

# 输出时滞双率采样系统的鲁棒迭代学习控制

陶洪峰<sup>†</sup>, 刘艳, 杨慧中

(江南大学 教育部轻工过程先进控制重点实验室, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对一类带有输出时滞的单输入单输出双率采样系统, 提出一种鲁棒迭代学习控制算法. 首先, 利用提升技术将带有输出时滞的双率采样系统转化为无时滞形式的慢速率采样的状态空间模型, 并基于二维(2D)系统理论, 将迭代学习控制过程转化为等价 2D 模型; 然后利用线性矩阵不等式(LMI)技术, 给出确保系统稳定的充分条件和鲁棒控制器设计方法; 最后, 通过 3 层液位贮槽系统的液位控制仿真验证所提出方法的可行性和有效性.

**关键词:** 输出时滞; 双率采样; 鲁棒迭代学习控制; 提升技术; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Robust iterative learning control for a dual-rate sampling system with output delay

TAO Hong-feng<sup>†</sup>, LIU Yan, YANG Hui-zhong

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** For a class of single input single output dual-rate sampling system with output delay, this paper presents a robust iterative learning control algorithm. The dual-rate sampling system with output delay is transformed into state-space model in slow sampling rate without time-delay in form by using the lifting technology, and based on the two dimensional (2D) system theory, the iterative learning control process is turned into an equivalent two dimensional models. Then, the sufficient conditions for the stability of system and the design method of robust controller are given in terms of linear matrix inequalities(LMI) technique. Finally, the liquid level control simulations of three tank systems demonstrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** output delay; dual-rate sampling; robust iterative learning control; lifting technology; linear matrix inequality

## 0 引言

迭代学习控制(ILC)<sup>[1]</sup>主要思想是利用过程的重复性, 根据以前的信息来修正当前控制信号, 从而达到系统控制性能沿周期方向不断改善的目标<sup>[2]</sup>. 迭代学习控制不需要精确地知道系统模型的参数和结构, 因而应用广泛, 已经成为最主要的智能控制方法之一<sup>[3-4]</sup>.

在实际控制系统中, 由于设备的物理性质、系统变量的测量和信号的传递等因素, 时滞现象普遍存在. 时滞的存在往往使系统的性能指标下降, 甚至造成系统的不稳定, 因此, 对时滞系统的研究已经引起人们的广泛关注. 对此类问题的研究具有较强的理论和实践意义, 而且也是一个比较活跃的研究领域. 文

献[5]针对一类具有不确定状态时滞的连续系统提出了一种采样迭代学习控制算法; 文献[6]针对时变不确定性间歇过程的状态时滞问题, 设计鲁棒闭环迭代学习控制器, 在线优化时间和批次方向上的鲁棒跟踪性能; 针对执行器故障状态时滞间歇过程, 文献[7]设计了迭代学习容错控制器, 优化了动态系统的控制性能.

目前, 迭代学习控制方法都是针对单速率采样系统, 但在离散采样操作控制系统中, 由于过程生产现场检测仪表等硬件设备的限制, 即使温度、压力、流量等常规可测变量可以采用 DCS 设备进行数据采集, 但由于被控对象不同信号的变化速率可能相差较大, 采用相同的采样周期并不现实, 而且系统设备型号和

收稿日期: 2016-07-04; 修回日期: 2016-10-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273070, 61203092); 江苏省产学研前瞻性联合研究项目(BY2015019-21); 高等学校学科创新引智计划项目(B12018); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(JUSRP51733B).

作者简介: 陶洪峰(1979-), 男, 副教授, 从事故障检测、容错控制等研究; 刘艳(1992-), 女, 硕士生, 从事迭代学习控制理论及应用的研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: taohongfeng@hotmail.com

生产厂家的不同也会造成采样率不一致. 因此, 为了保证控制质量, 可以对系统不同的信号采用不同的采样周期进行采样, 即多采样率控制策略. 目前多采样率控制系统的研究主要集中在控制策略<sup>[8]</sup>和系统辨识方面<sup>[9]</sup>, 输出时滞系统的多率采样迭代学习控制方法尚未有文献进行讨论.

本文针对单输入单输出形式的双率采样输出时滞系统, 通过提升技术将其转化为无时滞形式的慢速率单采样系统. 根据2D系统理论, 构造2D Roesser模型, 设计相应的鲁棒迭代学习控制器, 以LMI的形式给出系统单调收敛的充分条件. 最后, 以3层贮槽系统的液位控制仿真验证了所提出方法的有效性.

### 1 问题描述

在本文中, 符号\*代表对称位置上元素的转置. 定义

$$V_{\Omega}(\xi) \triangleq \xi^T \Omega \xi.$$

其中:  $\xi$  为向量,  $\Omega$  为适维对称矩阵. 对于任意正整数  $N_1, N_2$ , 有

$$\|\theta(nT, k)\|_{2e} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} \|\theta(nT, k)\|^2} < \infty,$$

则称  $\theta(nT, k) \in l_{2e}$ .

#### 1.1 系统形式

考虑如图1所示的单输入单输出连续过程  $P_c$ ,  $H_{T_1}$  为零阶保持器, 将以周期  $T_1 = ph$  进行离散采样后的输入信号保持为连续信号  $u(t, k)$ ;  $S_{T_2}$  为采样器, 对连续过程  $P_c$  的输出信号  $y(t, k)$  以周期  $T_2 = qh$  进行离散采样;  $h > 0$  为基本采样周期,  $p$  和  $q$  为互质的正整数, 其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t, k) = A_c x(t, k) + B_c u(t, k), \\ y(t, k) = Cx(t - \tau, k) + v(t, k). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $t$  为时间,  $k$  为迭代次数,  $u(t, k) \in R^1$  为控制输入, 假设状态向量  $x(t, k) \in R^n$  和输出  $y(t, k) \in R^1$  采样可测,  $\tau$  为时间延迟,  $v(t, k) \in R^1$  为输出端外部有界扰动,  $A_c, B_c, C$  为适当维数的系统矩阵. 不失一般性, 假设每个批次的初始状态相同, 满足  $x(0, k) = x_{0,k}$ .

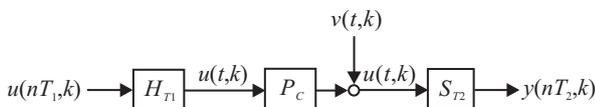


图1 双率采样系统

对于零阶保持器, 当  $nT_1 < t < (n+1)T_1$  时, 有

$$u(t, k) = u(nT_1, k). \quad (2)$$

因此, 对于上述双率采样系统, 可测的输入输出为  $\{u(nT_1, k), y(nT_2, k) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ , 即  $\{u(nT_1 + ih, k), y(nT_2 + jh, k), i = 1, 2, \dots, p-1, j = 1, 2, \dots, q-1\}$  是未知的. 将式(1)描述的状态方程离散化得到如下模型:

$$\begin{cases} x(nh + h, k) = A_h x(nh, k) + B_h u(nh, k), \\ y(nh, k) = Cx(nh - dh, k) + v(nh, k). \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $A_h = e^{A_c h}$ ,  $B_h = \int_0^h e^{A_c t} dt B_c$ ,  $d = \lceil \frac{\tau}{h} \rceil$ .

**定理1** 对于系统(3),  $T := pqh$  为帧周期, 它是整个系统的循环周期;  $m := pq - d$  且  $pq > d$ , 进而双率系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} x(nT + T, k) = Ax(nT, k) + \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=1}^p A_h^{pq-jp-i} B_h u(nT + jT_1, k), \\ x(nT + T - dh, k) = \sum_{j=m+1}^{pq} A_h^{pq+m-j} B_h u(nT + (j-1)h - T, k) + \sum_{j=1}^m A_h^{m-j} B_h u(nT + (j-1)h, k) + Ax(nT - dh, k), \\ y(nT, k) = Cx(nT - dh, k) + v(nT, k), \end{cases} \quad (4)$$

其中  $A = A_h^{pq}$ .

**证明** 用  $npq$  代替式(3)中的  $n$ <sup>[10]</sup>, 可得

$$\begin{cases} x(nT + h, k) = A_h x(nT, k) + B_h u(nT, k), \\ y(nT, k) = Cx(nT - dh, k) + v(nT, k). \end{cases} \quad (5)$$

由提升技术可知

$$\begin{aligned} x(nT, k) &= A_h^d x(nT - dh, k) + \sum_{j=pq-d+1}^{pq} A_h^{pq-j} B_h u(nT + (j-1)h - T, k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x(nT + T, k) &= A_h^{pq} x(nT, k) + \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=1}^p A_h^{pq-jp-i} B_h u(nT + jT_1 + (i-1)h, k). \end{aligned} \quad (7)$$

根据式(2), 进而可得

$$\begin{aligned} x(nT + T, k) &= Ax(nT, k) + \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=1}^p A_h^{pq-jp-i} B_h u(nT + jT_1, k), \end{aligned} \quad (8)$$

$$x(nT + T - dh, k) = A_h^{pq-d} x(nT, k) + \sum_{j=1}^{pq-d} A_h^{pq-d-j} B_h u(nT + (j-1)h, k). \quad (9)$$

将式(6)代入(9), 可得

$$x(nT + T - dh, k) = Ax(nT - dh, k) + \sum_{j=m+1}^{pq} A_h^{pq+m-j} B_h u(nT + (j-1)h - T, k) + \sum_{j=1}^m A_h^{m-j} B_h u(nT + (j-1)h, k). \quad (10)$$

由式(7)和(10)可知, 定理1成立.  $\square$

**注1** 本文的证明理论上只需基于  $pq > d$  这一条件, 即系统时滞存在于系统的采样帧周期内, 该条件在多率过程中通常都可以满足. 另外, 需指出的是, 若  $pq \gg d$ , 则时滞状态信息可以在系统控制的一个完整帧周期内获取, 此时控制器可以获得更多的信息量, 提升控制效果.

对于模型(4), 定义  $2n$  维扩展状态向量和  $(pq + d)$  维扩展输入向量

$$\begin{cases} X(nT, k) = \begin{bmatrix} x(nT - dh, k) \\ x(nT, k) \end{bmatrix}, \\ U_z(nT, k) = \begin{bmatrix} u(nT - dh, k) \\ u(nT - dh + h, k) \\ \vdots \\ u(nT + (pq-1)h, k) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (11)$$

因为  $T = pqh$ , 且  $p, q$  是互质正整数, 所以可将带有输出时滞的双率采样系统转化为无时滞形式的慢速率采样的提升模型<sup>[10]</sup>, 即

$$\begin{cases} X(nT + T, k) = A_z X(nT, k) + B_z U_z(nT, k), \\ y(nT, k) = C_z X(nT, k) + v(nT, k). \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$A_z = \begin{bmatrix} A & 0 \\ * & A \end{bmatrix}, B_z = \begin{bmatrix} B & 0 \\ * & B \end{bmatrix}, C_z = [C \ 0], \\ B = [A_h^{pq-1} B_h \ A_h^{pq-2} B_h \ \cdots \ A_h B_h \ B_h].$$

### 1.2 二维提升模型

对于提升系统(12), 引入迭代学习控制律

$$U_z(nT, k) = U_z(nT, k-1) + r(nT, k). \quad (13)$$

其中:  $U_z(nT, 0)$  为迭代控制初值,  $r(nT, k)$  为采样周期为  $T$  的ILC更新律. 本文迭代学习控制的设计目标

是确定更新律  $r(nT, k)$ , 使得系统输出  $y(nT, k)$  跟踪期望轨迹  $y_r(nT)$ . 定义系统跟踪误差

$$e(nT, k) = y_r(nT) - y(nT, k). \quad (14)$$

对于任意变量  $f$  (如  $X, y$  等), 引入下列符号:

$$\Delta f(nT, k) = f(nT, k) - f(nT, k-1). \quad (15)$$

由式(12)、(13)和(14)可得

$$\Delta X((n+1)T, k) = A_z \Delta X(nT, k) + B_z r(nT, k), \quad (16)$$

$$e((n+1)T, k) = e((n+1)T, k-1) - \Delta v((n+1)T, k) - C_z A_z \Delta X(nT, k) - C_z B_z r(nT, k). \quad (17)$$

接下来根据式(16)和(17)设计如下控制律:

$$r(nT, k) = K_1 \Delta X(nT, k) + K_2 e((n+1)T, k-1). \quad (18)$$

其中  $K_1$  和  $K_2$  为适当维数的增益矩阵. 令

$$x^h(nT, k) = \Delta X(nT, k), \\ x^v(nT, k) = e((n+1)T, k-1), \\ \theta(nT, k) = \Delta v((n+1)T, k),$$

可以得到以下2D闭环系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x^h((n+1)T, k) \\ x^v(nT, k+1) \end{bmatrix} = \\ H \begin{bmatrix} x^h(nT, k) \\ x^v(nT, k) \end{bmatrix} + F\theta(nT, k), \\ z(nT, k) = G \begin{bmatrix} x^h(nT, k) \\ x^v(nT, k) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$F = [0 \ -I]^T, G = [0 \ I], \\ H = \begin{bmatrix} A_z + B_z K_1 & B_z K_2 \\ -C_z A_z - C_z B_z K_1 & I - C_z B_z K_2 \end{bmatrix}.$$

## 2 迭代学习控制器设计

**引理1**<sup>[11]</sup> 假设  $W, L$  和  $V$  为给定适维矩阵, 且  $W$  和  $V$  为正定矩阵, 则  $L^T V L - W < 0$  等价于

$$\begin{bmatrix} -W & L^T \\ L & -V^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

或者

$$\begin{bmatrix} -V^{-1} & L \\ L^T & -W \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

**定理2** 当  $\theta(t, k) = 0$  时, 如果存在对称正定矩阵  $M_1$  和  $M_2$ , 以及适维矩阵  $L_1$  和  $L_2$ , 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -M_1 & * & * & * \\ 0 & -M_2 & * & * \\ \bar{\kappa} & B_z L_2 & -M_1 & * \\ -C_z \bar{\kappa} & M_2 - C_z B_z L_2 & 0 & -M_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

则闭环2D系统(19)在迭代学习控制律(13)作用下稳定,此时迭代学习控制器更新律(18)的增益矩阵为

$$K_1 = L_1 M_1^{-1}, K_2 = L_2 M_2^{-1},$$

其中  $\bar{\kappa} = A_z M_1 + B_z L_1$ .

**证明** 首先构造李雅普诺夫泛函

$$V(nT, k) = V_h(nT, k) + V_v(nT, k), \quad (23)$$

其中

$$V_h(nT, k) = x^h(nT, k)^T P_1 x^h(nT, k),$$

$$V_v(nT, k) = x^v(nT, k)^T P_2 x^v(nT, k),$$

则

$$\begin{aligned} \Delta V(nT, k) = & \\ \Delta V_h(nT, k) + \Delta V_v(nT, k) = & \\ V_h((n+1)T, k) - V_h(nT, k) + & \\ V_v(nT, k+1) - V_v(nT, k) = & \\ \begin{bmatrix} x^h(nT, k) \\ x^v(nT, k) \end{bmatrix}^T (H^T P H - P) \begin{bmatrix} x^h(nT, k) \\ x^v(nT, k) \end{bmatrix}. & \end{aligned} \quad (24)$$

若使2D闭环系统(19)稳定,则存在  $P > 0$ ,使得

$$H^T P H - P < 0. \quad (25)$$

运用引理1的结论,同时令  $M_1 = P_1^{-1}$ ,  $M_2 = P_2^{-1}$ ,  $M = P^{-1}$ ,即可得

$$\begin{bmatrix} -P & H^T \\ H & -M \end{bmatrix} < 0. \quad (26)$$

在不等式(26)的左边矩阵前后乘以  $\text{diag}\{M, I\}$ ,即可证定理2成立.  $\square$

**注2** 结合式(11)并根据定理1可以看出,迭代学习控制器  $U_z(nT, k)$  虽然是依据慢速率模型(19)得到的,但是其在快速率采样时刻  $nT + h, \dots, nT + (pq - 1)h$  依然进行控制更新. 若在该快速率采样时刻控制不更新,则采用单一慢速率迭代学习控制器依然可保证系统(19)的稳定性,但是这样会影响系统的动态性能.

**定义1**<sup>[21]</sup> 如果系统(19)满足:1)当  $\theta(t, k) = 0$  时,系统鲁棒稳定;2)在零输入和零边界条件下,对任意的非零外部扰动  $\theta \in l_{2e}$ ,若系统输出满足

$$\|z\|_{2e} < \gamma \|\theta\|_{2e}, \quad (27)$$

则该系统鲁棒渐近稳定,  $\gamma > 0$  为其  $H_\infty$  性能指标,且  $\gamma$  取值越小,表明系统抑制干扰的性能越好.

**定理3** 当  $\theta(t, k) \neq 0$  时,对于任意标量  $\gamma >$

0,如果存在正定对称矩阵  $M_1, M_2$ ,以及适维矩阵  $L_1, L_2$ ,使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & * \\ \theta_2 & \theta_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (28)$$

则闭环系统在迭代学习控制器(13)的作用下稳定,且具有  $H_\infty$  性能指标  $\gamma$ ,此时更新律(18)的增益矩阵为  $K_1 = L_1 M_1^{-1}, K_2 = L_2 M_2^{-1}$ . 其中

$$\begin{aligned} \theta_1 = & \begin{bmatrix} -M_1 & * & * \\ 0 & -M_2 & * \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}, \\ \theta_2 = & \begin{bmatrix} A_z M_1 + B_z L_1 & B_z L_2 & 0 \\ -C_z(A_z M_1 + B_z L_1) & M_2 - C_z B_z L_2 & -I \\ 0 & M_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**证明** 假设存在对称正定矩阵  $P_1, P_2 > 0$ ,且  $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}$  使得

$$\Phi = [H \ F]^T P [H \ F] - \begin{bmatrix} P - \gamma^{-1} G^T G & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (29)$$

则由引理1可知

$$\begin{bmatrix} -P & 0 & H^T & G^T \\ 0 & -\gamma I & F^T & 0 \\ H & F & -P^{-1} & 0 \\ G & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (30)$$

令  $M_1 = P_1^{-1}$ ,  $M_2 = P_2^{-1}$ ,  $M = P^{-1}$ ,并将式(30)的左边矩阵前后都乘以  $\text{diag}\{M, I, I, I\}$ ,可证得式(28)成立.

下面证明系统的鲁棒  $H_\infty$  性能指标. 定义

$$\begin{aligned} J(nT, k) = \Delta V(nT, k) + \gamma^{-1} \|z(nT, k)\|^2 - \\ \gamma \|\theta(nT, k)\|^2, \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta V(nT, k) = \\ V_P \begin{bmatrix} x^h((n+1)T, k) \\ x^v(nT, k+1) \end{bmatrix} - V_P \begin{bmatrix} x^h(nT, k) \\ x^v(nT, k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

由式(19)可得

$$J(nT, k) = V_\Phi \begin{bmatrix} x^h(nT, k) \\ x^v(nT, k) \\ \theta(nT, k) \end{bmatrix} < 0. \quad (33)$$

当所有界条件为零时,对于任意整数  $N_1, N_2 > 0$ ,有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \Delta V(nT, k) = \\ \sum_{k=1}^{N_2} x^h((N_1+1)T, k)^T P_1 x^h((N_1+1)T, k) + \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{N_1} x^v(nT, N_2 + 1)^T P_2 x^v(nT, N_2 + 1) \geq 0. \quad (34)$$

因此,有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} (\gamma^{-1} \|z(nT, k)\|^2 - \gamma \|\theta(nT, k)\|^2) \leq \\ & \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} (\Delta V(nT, k) + \gamma^{-1} \|z(nT, k)\|^2 - \\ & \gamma \|\theta(nT, k)\|^2) = \\ & \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} J(nT, k) < 0, \end{aligned} \quad (35)$$

即  $\|z\|_{2e} < \gamma \|\theta\|_{2e}$ , 则在迭代学习控制律(18)作用下, 2D系统的鲁棒  $H_\infty$  性能指标为  $\gamma$ .  $\square$

### 3 仿真结果

本文以图2所示3层液位贮槽双率采样系统为研究对象<sup>[10]</sup>, 直流电机泵从底部给水箱抽出水并注入顶部贮槽, 重力作用下水流入每个贮槽, 每个贮槽下面有一个阀门, 可以通过调节阀门来控制每个贮槽中水的流出速率, 对贮槽水流的输出信号加入放大元件进行信号放大. 每个槽的控制点到末槽的距离不同, 且水流到每个槽末端传感器需要的时间不同, 所以存在输出时滞. 同时考虑到水箱大小不同问题, 不同贮槽中水的流出速率具有差异, 因此采用多速率采样对该连续系统进行采样和控制.

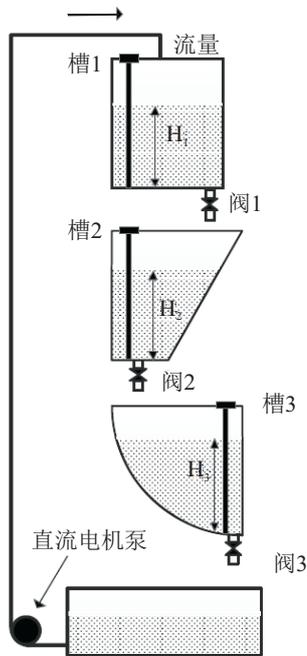


图2 3层液位贮槽系统原理

对于此贮槽系统, 输入采样周期  $T_1 = h$ , 输出采样周期  $T_2 = 5h$ , 则整个系统的采样周期  $T = 5h$ ,  $p = 1$ ,  $q = 5$ . 不失一般性, 令基本采样周期  $h = 1$ , 时滞系

数  $d = 1$ ,  $v(nT, k)$  表示未知扰动, 系统状态的初始值  $x(0, k) = [0 \ 0]^T$ , 初始输入  $u(0, k) = 0$ , 则式(3)形式的状态空间方程为<sup>[10]</sup>

$$\begin{cases} x(nh + h, k) = Ax(nh, k) + Bu(nh, k), \\ y(nT, k) = Cx(nT - dh, k) + v(nT, k). \end{cases} \quad (36)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.9922 & 0 \\ 0 & 0.3698 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1116 \\ -0.06244 \end{bmatrix},$$

$$C = [0.49944 \ 0.33256].$$

根据本文算法, 系统模型(12)中的系统矩阵分别为

$$\begin{aligned} A_z &= \begin{bmatrix} 0.9616 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.006916 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9616 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.006916 \end{bmatrix}, \\ B_z &= \begin{bmatrix} 0.1082 & 0.1090 & 0.1099 \\ -0.001168 & -0.003159 & -0.008542 \\ 0 & 0.1082 & 0.1090 \\ 0 & -0.001168 & -0.003159 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \leftarrow \begin{bmatrix} 0.1107 & 0.1116 & 0 \\ -0.0231 & -0.06244 & 0 \\ 0.1099 & 0.1107 & 0.1116 \\ -0.008542 & -0.0231 & -0.06244 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$C_z = [0.49944 \ 0.33256 \ 0 \ 0].$$

特别地, 当  $u(nT - h) = u(nT - T)$ ,  $u(nT) = u(nT + h) = u(nT + 2h) = u(nT + 3h) = u(nT + 4h)$  时, 模型(12)变成采样周期为  $T$  的单率系统, 即

$$\begin{cases} X(nT + T, k) = A_s X(nT, k) + B_s U_z(nT, k), \\ y(nT, k) = C_s X(nT, k) + v(nT, k). \end{cases} \quad (37)$$

其中

$$A_s = A_z, \quad C_s = C_z,$$

$$B_s =$$

$$\begin{bmatrix} A_h^4 B_h & A_h^3 B_h + A_h^2 B_h + A_h B_h + B_h \\ 0 & A_h^4 B_h + A_h^3 B_h + A_h^2 B_h + A_h B_h + B_h \end{bmatrix}.$$

假设系统输出期望设定值为

$$y_r(nT) = \begin{cases} 0.001nT, & 0 \leq n < 100; \\ 0.5, & 100 \leq n < 200; \\ 0.0003nT + 0.2, & 200 \leq n < 300; \\ 0.65, & 300 \leq n \leq 400. \end{cases} \quad (38)$$

同时,为评价系统的跟踪性能,引入均方根误差

$$H(k) = \sqrt{\frac{1}{400} \sum_{n=1}^{400} e^2(nT, k)}, \quad (39)$$

可见  $H(k)$  越小,第  $k$  批次的跟踪效果越好.

**情形1** 批次重复扰动.

此情形中,扰动  $v(nh, k) = 0.05 \sin(0.2n)$ , 因此,  $\Delta v((n+1)T, k) = 0, \theta(nT, k) = 0$ . 针对单率采样系统  $\{A_s, B_s, C_s\}$ , 采用 LMI 工具箱求解定理 2 中的式(22)可得增益矩阵为

$$\begin{cases} K_1 = \begin{bmatrix} -8.9121 & -0.0165 & 6.5399 & -0.0084 \\ 0.0033 & 0.0022 & -1.6465 & 0.0021 \end{bmatrix}, \\ K_2 = \begin{bmatrix} 3.9885 \\ -0.0782 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (40)$$

针对双率采样系统  $\{A_z, B_z, C_z\}$ , 同样可得到增益矩阵为

$$\begin{cases} K_1 = \begin{bmatrix} -8.9637 & -0.0430 & 9.0223 & 0.1159 \\ -4.7437 & -0.0293 & -10.5081 & -0.0472 \\ 10.7760 & -0.0077 & -2.9298 & -0.0491 \\ -7.7784 & -0.0583 & 5.8480 & -0.0401 \\ 1.8111 & 0.1357 & -1.3998 & 0.0218 \\ -0.0624 & -0.0413 & 0.0626 & 0.1116 \end{bmatrix}, \\ K_2 = \begin{bmatrix} 4.9474 \\ 8.0677 \\ -9.2659 \\ 4.6435 \\ -4.8671 \\ 1.4832 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (41)$$

若将式(40)和(41)代入控制律(18), 可知由式(40)得到的控制器仅在慢速率采样时刻  $nT$  更新; 由式(41)得到的控制器在每个采样时刻  $nT, nT+h, \dots, nT+4h$  依然进行控制更新, 从而满足系统(36)中控制器的快更新率的要求.

仿真结果如图3所示. 图3给出了单率采样控制和双率采样控制的均方根误差曲线, 通过提升技术, 双率采样控制不仅扩充了系统控制输入变量和状态向量, 而且没有产生信息损失, 同时利用之前时刻的控制信息, 增加了双率采样系统的等效输入个数, 迭代控制器获取的信息量更多. 因此, 与单速率控制相比, 双率采样控制作用下, 系统跟踪的收敛时间更短.

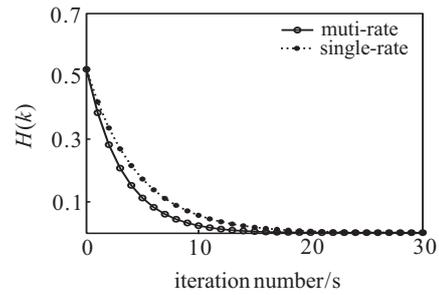


图3 情形1时的均方根误差轨迹

**情形2** 批次非重复扰动.

该情形中, 扰动  $v(nh, k) = 0.01 \sin(0.1k)$  具有非重复性,  $\Delta v((n+1)T, k) \neq 0, \theta(nT, k) \neq 0$ . 针对单率采样系统  $\{A_s, B_s, C_s\}$ , 采用 LMI 工具箱求解定理 3 中的式(28)可得  $\gamma = 7.2279$ , 增益矩阵为

$$\begin{cases} K_1 = \begin{bmatrix} -8.9337 & -0.0318 & 6.2250 & -0.0092 \\ 0.0036 & 0.0024 & -1.6426 & 0.0021 \end{bmatrix}, \\ K_2 = \begin{bmatrix} 9.1493 \\ -0.1775 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (42)$$

针对双率采样系统  $\{A_z, B_z, C_z\}$ , 可求得  $\gamma = 8.6484$ , 增益矩阵为

$$\begin{cases} K_1 = \begin{bmatrix} -8.9518 & -0.0430 & 9.0214 & 0.1159 \\ 0.5177 & -0.1630 & -3.0553 & -0.0534 \\ -0.2223 & 0.0432 & -5.7490 & -0.0472 \\ -0.6364 & 0.0715 & -1.4041 & -0.0333 \\ 0.4071 & 0.0875 & 1.2918 & 0.0193 \\ -0.0620 & -0.0413 & 0.0622 & 0.1116 \end{bmatrix}, \\ K_2 = \begin{bmatrix} 10.1467 \\ 8.4343 \\ -7.5891 \\ 6.0648 \\ -9.8621 \\ 3.0450 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (43)$$

仿真结果如图4所示. 可以看出, 在非重复扰动

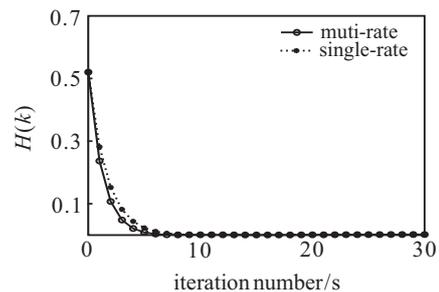


图4 情形2时的均方根误差轨迹

情况下,与单率控制相比,同样双率采样迭代学习控制系统的输出响应和跟踪性能效果更好。

### 4 结 论

本文针对输出时滞双率采样系统,提出了一种闭环鲁棒迭代学习控制方法. 首先,利用提升技术将带有输出时滞的双率采样系统转化为无时滞形式的慢速率采样模型,同时将单输入系统提升为多输入系统,扩充了系统控制输入变量和状态向量,增加了迭代控制器获取的信息量,并基于二维系统理论,将其转化为等价2D Roesser模型;然后利用LMI技术,分析了系统稳定和具有鲁棒 $H_\infty$ 控制性能的充分条件;最后,以3层贮槽系统的液位控制仿真验证了所提出方法的可行性和有效性。

### 参考文献(References)

[1] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning[J]. J of Robot Systems, 1984, 1(1): 123-140.

[2] 师佳, 江青茵, 曹志凯, 等. 基于2维性能参考模型的2维模型预测迭代学习控制策略[J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 565-573.  
(Shi J, Jiang Q Y, Cao Z K, et al. Two-dimensional model predictive iterative learning control scheme based on a two-dimensional performance model[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(5): 565-573.)

[3] Li X D, Chow Tommy W S, Ho John K L, et al. Iterative learning control with initial rectifying action for nonlinear continuous systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2009, 3(1): 49-54.

[4] Xu J X. A survey on iterative learning control nonlinear

systems[J]. Int J of Control, 2011, 84(7): 1275-1294.

[5] 方忠, 陈彭年, 韩正之. 时滞系统采样迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2001,16(6): 869-872.  
(Fang Z, Chen P N, Han Z Z. Sampled-data iterative learning control for delayed systems[J]. Control and Decision, 2001, 16(6): 869-872.)

[6] Liu T, Gao F R. Robust two dimensional iterative learning control for batch process with state delay and time-varying uncertainties[J]. Chemical Engineering Science, 2010, 65(23): 6134-6144.

[7] Wang L M, Mo S Y, Zhou D H, et al. Robust delay dependent iterative learning fault-tolerant control for batch processes with state delay and actuator failures[J]. J of Process Control, 2012, 22(7): 1273-1286.

[8] Tippett M J. Multi-rate dissipativity based control of process networks[J]. J of Process Control, 2014, 24(10): 1579-1595.

[9] Han L L, Ding F. Identification for multi-input systems using the multi-innovation identification theory[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(9): 1438-1449.

[10] Chen L, Han L, Huang B. Parameter estimation for a dual-rate system with time delay[J]. ISA Transactions, 2014, 53(5): 1368-1376.

[11] Du C, Xie L, Zhang C, et al.  $H_\infty$  control and robust stabilization of two-dimensional systems in Roesser models[J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 37(2): 205-211.

[12] Shi J, Gao F, Wu T J. Integrated design and structure analysis of robust iterative learning control system based on a two-dimensional model[J]. Industrial and Engineering Chemistry Research, 2005, 44(21): 8095-8105.

(责任编辑: 孙艺红)

## 下 期 要 目

一种求解多目标优化问题的进化算法混合框架 ..... 田红军, 等

基于奇异点邻域结构的三维人脸识别方法 ..... 袁 姮, 等

协调探索和开发能力的改进灰狼优化算法 ..... 龙 文, 等

基于萤火虫优化粒子滤波的新型机动目标跟踪算法 ..... 田梦楚, 等

基于 $K$ 近邻证据融合故障诊断方法 ..... 侯平智, 等

融合均匀变异与高斯变异的蝙蝠优化算法 ..... 李 煜, 等

基于干扰补偿的拦截弹制导控制一体化设计 ..... 卢晓东, 等

交会对接模拟系统姿态位置耦合有限时间控制 ..... 黄 成, 等

基于概率无向图模型的近邻传播聚类算法 ..... 覃 华, 等

多层级设施选址-路径规划问题建模及算法 ..... 黄凯明, 等