. For each input set, a set invariance condition is identified, and the multi-step predictive controller design problem is transformed into a “min-max” optimization problem. The multi-step predictive controller is obtained by solving linear matrix inequalities(LMIs). The simulation results show that the proposed multi-step predictive control algorithm has the advantage in reducing the computation time in controller design.

Keywords: actuator saturation; uncertain systems; sequential optimization; predictive control

0 引 言

预测控制由于能够有效处理多变量、约束系统, 已成为工业过程首要考虑的算法. 预测控制已经成功应用于化工过程、电力系统和灌溉系统等领域^[1]. 在每个采样时刻, 传统的预测控制基于预测的状态和输入优化一个性能指标, 求解将来若干步的控制输入, 并将当前时刻的输入施加到系统中. 每个时刻, 传统的预测控制同时优化所有的控制输入, 而仅将序列中的第 1 个控制输入施加到系统, 预测控制的滚动优化是为克服系统运行过程中的突发扰动或模型变化所带来的影响, 每个时刻都需要滚动优化重新计算控

制输入. 由于预测控制要求在线计算, 在应用于复杂过程系统时控制器优化时间变得非常关键, 可能存在优化时间大于采样周期的情况, 控制器便无法及时计算系统输入, 导致预测控制难以适用^[2].

复杂系统环境下, 模型不确定与执行器饱和和受限是不可避免的两个突出问题. 近年来, 对线性参数变化(LPV)系统的预测控制策略研究有了很大的进展^[3], 由于需要在线求解线性矩阵不等式来得到状态反馈控制律^[4], 减少求解 LMIs 优化问题的优化变量和不等式个数对降低优化时间具有重要的意义. 同时, 实际物理过程中, 由于执行器饱和的存在, 会导致

收稿日期: 2016-05-15; 修回日期: 2016-10-06.

基金项目: 中国博士后科学基金项目(2016M592488); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2017BQ098); 工业控制技术国家重点实验室开放课题(1CT170340); 广东省科技计划项目(2016B090927007); 广东省引进创新创业团队计划项目(2016YT03G125); 广州市科技项目(201707010152).

作者简介: 张浪文(1986—), 男, 助理研究员, 从事分布式预测控制理论与应用的研究; 谢巍(1974—), 男, 教授, 博士生导师, 从事线性参数变化系统的建模与控制等研究.

[†]通讯作者. E-mail: weixie@scut.edu.cn

系统的闭环性能变得很差,甚至不稳定.通常采取设计低增益控制器和估计吸引域两种方法处理饱和和受限问题^[5].后者由于保守性低而得到广泛的采用^[6].

为了处理计算复杂性问题,学者提出了分散式预测控制,即不直接考虑子系统之间的耦合关系,对每个子系统设计鲁棒分散式预测算法^[7-8].由于在控制器设计过程中不需要迭代计算,其计算时间较短.而对于强耦合系统,由于未充分考虑耦合关系,导致分散预测并不能获得较好的控制效果^[9].分布式预测控制则考虑了系统的耦合关系^[10-11],将集中系统分解成多个子系统,针对每个子系统独立地设计控制器,并设计迭代算法使控制器协调一致.而分布式迭代算法要求每个时刻对控制输入进行一次或多次协调,随着迭代次数的增加,其计算时间仍然可能会较长^[12].与传统预测控制优化机制一样,分布式预测控制也在每个时刻对所有的子系统的控制输入进行更新,使控制器设计的在线计算时间仍然较长^[13].

实际应用过程中,控制系统的工况通常不会发生剧烈的变化.通过更新所有的控制输入去适应突发工况的变化,控制器的优化时间代价比较大.因此本文研究一种次序更新分布式模型预测控制算法,即对部分集合的控制输入进行次序更新设计,仅通过部分系统输入的实时更新来适应工况变化,从而降低控制器设计过程中的计算时间,提高预测控制算法在实际应用中的可行性.本文针对执行器饱和和受限不确定系统,提出了次序优化更新机制,研究了基于次序优化的预测控制器设计方法.

1 问题描述

考虑如下执行器饱和和受限不确定系统:

$$x(k+1) = A(\lambda)x(k) + B(\lambda)\sigma(u(k)),$$

$$[A(\lambda), B(\lambda)] \in \Omega. \quad (1)$$

其中:系统矩阵 $A(\lambda), B(\lambda)$ 依赖于参数 λ 的变化; $x \in \mathbf{R}^n$ 表示系统状态; $u \in \mathbf{R}^m$ 表示系统的输入; $\Omega \in \text{Co}\{[A^{(1)}, B^{(1)}], [A^{(2)}, B^{(2)}], \dots, [A^{(L)}, B^{(L)}]\}$ 表示一个凸包集合,存在 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$ 满足

$$[A(\lambda), B(\lambda)] = \sum_{l=1}^L \lambda_l [A^{(l)}, B^{(l)}], \quad \sum_{l=1}^L \lambda_l = 1. \quad (2)$$

系统的执行器受到饱和和限制, $\sigma(\cdot) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ 表示标准的饱和函数. $\sigma(\cdot)$ 有如下定义:

$$\sigma(u(k)) = [\sigma(u_1(k)), \sigma(u_2(k)), \dots, \sigma(u_m(k))]^T, \quad (3)$$

其中 $\sigma(u_i(k)) = \text{sign}(u_i(k)) \min\{1, |u_i(k)|\}$.

给出如下两个引理,可将执行器饱和和受限问题转换成凸包来表示.

引理1^[3] 对于给定的状态反馈控制律 F , 令 $\varphi(F) = \{x \in \mathbf{R}^n : |f_i^T x| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m\}$, 其中 f_i^T 是矩阵 F 的第 i 行. 对于 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}, P > 0$ 和 $\gamma > 0$, 椭圆集 $\Omega(P, \gamma) = \{x \in \mathbf{R}^n : x^T P x \leq \gamma\}$ 包含在集合 $\varphi(F)$ 中, 当且仅当条件 $f_i^T (P/\gamma)^{-1} f_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots, m)$ 是满足的.

给定 Ξ 是一组 $m \times m$ 的对角矩阵集合, 其中对角线上的元素非 0 即 1, 则 Ξ 中有 2^m 个元素. Ξ 中的各元素表示为 $E_j, j \in 1, 2, \dots, 2^m$. 令 $E_j^- = I - E_j$, 如果 $E_j \in \Xi$, 则 E_j^- 也是 E_j 中的元素.

引理2^[5] 给定任意矩阵 $F, H \in \mathbf{R}^{m \times n}$. 假设对于 $i = 1, 2, \dots, m$, 有 $h_i^T \leq 1$, 则有 $\sigma(Fx) \in \text{Co}\{E_j Fx + E_j^- Hx : j = 1, 2, \dots, 2^m\}$, 其中 h_i^T 是矩阵 H 的第 i 行. 由此, 执行器饱和和约束条件 $\sigma(Fx)$ 可表述为 $\sigma(Fx) = \sum_{j=1}^{2^m} \eta_j (E_j Fx + E_j^- Hx)$.

在传统的预测控制中, 通常设计反馈控制律 F_k , 求解如下“最小-最大”优化问题:

$$\min_{F_k} \max_{[A(\lambda), B(\lambda)] \in \Omega} J_k;$$

s.t. 式(1) ~ (3). (4)

其中: $J_k = \sum_{l=0}^{\infty} (\|x_{k+l|k}\|_Q^2 + \|u_{k+l|k}\|_R^2)$; $Q > 0, R > 0$ 分别为状态和输入的权重矩阵.

问题(4)通常被转化成如下LMIs优化问题^[6]:

$$\min_{\gamma_k, W_k > 0, Y_k, Z_k} \gamma_k.$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} -1 & * \\ x_{k|k} & -W_k \end{bmatrix} \leq 0;$$

$$\begin{bmatrix} -1 & * \\ z_{k,v} & -W_k \end{bmatrix} \leq 0, \quad v = 1, 2, \dots, m;$$

$$\begin{bmatrix} W_k & * & * & * \\ A^{(l)} + B^{(l)}(E_j Y_k + E_j^- Z_k) & W_k & * & * \\ Q^{1/2} W_k & 0 & \gamma_k I & * \\ R^{1/2}(E_j Y_k + E_j^- Z_k) & 0 & 0 & \gamma_k I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$l = 1, 2, \dots, L, j = 1, 2, \dots, 2^m.$ (5)

在传统的预测控制算法中, 由于每个采样时刻都要优化式(5)得到所有输入 $F_k = Y_k W_k^{-1}$, 当应用于较快采样周期的复杂系统时, 控制器设计时间会变得很长. 事实上, 系统运行环境发生剧烈变化的情况较少, 并不需要每个采样周期都优化所有的输入.

2 主要结果

针对上述问题, 本文提出次序优化多步预测控制算法. 将系统的输入 $u(k)$ 分成 M 个输入子集合 $\{u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{m,k}\}$, 每个采样周期仅对其中一个输入子集 $u_{i,k} \in \mathbf{R}^{m_i}$ ($i = 1, 2, \dots, M$) 进行优化更新. 非当前优化的输入保持上一优化值. 因此, 每个输入子集合在 $M = m/m_i$ 个采样周期内仅优化更新一次.

综上, 系统的输入可重新表示为 $u(k) = [u_1^T(k), u_2^T(k), \dots, u_M^T(k)]^T$, 其中 $u_i(k) = [u_{(i-1)m_i+1}^T(k), \dots, u_{im_i}^T(k)]^T$. 在各采样周期, 只有 $u_{i,k}$ 被优化, i 通过下式决定:

$$i = (k \bmod M) + 1. \quad (6)$$

为采用次序优化策略, 对模型(1)进行改写, 得到

$$x_{k+1} = A(\lambda)x_k + B_i(\lambda)\sigma(u_{i,k}) + \sum_{j=1, j \neq i}^M B_j(\lambda)\sigma(u_{j,k}). \quad (7)$$

根据凸包的性质, 对于式(7)有

$$[A(\lambda), B_i(\lambda), B_j(k)] = \sum_{l=1}^L \lambda_l [A^{(l)}, B_i^{(l)}, B_j^{(l)}]. \quad (8)$$

为设计次序优化多步预测控制算法, 需要设计如下状态反馈控制律:

$$u_{i,k+l|k} = F_{i,k}x_{k+l|k}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

保证式(7)的闭环系统是鲁棒稳定的. 考虑多胞不确定性, 每个系统输入集合对应的反馈控制律 $F_{i,k}$ 可通过求解如下“最小-最大”优化问题:

$$\min_{F_{i,k}} \max_{[A(\lambda), B_i(\lambda), B_j(k)] \in \Omega} J_{i,k}. \quad (10)$$

其中: $J_{i,k} = \sum_{l=0}^{\infty} (\|x_{i,k+l|k}\|_Q^2 + \|u_{i,k+l|k}\|_{R_i}^2 + \|u_{j,k+l|t_j}\|_{R_j}^2)$; $Q > 0, R_i > 0, R_j > 0$ 为对称权重矩阵. t_j 表示上一优化时刻, 可通过下式得到:

$$t_j = \begin{cases} k + j - i, & i > j; \\ k + j - M - i, & j < i. \end{cases} \quad (11)$$

将控制律(9)代入模型(7), 得到

$$x_{k+l+1} = A(\lambda)x_{k+l|k} + B_i(\lambda)\sigma(F_{i,k}x_{k+l|k}) + \sum_{j=1, j \neq i}^M B_j(\lambda)\sigma(F_{j,t_j}x_{k+l|k}), \quad (12)$$

其中 $\sum_{j=1, j \neq i}^M B_j(\lambda)\sigma(F_{j,t_j}x_{k+l|k})$ 为不在当前时刻优化输入对系统的影响. 令 $\bar{F}_{i,t_j}x_{k+l|k} = \sigma(F_{i,t_j}x_{k+l|k})$,

得到系统的闭环描述

$$x_{k+l+1|k} = [\bar{A}(\lambda) + B_i(\lambda)(E_{i,j}F_{i,k} + E_{i,j}^-)]x_{k+l|k}, \quad (13)$$

其中 $\bar{A}(\lambda) = A(\lambda) + \sum_{j=1, j \neq i}^M B_j(\lambda)F_{j,t_j}$.

为给出闭环系统的稳定性条件, 选择二次函数 $V_{i,k+l|k} = x_{k+l|k}^T P_{i,k} x_{k+l|k}$, $P_{i,k} > 0$, 同时有

$$\Delta V_{i,k+l|k} = V_{i,k+l+1|k} - V_{i,k+l|k}. \quad (14)$$

下面给出闭环系统(13)的不变集条件.

引理3 假设给定状态反馈控制律 $F_{i,k}$ ($x_k = x_{k|k}$) 表示子系统在 k 时刻的测量状态, 则椭圆集 $\Omega(P_{i,k}, \Upsilon_{i,k})$ 是闭环系统(13)的不变集, 如果存在矩阵 $H_{i,k} \in \mathbf{R}^{m_i \times n}$ 满足如下条件:

$$[\tilde{A}_{i,l,k} + B_i^{(l)}\Upsilon_{i,k}]^T P_{i,k} [\tilde{A}_{i,l,k} + B_i^{(l)}\Upsilon_{i,k}] - P_{i,k} + Q + \sum_{j=1, j \neq i}^M \bar{F}_{j,t_j}^T R_j F_{j,t_j} + \Upsilon_{i,k}^T R_i \Upsilon_{i,k} \leq 0, \quad (15)$$

和 $\Omega(P_{i,k}, \gamma_{i,k}) \subset \varphi(H_{i,k})$. 其中 $i = 1, 2, \dots, L, j = 1, 2, \dots, 2^{m_i}, \tilde{A}_{i,l,k} = A^{(l)} + \sum_{j=1, j \neq i}^M B_j^{(l)}\bar{F}_{i,k}, \Upsilon_{i,k} = E_{i,j}F_{i,k} + E_{i,j}^- H_{i,k}$.

证明 将闭环系统(13)代入(14), 得到

$$\Delta V_{i,k+l|k} = x_{k+l|k}^T (\Psi_{i,k}^T P_{i,k} \Psi_{i,k} - P_{i,k}) x_{k+l|k}, \quad (16)$$

其中 $\Psi_{i,k} = A(\lambda) + \sum_{j=1, j \neq i}^M B_j(\lambda)\bar{F}_{i,k} + B_i(\lambda)\Upsilon_{i,k}$.

引入如下鲁棒稳定性条件:

$$\Delta V_{i,k+l|k} \leq -x_{k+l|k}^T Q x_{k+l|k} - u_{i,k+l|k}^T R_i u_{i,k+l|k} - \sum_{j=1, j \neq i}^M u_{j,t_j}^T R_j u_{j,t_j}. \quad (17)$$

式(17)从 $l = 0$ 到 $l = \infty$ 累加, 得到 $J_{i,k} \leq V_{i,k}$. 定义二次函数的上界 $V_{i,k} \leq \gamma_{i,k}$, 因此有 $J_{i,k} \leq \gamma_{i,k}$. 如果式(17)成立, 则不变集 $\Omega(P_{i,k}, \gamma_{i,k})$ 成为闭环系统(13)的不变集. 同时, 式(17)可写成

$$\Delta V_{i,k+l|k} \leq -x_{k+l|k}^T (\bar{Q} + \Upsilon_{i,k}^T R_i \Upsilon_{i,k}) x_{k+l|k}, \quad (18)$$

其中 $\bar{Q} = Q + \sum_{j=1, j \neq i}^M \bar{F}_{j,t_j}^T R_j \bar{F}_{j,t_j}$.

将式(16)代入(18)可得

$$x_{k+l|k}^T \left\{ \Psi_{i,k}^T P_{i,k} \Psi_{i,k} - P_{i,k} + \Upsilon_{i,k}^T R_i \Upsilon_{i,k} + Q + \sum_{j=1, j \neq i}^M \bar{F}_{j,t_j}^T R_j \bar{F}_{j,t_j} \right\} x_{k+l|k} \leq 0. \quad (19)$$

如果条件(15)满足, 鲁棒稳定性条件(19)成立,

则 $\Omega(P_{i,k}, \gamma_{i,k})$ 是系统(13)的不变集. \square

基于引理3,可以得到如下次序优化多步预测控制求解问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma_{i,k}, P_{i,k} > 0, F_{i,k}, H_{i,k}} \gamma_{i,k} \cdot \\ & \text{s.t. } x_{k|k}^T P_{i,k} x_{k|k} \leq \gamma_{i,k}; \\ & |h_{i,k,v}^T x_{k|k}| \leq 1, v = 1, 2, \dots, m_i; \\ & \text{式(15), } j = 1, 2, \dots, 2^{m_i}. \end{aligned} \quad (20)$$

由于问题(20)是无穷时域优化问题,并不能直接进行求解,下面将该问题转换成LMIs问题求解.令 $W_{i,k} = \gamma_{i,k} P_{i,k}^{-1}$, $Y_{i,k} = F_{i,k} W_{i,k}$, $Z_{i,k} = H_{i,k} W_{i,k}$, 采用Schur补引理, $x_{k|k}^T P_{i,k} x_{k|k} \leq \gamma_{i,k}$ 可改写为

$$\begin{bmatrix} \gamma_{i,k} & * \\ x_{k|k} & P_{i,k}^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (21)$$

成立,如果满足条件

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x_{k|k} & W_{i,k} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (22)$$

则条件(21)成立.对于条件 $|h_{i,k,v}^T x_{k|k}| \leq 1$, 有

$$h_{k,v}^T \left(\frac{P_{i,k}}{\gamma_{i,k}} \right)^{-1} h_{k,v} \leq 1, v = 1, 2, \dots, m_i. \quad (23)$$

利用Schur补引理,可将条件(23)转换成

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ z_{i,k,v} & W_{i,k} \end{bmatrix} \geq 0, v = 1, 2, \dots, m_i, \quad (24)$$

其中 $z_{i,k,v} = W_{i,k} h_{i,k,v}$. 对条件(15)分别左乘和右乘 $P_{i,k}^{-1}$ 得到

$$\begin{aligned} & P_{i,k}^{-1} \Phi_{i,k}^T P_{i,k} \Phi_{i,k} P_{i,k}^{-1} + P_{i,k}^{-1} \bar{Q} P_{i,k}^{-1} - \\ & P_{i,k}^{-1} + P_{i,k}^{-1} \Upsilon_{i,k}^T R_i \Upsilon_{i,k} P_{i,k}^{-1} \leq 0, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\Phi_{i,k} = \tilde{A}_{i,k} + B_i^{(l)} \Upsilon_{i,k}$. 将式(25)乘以 $\gamma_{i,k}$, 有

$$\begin{aligned} & W_{i,k} \Phi_{i,k}^T W_{i,k}^{-1} \Phi_{i,k} W_{i,k} + W_{i,k} \bar{Q} W_{i,k} - \\ & W_{i,k} + \gamma_{i,k}^{-1} W_{i,k} \Upsilon_{i,k}^T R_i \Upsilon_{i,k} W_{i,k} \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

条件(26)可通过Schur补引理写成LMIs形式为

$$\begin{bmatrix} W_{i,k} & * & * & * \\ (\tilde{A}_{i,k} + B_i^{(l)} \Upsilon_{i,k}) W_{i,k} & W_{i,k} & * & * \\ \bar{Q}_{i,k}^{1/2} W_{i,k} & 0 & \gamma_{i,k} I & * \\ R_i^{1/2} \Upsilon_{i,k} W_{i,k} & 0 & 0 & \gamma_{i,k} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (27)$$

$$l = 1, 2, \dots, L, j = 1, 2, \dots, 2^{m_i}.$$

考虑到 $Y_{i,k} = F_{i,k} W_{i,k}$, $Z_{i,k} = H_{i,k} W_{i,k}$, 条件(27)是满足的,如果如下条件成立:

$$\begin{bmatrix} W_{i,k} & * & * & * \\ \tilde{A}_{i,k} W_{i,k} + B_i^{(l)} \bar{\Upsilon}_{i,k} & W_{i,k} & * & * \\ \bar{Q}_{i,k}^{1/2} W_{i,k} & 0 & \gamma_{i,k} I & * \\ R_i^{1/2} \bar{\Upsilon}_{i,k} & 0 & 0 & \gamma_{i,k} I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$l = 1, 2, \dots, L, j = 1, 2, \dots, 2^{m_i}, \quad (28)$$

则次序优化多步预测控制设计中,状态反馈 $F_{i,k}$ 可通过 $F_{i,k} = Y_{i,k} W_{i,k}^{-1}$ 得到,其中 $\bar{\Upsilon}_{i,k} = E_{i,j} Y_{i,k} + E_{i,j}^- Z_{i,k} \cdot Y_{i,k}$ 和 $W_{i,k}$ 是如下LMIs优化问题的解:

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma_{i,k}, W_{i,k} > 0, Y_{i,k}, Z_{i,k}} \gamma_{i,k}; \\ & \text{s.t. 式(22), (24), (28)}. \end{aligned} \quad (29)$$

基于优化问题(29),可以给出如下次序优化多步预测控制器的求解过程.

算法1 在各采样周期,给定系统权重矩阵 $Q > 0$, $R_1 > 0, \dots, R_M > 0$,通过如下步骤求解控制器.

Step 1: 在初始时刻 k ,通过求解传统的预测控制得到所有的反馈控制律 $F_{\xi,k}$, $\xi = 1, 2, \dots, M$,并将第1个输入 $u_{\xi,k|k} = F_{\xi,k} x_{k|k}$ 施加到对象中.

Step 2: 令 $k = k + 1$,计算式(6)决定第 i 个待优化集合;计算式(11)得到 t_j ,以确定其他输入应保持的值.

Step 3: 求解优化问题(29),得到状态反馈控制律 $F_{i,k}$.

Step 4: 将系统输入 $u_{i,k}(u_{i,k} = F_{i,k} x_k)$, $u_{j,k}(u_{j,k} = F_{j,t_j} x_k)$, $j = 1, 2, \dots, M, j \neq i$,施加到系统.

Step 5: 在下一个采样周期,回到Step 2.

注1 在算法1中,每个采样周期只需要优化求解部分集合的系统输入,也就是说在优化问题(29)中,无论是待优化变量的维数还是LMIs条件的个数都得到减少,相应地降低了控制器求解的复杂性.

关于闭环系统的稳定性,给出如下定理.

定理1 考虑系统的饱和和受限和模型不确定性,通过算法1求得的状态反馈控制律 $F_{i,k} = Y_{i,k} W_{i,k}^{-1}$ 能够鲁棒稳定不确定系统(1).

证明 对于饱和受限不确定系统(1),假设在初始时刻存在可行解, $P_{i,k}$ 和 $P_{i+1,k+1}$ 分别是优化问题(29)在 k 和 $k + 1$ 时刻的最优解.对于 $k + 1$ 时刻, $P_{i+1,k+1}$ 是最优的,而 $P_{i,k}$ 只是一个可行解,有

$$\begin{aligned} & x_{k+1|k+1}^T P_{i+1,k+1} x_{k+1|k+1} \leq \\ & x_{k+1|k+1}^T P_{i,k} x_{k+1|k+1}. \end{aligned} \quad (30)$$

同时,对于 $[A(\lambda), B_i(\lambda), B_j(\lambda)] \in \Omega$, 总有

$$x_{k+1|k}^T P_{i,k} x_{k+1|k} - x_{k|k}^T P_{i,k} x_{k|k} < 0, x_{k|k} \neq 0. \quad (31)$$

由于测量状态 x_{k+l} 是系统状态方程(7)对应于模型不确定 $[A(\lambda), B_i(\lambda), B_j(\lambda)] \in \Omega$ 的其中一个解,有

$$x_{k+1}^T P_{i,k} x_{k+1} - x_k^T P_{i,k} x_k < 0. \quad (32)$$

因此, V_k 是一个严格递减的二次函数, 也就是说, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_k \rightarrow 0$. 由此证明了闭环系统的鲁棒稳定性. \square

3 仿真算例与实例

本节给出两个例子来说明本文方法的有效性. 首先, 给出一个二阶系统分析不变集估计; 然后, 通过一个实例分析, 说明所提出方法的动态效果.

3.1 仿真算例

考虑二阶蒸馏过程^[14], 该系统模型为

$$A^{(1)} = A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.9841 & 0 \\ 0 & 0.9841 \end{bmatrix},$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0456 & 0.0449 \\ 0.0562 & 0.0569 \end{bmatrix},$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0547 & 0.0539 \\ 0.0674 & 0.0683 \end{bmatrix}.$$

该系统包含两个输入, 仅对其中一个输入进行优化. 系统饱和和受限可描述为 $-1 \leq u_1(k), u_2(k) \leq 1$. 分别采用传统预测控制与次序优化预测控制方法对该系统的吸引域进行估计. 考虑仿真条件 $x_0 = [-1 \ 1]^T, Q = I_2, R_1 = R_2 = 10$.

图1给出了系统的不变集估计, 结果表明所提出的次序优化预测控制策略可以获得与传统集中控制基本一致范围的不变集估计, 验证了本文方法在稳定不变集估计上的有效性.

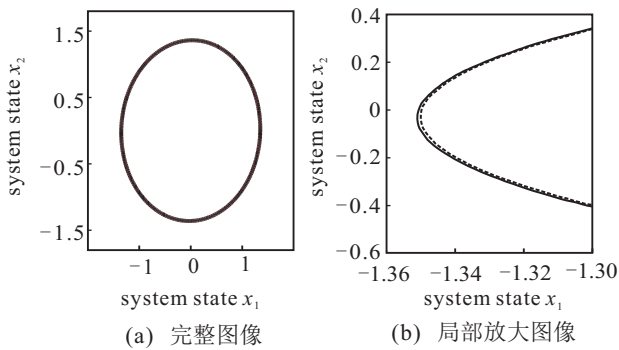


图1 不变集估计(实线为文献[6]方法, 虚线为本文方法)

3.2 仿真实例

本节通过一个实例仿真, 分析本文方法的动态性能. 考虑如图2所示的CSTR过程系统^[15-16], C_1, C_2 分别表示一级和二级反应器内反应物的浓度; T_1, T_2 分别表示一级和二级反应器内反应物的温度; F_R 表示反应物循环流速, P_s 表示蒸汽压力. 选择系统状态 $x = [C_1 \ C_2 \ T_1]^T$, 系统输入 $u = [F_R \ P_s]^T$, 系统输出 $y = [C_2 \ T_1]$. 选取离散化周期 $T_s = 1$ s 对系统进行离散化, 得到

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3832 & 0.1532 & 0 \\ 0.2298 & 0.3706 & 0 \\ 7.2880 & 1.3040 & 0.9488 \end{bmatrix},$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.0170 & 0 \\ 0.0280 & 0 \\ -0.1275 & -0.0026 \end{bmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.3478 & 0.1930 & 0 \\ 0.2506 & 0.3360 & 0 \\ 7.5340 & 1.9190 & 0.9724 \end{bmatrix},$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.0250 & 0 \\ 0.0420 & 0 \\ -0.22035 & -0.0004 \end{bmatrix}.$$

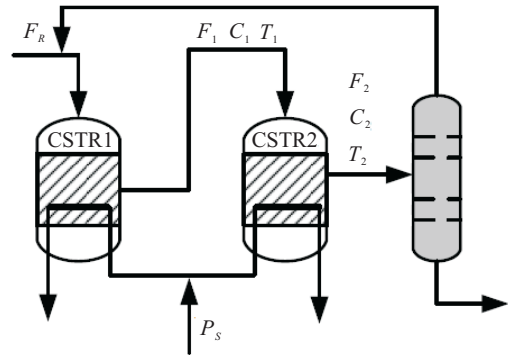


图2 CSTR过程系统示意图

控制目标是通过设计控制量 F_R, P_s 使 C_2, T_2 达到设定值. 考虑跟踪目标 $C_2 = 1, T_2 = 0$; 选择权重函数 $Q = 50I_3, R_1 = R_2 = 1$.

图3给出了系统输出 C_2 和 T_1 的动态跟踪性能, 结果表明次序优化多步预测控制可以取得与传统预测控制基本一致的控制效果. 图4给出了优化更新的系统输入 F_R 和 P_s . 就系统的优化时间而言, 图5给出了两种算法的优化时间比较, 次序优化更新预测控制较大地减小了控制律优化时间. 实例分析结果表明, 本文提出的次序优化多步预测控制方法可以有效减少控制律优化的时间, 同时保证系统的控制性能.

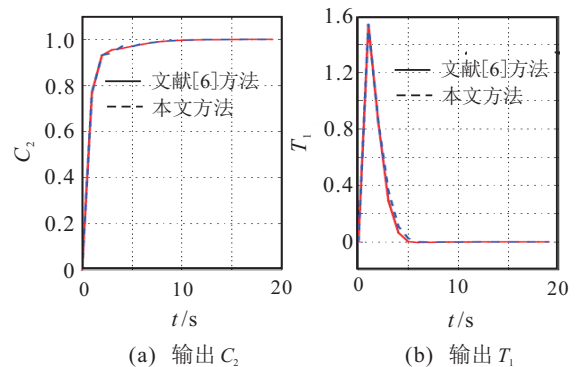


图3 系统输出

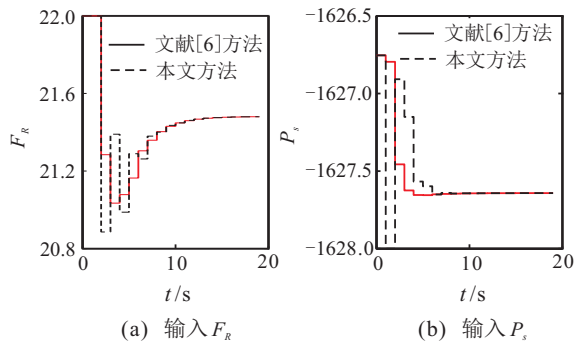


图4 系统输入

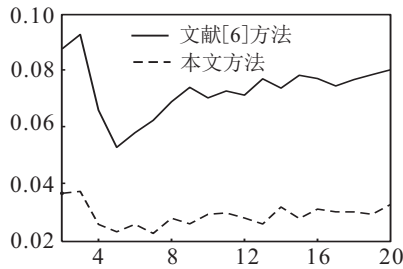


图5 单步优化时间

4 结 论

本文针对执行器饱和和受限不确定系统,提出了次序优化策略,将系统的输入分成若干个集合,每个采样周期仅优化其中一个集合的系统输入.给出了闭环系统的不变集估计,提出了基于次序优化多步预测控制器设计方法,从而确保闭环系统的稳定性和跟踪性能,为一般执行器饱和和受限不确定系统的控制提供了新的思路,并有效拓宽了预测控制的应用范围.

参考文献(References)

- [1] Bauer M, Craig I K, Miyazaki F. Economic assessment of advanced process control — A survey and framework[J]. *J of Process Control*, 2008, 18(1): 2-18.
- [2] Qin S J, Badgwell T A. A survey of industrial model predictive control technology[J]. *Control Engineering Practice*, 2003, 11(7): 733-764.
- [3] Hu T, Lin Z, Chen B M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation[J]. *Systems and Control Letters*, 2002, 45(2): 97-112.
- [4] 黄骅, 何德峰, 俞立. 基于多面体描述系统的鲁棒非线性预测控制[J]. *自动化学报*, 2012, 38(12): 1906-1912. (Huang H, He D F, Yu L. Robust nonlinear predictive control based on polytopic description systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(12): 1906-1912.)
- [5] Hu T, Lin Z, Chen B M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance[J]. *Automatica*, 2002, 38(2): 351-359.
- [6] Cao Y Y, Lin Z. Min-max MPC algorithm for LPV systems subject to input saturation[J]. *IEE Proc of Control Theory and Applications*, 2005, 152(3): 266-272.
- [7] Alessio A, Barcelli D, Bemporad A. Decentralized model predictive control of dynamically coupled linear systems[J]. *J of Process Control*, 2011, 21(5): 705-714.
- [8] 刘安东, 张荣超, 俞立, 等. 基于扩张状态观测器的分散模型预测控制[J]. *控制与决策*, 2016, 31(6): 1093-1098. (Liu A D, Zhang R C, Yu L, et al. Extended state observer-based decentralized model predictive control[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(6): 1093-1098.)
- [9] 刘苏, 冯毅萍, 荣冈. 分散MPC经济性能评估[J]. *自动化学报*, 2013, 39(11): 1778-1786. (Liu S, Feng Y P, Rong G. Economic performance assessment of decentralized model predictive control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(11): 1778-1786.)
- [10] Zhang L, Wang J, Li C. Distributed model predictive control for polytopic uncertain systems subject to actuator saturation[J]. *J of Process Control*, 2013, 23(8): 1075-1089.
- [11] Zhang Y, Li S Y. Networked model predictive control based on neighborhood optimization for serially connected largescale processes[J]. *J of Process Control*, 2007, 17(1): 37-51.
- [12] Zheng Y, Li S, Li N. Distributed model predictive control over network information exchange for large-scale systems[J]. *Control Engineering Practice*, 2011, 19(7): 757-769.
- [13] 李纹, 穆文英, 崔宝同. 切换非线性系统的分布式模型预测控制[J]. *控制与决策*, 2014, 29(4): 599-604. (Li W, Mu W Y, Cui B T. Distributed model predictive control of switched nonlinear systems[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(4): 599-604.)
- [14] Skogestad S, Morari M, Doyle J C. Robust control of ill-conditioned plants: High-purity distillation[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(12): 1092-1105.
- [15] Al-Gherwi W, Budman H, Elkamel A. Selection of control structure for distributed model predictive control in the presence of model errors[J]. *J of Process Control*, 2010, 20(3): 270-284.
- [16] Samyudia Y, Lee P L, Cameron I T. A methodology for multi-unit control design[J]. *Chemical Engineering Science*, 1994, 49(23): 3871-3882.

(责任编辑: 孙艺红)