第 32 卷 第 10 期
2017 年 10 月

控 制 与 决 策
*Control and Decision*

Vol.32 No.10
Oct. 2017

文章编号: 1001-0920(2017)10-1844-05 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.0998

# 基于核和灰度的区间灰数型灰色聚类模型

党耀国, 冯 宇†, 丁 松, 魏 龙

(南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 211106)

**摘 要:** 对传统灰色聚类模型进行延拓,考虑了观测值和白化权函数转折点为区间灰数的情形. 通过“核”和灰度来表征区间灰数,以“灰度不减公理”作为理论依据,给出区间灰数型白化权函数的表达式,并将聚类过程中区间灰数运算转化为实数运算,进而建立灰色定权聚类模型. 最后将该模型应用于南京市江宁区高新技术企业核心竞争力的聚类评估中,说明了所提出方法的有效性和实用性.

**关键词:** 灰色聚类；区间灰数；白化权函数；核及灰度

**中图分类号:** N945.1 **文献标志码:** A

# Grey clustering model for interval grey numbers based on kernel and degree of greyness

*DANG Yao-guo, FENG Yu†, DING Song, WEI Long*

(College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 211106, China)

**Abstract:** The traditional grey clustering model based on the real numbers is extended to the condition in which the observation values and the turning points of the whitenization weight function are the interval grey numbers. By representing the interval grey number based on “kernel” and degree of greyness, and using the “unreduced axiom of degree of greyness” as the theory basis, the expression of whitenization weight function with interval grey number is given, and the interval grey number operation is transformed into real number operation, then the grey fixed weight clustering model is established. Finally, the interval grey clustering model is used to evaluate the core competencies of high tech enterprises in Jiangning District of Nanjing. The result shows that the model is effective and reasonable.

**Keywords:** grey clustering；interval grey number；whitenization weight function；kernel and grey degree

## 0 引 言

作为灰色系统理论的重要组成部分,灰色聚类在处理“小数据、贫信息”聚类问题中具有独特的优势. 其中,灰色白化权函数聚类是依据灰数的白化权函数来获取观测对象的聚类系数,进而将其归划为相应类别的聚类方法,具有很强的实用性[1]. 目前,关于灰色白化权函数聚类理论方面的研究主要集中在白化权函数的构造、指标权重的确定等方面. 刘思峰等[2-3] 首先提出基于端点的三角白化权函数灰色评估模型,但考虑到模型存在多重交叉现象且不满足规范性,而提出了基于中心点的三角白化权函数评估模型,对白化权函数的灰类交叉特性、聚类系数、端点选取和指标取值范围的左右延拓等方面进行改进,丰富和完善了灰色白化权函数聚类理论;肖新平等[4] 运用灰色关联度和最优化理论,改进了经典白化权函数,建立了灰色最优聚类的新模型;徐卫国等[5] 提出了基于指数型白化权函数的灰色聚类改进模型,有效地避免了零权重现象的出现,并将改进模型应用到对系统进行质量等级综合评价中;董一哲等[6] 利用信息差异程度来确定聚类系数的指标权重,构建了基于离差最大化的灰色变权聚类模型,提高了聚类分析的客观性;王正新等[7] 考虑到不同指标在区分对象所属类别的作用不同,定义了白化权函数的分类区分度,并融合样本信息和专家经验确定指标权重;吴凤平等[8] 以三角模糊数表示分级指标的判断信息,利用模糊可能度求得各指标的权重,进而利用白化权函数对突发事件进行灰色聚类;钱丽丽等[9] 借鉴信息熵的思想,以区间灰数本身的信息为依据,通过计算灰熵得到

**收稿日期:** 2016-08-04；**修回日期:** 2017-01-16.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目 (71071077, 71371098)；中央高校基本科研业务费专项资金项目 (NC2012001, NR2013033)；江苏高校哲学社会科学重点研究基地重大项目 (2012JDXM005)；江苏省社会科学基金重点项目 (16GLA001).

**作者简介:** 党耀国 (1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济等研究；冯宇 (1993−), 男, 硕士生,从事灰色系统理论与其应用的研究.

†通讯作者. E-mail: 2570806613@qq.com

聚类指标权重,提高了聚类系数矩阵的区分度. 随着灰色聚类模型的不断优化,其在实际中的应用也愈加广泛; Yuan 等[10] 定义了灰类核来阐明不同灰类之间的差距,并用其对江苏省科技实力进行评价,取得了良好的效果; Li 等[11] 运用结构评价逻辑改进了灰色聚类模型,并对中国航空工业的风险管理进行评估,从而给大型复杂的工程项目的安全评价提供了新思路; Ewa[12] 将灰色聚类模型应用到家族企业的接班人能力分析中,对他们能力进行分类,并给出接班人的胜任力模型.

值得注意的是,当前对灰色白化权函数聚类的研究主要集中在实数域上. 但是在现实生活中,由于环境的复杂性和不确定性,常常无法获取具体数值作为聚类模型中的观测值. 此外,基于分段线性函数构建的白化权函数,其转折点的具体数值将直接影响聚类系数,当信息缺乏时,将转折点视为区间灰数更具合理性. 所以,对区间灰数的聚类研究更利于人们作出合理准确的评估. 张荣等[13] 从理论上探讨了白化权函数转折点选择问题,给出灰色聚类评估方法的延拓方案,但缺乏具体计算公式; 周伟杰等[14] 构建了区间灰数集上的积分均值函数,将实数域上单一观测值的白化权函数拓展到区间灰数情形,提高了聚类模型的实用性,但是白化权函数转折点仍限于实数域内; 王俊杰等[15] 在考虑到观测值为区间灰数的前提下,构建了转折点为区间灰数的灰色定权聚类模型,拓宽了模型的应用范围,但白化权函数的表达式较为复杂,增加了实际应用中的难度. 可见,区间灰数聚类模型尽管十分重要,但是由于区间灰数运算体系尚不完善,模型的构建难度较大. 刘思峰等[16] 提出了“核”和灰度的概念,并据此构建了区间灰数运算公理和运算法则. 受此启发,本文利用“核”和灰度来表征区间灰数,以“灰度不减公理”作为理论依据,构建观测值和白化权函数转折点为区间灰数情形的灰色聚类模型,既符合灰色系统的内涵,又简化了计算过程和聚类结果. 最后将该模型应用于南京市江宁区高新技术企业核心竞争力的聚类评估中,验证了该方法的有效性和实用性.

## 1　基本概念

**定义 1**[16] 设区间灰数 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}](\underline{a} < \bar{a})$,在缺乏灰数 $\otimes$ 取值信息分布的情况下:

1) 若 $\otimes$ 为连续灰数,则称 $\hat{\otimes} = \dfrac{1}{2}(\underline{a} + \bar{a})$ 为灰数 $\otimes$ 的核;

2) 若 $\otimes$ 为离散灰数, $a_i \in [\underline{a}, \bar{a}](i = 1, 2, \cdots, n)$ 为灰数 $\otimes$ 的所有可能取值,则称 $\hat{\otimes} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 为灰数 $\otimes$ 的核.

**定义 2**[16] 设灰数 $\otimes$ 产生的背景或论域为 $\Omega$, $\mu(\otimes)$ 为灰数 $\otimes$ 取数域的测度,则称

$$g^{\circ}(\otimes) = \mu(\otimes)/\mu(\Omega)$$

为灰数 $\otimes$ 的灰度.

在实数域上给出的灰数,通常以灰区间长度作为灰数的测度,显然,白数的灰度为0.

**定义 3**[16] 设区间灰数 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}](\underline{a} < \bar{a})$, $\hat{\otimes}$ 为灰数 $\otimes$ 的核, $g^{\circ}$ 为灰数 $\otimes$ 的灰度,称 $\hat{\otimes}_{(g^{\circ})}$ 为区间灰数 $\otimes$ 的简化形式. 在已知论域的情况下,区间灰数的简化形式 $\hat{\otimes}_{(g^{\circ})}$ 与区间灰数 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$ 本身实现一一对应.

**定理 1**[16](灰度不减公理)　两个灰度不同的灰数进行和、差、积、商运算时,运算结果的灰度不小于灰度较大灰数的灰度.

根据公理1,为了简化区间灰数聚类模型的构建,通常将运算结果的灰度取为灰度较大的区间灰数的灰度.

**定义 4**[16] 设有 $n$ 个聚类对象, $m$ 个聚类指标, $s$ 个不同灰类,根据灰数的白化权函数将第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个对象归入第 $k(k \in \{1, 2, \cdots, s\})$ 个灰类的过程,称为灰色白化权函数聚类. 其中: $j$ 指标 $k$ 子类的白化权函数记为 $f_j{}^k(\cdot)$,若白化权函数的转折点为区间灰数,则称其为 $j$ 指标 $k$ 子类的区间灰数型白化权函数,记为 $f^k_{j\otimes}(\cdot)$.

## 2　区间灰数型白化权函数构造

**定义 5**　设 $f^k_{j\otimes}(\cdot)$ 为 $j$ 指标 $k$ 子类的区间灰数型白化权函数,函数图象如图1所示, $\otimes^k_j(1), \otimes^k_j(2), \otimes^k_j(3), \otimes^k_j(4)$ 为区间灰数型白化权函数 $f^k_{j\otimes}(\cdot)$ 的转折点,其中 $\otimes^k_j(l) \in [\otimes^k_j(l)^-, \otimes^k_j(l)^+]$, $l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

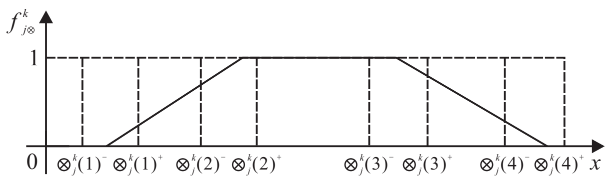


**图 1**　区间灰数型典型白化权函数

1) 若4个转折点均存在,则称 $f^k_{j\otimes}(\cdot)$ 为区间灰数型典型白化权函数,记为 $f^k_{j\otimes}[\otimes^k_j(1), \otimes^k_j(2), \otimes^k_j(3), \otimes^k_j(4)]$;

2) 若 $\otimes^k_j(1)$ 和 $\otimes^k_j(2)$ 不存在,则称 $f^k_{j\otimes}(\cdot)$ 为区间灰数型下限测度白化权函数,记为 $f^k_{j\otimes}[-, -, \otimes^k_j(3), \otimes^k_j(4)]$;

3) 若 $\otimes^k_j(2)$ 和 $\otimes^k_j(3)$ 重合,则称 $f^k_{j\otimes}(\cdot)$ 为区间灰数型适中测度白化权函数,记为 $f^k_{j\otimes}[\otimes^k_j(1), \otimes^k_j(2), -, \otimes^k_j(4)]$;

4) 若 $\otimes^k_j(3)$ 和 $\otimes^k_j(4)$ 不存在,则称 $f^k_{j\otimes}(\cdot)$ 为区间灰数型上限测度白化权函数,记为 $f^k_{j\otimes}[\otimes^k_j(1), \otimes^k_j(2), -, -]$.

## 3 基于核和灰度的区间灰数型灰色聚类模型构建

### 3.1 基于核和灰度的区间灰数型白化权函数表达式构造

**命题1** 对象$i$关于指标$j$的观测值和$j$指标子类的区间灰数型白化权函数的转折点具有相同的论域$\Omega_j$.

**定义6** 设$\otimes_{ij}\in[\otimes_{ij}^-,\otimes_{ij}^+]$是对象$i$关于指标$j$的观测值$(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$, $f_{j\otimes}^k(\cdot)$是$j$指标$k(k=1,2,\cdots,s)$子类的区间灰数型典型白化权函数,转折点为$\otimes_j^k(l)\in[\otimes_j^k(l)^-,\otimes_j^k(l)^+](l\in\{1,2,3,4\})$.

依据定义1、定义2、定义3和命题1,可将观测值和转折点用核和灰度表示,有

$$\otimes_{ij}=\hat{\otimes}_{ij(g_{ij}^\circ)},\ \otimes_j^k(l)=\hat{\otimes}_j^k(l)_{(g^\circ{}_j^k(l))};$$

$$g_{ij}^\circ=\frac{\mu(\otimes_{ij})}{\mu(\Omega_j)},\ g^\circ{}_j^k(l)=\frac{\mu(\otimes_j^k(l))}{\mu(\Omega_j)}.$$

其中

$$\hat{\otimes}_{ij}=\frac{1}{2}(\otimes_{ij}^-+\otimes_{ij}^+),$$

$$\hat{\otimes}_j^k(l)=\frac{1}{2}(\otimes_j^k(l)^-+\otimes_j^k(l)^+).$$

根据上述定义可以得到如下4种区间灰数型白化权函数的表达式.

**命题2** 设$\otimes_{ij}\in[\otimes_{ij}^-,\otimes_{ij}^+](i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$是对象$i$关于指标$j$的观测值, $f_{j\otimes}^k(\cdot)$是$j$指标$k(k=1,2,\cdots,s)$子类的区间灰数型白化权函数. 假设观测值的区间测度小于白化权函数中两相邻转折点间的距离测度,则

1) 对于区间灰数型典型白化权函数,有

$$f_{j\otimes}^k(\otimes_{ij})=\begin{cases}0,\ \otimes_{ij}^+\leqslant\otimes_j^k(1)^-\text{或}\otimes_{ij}^-\geqslant\otimes_j^k(4)^+;\\ 0_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(1))},\\ \qquad\hat{\otimes}_{ij}\notin[\hat{\otimes}_j^k(1),\ \hat{\otimes}_j^k(4)]\text{且}\otimes_{ij}^+>\otimes_j^k(1)^-;\\ \Big(\dfrac{\hat{\otimes}_{ij}-\hat{\otimes}_j^k(1)}{\hat{\otimes}_j^k(2)-\hat{\otimes}_j^k(1)}\Big)_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(1)\vee g^\circ{}_j^k(2))},\\ \qquad\hat{\otimes}_{ij}\in[\hat{\otimes}_j^k(1),\hat{\otimes}_j^k(2)];\\ 1_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(2))},\ \hat{\otimes}_{ij}\in[\hat{\otimes}_j^k(2),\hat{\otimes}_j^k(3)]\text{且}\otimes_{ij}^-<\otimes_j^k(2)^+;\\ 1,\ \otimes_j^k(2)^+\leqslant\otimes_{ij}^-<\otimes_{ij}^+\leqslant\otimes_j^k(3)^-;\\ 1_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(3))},\ \hat{\otimes}_{ij}\in[\hat{\otimes}_j^k(2),\hat{\otimes}_j^k(3)]\text{且}\otimes_{ij}^+>\otimes_j^k(3)^-;\\ \Big(\dfrac{\hat{\otimes}_j^k(4)-\hat{\otimes}_{ij}}{\hat{\otimes}_j^k(4)-\hat{\otimes}_j^k(3)}\Big)_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(3)\vee g^\circ{}_j^k(4))},\\ \qquad\hat{\otimes}_{ij}\in[\hat{\otimes}_j^k(3),\hat{\otimes}_j^k(4)];\\ 0_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(4))},\ \hat{\otimes}_{ij}\notin[\hat{\otimes}_j^k(1),\hat{\otimes}_j^k(4)]\text{且}\otimes_{ij}^-<\otimes_j^k(4)^+.\end{cases}$$

2) 对于区间灰数型下限测度白化权函数,有

$$f_{j\otimes}^k(\otimes_{ij})=\begin{cases}0,\ \otimes_{ij}^+\leqslant0\text{或}\otimes_{ij}^-\geqslant\otimes_j^k(4)^+;\\ 1_{(g_{ij}^\circ)},\ \hat{\otimes}_{ij}\in[0,\hat{\otimes}_j^k(3)]\text{且}\otimes_{ij}^-<0;\\ 1,\ 0\leqslant\otimes_{ij}^-<\otimes_{ij}^+\leqslant\otimes_j^k(3)^-;\\ 1_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(3))},\ \hat{\otimes}_{ij}\in[0,\hat{\otimes}_j^k(3)]\text{且}\otimes_{ij}^+>\otimes_j^k(3)^-;\\ \Big(\dfrac{\hat{\otimes}_j^k(4)-\hat{\otimes}_{ij}}{\hat{\otimes}_j^k(4)-\hat{\otimes}_j^k(3)}\Big)_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(3)\vee g^\circ{}_j^k(4))},\\ \qquad\hat{\otimes}_{ij}\in[\hat{\otimes}_j^k(3),\hat{\otimes}_j^k(4)];\\ 0_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(4))},\ \hat{\otimes}_{ij}>\hat{\otimes}_j^k(4)\text{且}\otimes_{ij}^-<\otimes_j^k(4)^+.\end{cases}$$

3) 对于区间灰数型适中测度白化权函数,有

$$f_{j\otimes}^k(\otimes_{ij})=\begin{cases}0,\ \otimes_{ij}{}^+\leqslant\otimes_j^k(1)^-\text{或}\otimes_{ij}{}^-\geqslant\otimes_j^k(4)^+;\\ 0_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(1))},\\ \qquad\hat{\otimes}_{ij}\notin[\hat{\otimes}_j^k(1),\hat{\otimes}_j^k(4)]\text{且}\otimes_{ij}{}^+>\otimes_j^k(1)^-;\\ \Big(\dfrac{\hat{\otimes}_{ij}-\hat{\otimes}_j^k(1)}{\hat{\otimes}_j^k(2)-\hat{\otimes}_j^k(1)}\Big)_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(1)\vee g^\circ{}_j^k(2))},\\ \qquad\hat{\otimes}_{ij}\in[\hat{\otimes}_j^k(1),\hat{\otimes}_j^k(2)];\\ \Big(\dfrac{\hat{\otimes}_j^k(4)-\hat{\otimes}_{ij}}{\hat{\otimes}_j^k(4)-\hat{\otimes}_j^k(2)}\Big)_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(2)\vee g^\circ{}_j^k(4))},\\ \qquad\hat{\otimes}_{ij}\in[\hat{\otimes}_j^k(2),\hat{\otimes}_j^k(4)];\\ 0_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(4))},\\ \qquad\hat{\otimes}_{ij}\notin[\hat{\otimes}_j^k(1),\hat{\otimes}_j^k(4)]\text{且}\otimes_{ij}{}^-<\otimes_j^k(4)^+.\end{cases}$$

4) 对于区间灰数型上限测度白化权函数,有

$$f_{j\otimes}^k(\otimes_{ij})=\begin{cases}0,\ \otimes_{ij}^+\leqslant\otimes_j^k(1)^-;\\ 0_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(1))},\\ \hat{\otimes}_{ij}<\hat{\otimes}_j^k(1)\text{且}\otimes_{ij}^+>\otimes_j^k(1)^-;\\ \Big(\dfrac{\hat{\otimes}_{ij}-\hat{\otimes}_j^k(1)}{\hat{\otimes}_j^k(2)-\hat{\otimes}_j^k(1)}\Big)_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(1)\vee g^\circ{}_j^k(2))},\\ \qquad\hat{\otimes}_{ij}\in[\hat{\otimes}_j^k(1),\hat{\otimes}_j^k(2)];\\ 1_{(g_{ij}^\circ\vee g^\circ{}_j^k(2))},\ \hat{\otimes}_{ij}>\hat{\otimes}_j^k(2)\text{且}\otimes_{ij}^-<\otimes_j^k(2)^+;\\ 1,\ \otimes_{ij}^->\otimes_j^k(2)^+.\end{cases}$$

命题2的证明只涉及到简单的区间灰数的运算,故此省略.

### 3.2 区间灰数型灰色定权聚类模型构建

**定义7** 设$\otimes_{ij}\in[\otimes_{ij}{}^-,\otimes_{ij}{}^+](i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$是对象$i$关于指标$j$的观测值,有$f_{j\otimes}^k(\cdot)$是$j$指标$k(k=1,2,\cdots,s)$子类的区间灰数型

白化权函数. 若$j$指标$k$子类的权$\eta_j^k$与$k$无关,则此时可将$\eta_j^k$的上标$k$略去,记为$\eta_j(j=1,2,\cdots,m)$,并称

$$\sigma_i^k=\sum_{j=1}^{m} f_{j\otimes}^k(\otimes_{ij})\cdot\eta_j$$

为对象$i$关于$k$灰类的区间灰数型灰色定权聚类系数. 若$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_i^k\}=\sigma_i^{k^*}$,则称对象$i$属于灰类$k^*$.

显然,$\sigma_i^k$是基于核和灰度表示的区间灰数,记为$\hat{\sigma}_{i(g_{\sigma i}^{\circ k})}^k$. 那么在确定对象$i$属于灰类$k^*$时就涉及到区间灰数的排序问题. 本文借鉴闫书丽等[17]提出的基于相对核和精确度的区间灰数排序方法来确定对象$i$属于何种灰类.

**定义8** 设$\sigma_i^k(i=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,s)$为对象$i$关于$k$灰类的区间灰数型聚类系数,$\hat{\sigma}_i^k$为区间灰数$\sigma_i^k$的核,$g_{\sigma i}^{\circ k}$为区间灰数$\sigma_i^k$的灰度,称

$$\delta(\sigma_i^k)=\hat{\sigma}_i^k/(1+g_{\sigma i}^{\circ k})$$

为$\sigma_i^k$的相对核.

**定义9** 设$\sigma_i^{k_1}$、$\sigma_i^{k_2}$为对象$i$关于灰类$k_1$、$k_2$的区间灰数型聚类系数,核分别为$\hat{\sigma}_i^{k_1}$、$\hat{\sigma}_i^{k_2}$,灰度分别为$g_{\sigma i}^{\circ k_1}$、$g_{\sigma i}^{\circ k_2}$,则有: 1) 若$\delta(\sigma_i^{k_1})<\delta(\sigma_i^{k_2})$,则$\sigma_i^{k_1}\prec\sigma_i^{k_2}$. 2) 若$\delta(\sigma_i^{k_1})>\delta(\sigma_i^{k_2})$,则$\sigma_i^{k_1}\succ\sigma_i^{k_2}$. 3) 若$\delta(\sigma_i^{k_1})=\delta(\sigma_i^{k_2})$,则: i) $g_{\sigma i}^{\circ k_1}=g_{\sigma i}^{\circ k_2}$,则$\sigma_i^{k_1}=\sigma_i^{k_2}(\hat{\sigma}_i^{k_1}=\hat{\sigma}_i^{k_2},g_{\sigma i}^{\circ k_1}=g_{\sigma i}^{\circ k_2})$; ii) $g_{\sigma i}^{\circ k_1}<g_{\sigma i}^{\circ k_2}$,则$\sigma_i^{k_1}\succ\sigma_i^{k_2}$; iii) $g_{\sigma i}^{\circ k_1}>g_{\sigma i}^{\circ k_2}$,则$\sigma_i^{k_1}\prec\sigma_i^{k_2}$.

已知对象$i$关于指标$j$的观测值$\otimes_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$,根据命题2和定义7可计算出区间灰数型灰色定权聚类系数集$\{\sigma_i^k|k=1,2,\cdots,s\}$,再根据定义8和定义9对聚类系数进行排序,从而得到最大聚类系数$\sigma_i^{k^*}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_i^k\}$,则可将对象$i$归于灰类$k^*$,从而完成区间灰数型灰色定权聚类过程.

## 4 实例分析

南京市江宁区作为国家重要的科教中心和创新基地,拥有一批重点高新技术企业. 为了分析这些企业核心竞争力的发展情况,选取5家企业作为代表,从技术能力、管理能力、财政能力和创新能力这4个指标对企业的发展情况进行评估. 5家企业将被划分为3个类别: 核心竞争力强、核心竞争力一般、核心竞争力弱. 在获取数据时,由于各指标的影响因素较多,更依赖于定性分析,在指标量化过程中难以用具体数值表示,为此可以用区间灰数赋值,相应地,采用区间灰数型白化权函数进行聚类分析将更显合理. 最终,通过专家百分制打分法得到各指标的区间灰数值及其关于各个类型的区间灰数型白化权函数,则指标值和白化权函数转折点的论域皆为$[0,100]$.

对5家企业按以上4个评价指标打分(百分制),所得的区间灰数矩阵如下:

$$A(\otimes)=\begin{bmatrix}[75,80]&[50,55]&[65,68]&[78,80]\\ [50,54]&[50,52]&[60,63]&[64,66]\\ [60,65]&[55,59]&[54,56]&[54,58]\\ [42,44]&[34,36]&[70,76]&[35,40]\\ [76,78]&[62,64]&[64,68]&[80,82]\end{bmatrix}.$$

通过Delphi调查确定了每个指标关于各个类型的区间灰数型白化权函数如下:

1) 技术能力指标的3类白化权函数为

$f_1^1[[50,52],[75,78],-,-]$,

$f_1^2[[34,36],[50,52],-,[75,78]]$,

$f_1^3[-,-,[34,36],[50,52]]$;

2) 管理能力指标的3类白化权函数为

$f_2^1[[45,47],[64,66],-,-]$,

$f_2^2[[28,32],[45,47],-,[64,66]]$,

$f_2^3[-,-,[28,32],[45,47]]$;

3) 财政能力指标的3类白化权函数为

$f_3^1[[46,48],[72,74],-,-]$,

$f_3^2[[36,38],[46,48],-,[72,74]]$,

$f_3^3[-,-,[36,38],[46,48]]$;

4) 创新能力指标的3类白化权函数为

$f_4^1[[52,54],[75,77],-,-]$,

$f_4^2[[38,40],[52,54],-,[75,77]]$,

$f_4^3[-,-,[38,40],[52,54]]$.

采用灰色定权聚类,确定各指标的权重为

$$\eta(\otimes)=[\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4]=[0.26,0.23,0.24,0.27];$$

然后计算出灰色定权聚类系数,用矩阵形式表示为

$$\Sigma=[\sigma_i^k]=\begin{bmatrix}0.7882_{(0.05)}&0.2118_{(0.05)}&0\\ 0.345_{(0.04)}&0.655_{(0.04)}&0_{(0.04)}\\ 0.3461_{(0.05)}&0.6401_{(0.05)}&0\\ 0.24_{(0.06)}&0.2019_{(0.06)}&0.5581_{(0.05)}\\ 0.9099_{(0.04)}&0.0901_{(0.04)}&0\end{bmatrix}.$$

结合定义9中的区间灰数排序方法,得到如下结果: $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_1^k\}=\sigma_1^1=0.7882_{(0.05)}$, $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_2^k\}=\sigma_2^2=0.655_{(0.04)}$, $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_3^k\}=\sigma_3^2=0.6401_{(0.05)}$, $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_4^k\}=\sigma_4^3=0.5581_{(0.05)}$, $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_5^k\}=\sigma_5^1=0.9099_{(0.04)}$.

根据上述聚类结果,企业1、企业5的核心竞争力强,企业2、企业3的核心竞争力一般,企业4的核心竞争力较弱. 以小看大可以获知,南京市江宁区高新技术企业间的核心竞争力存在一定差距,但整体表现较为突出. 此外,从聚类系数$\sigma_1^1=0.7882_{(0.05)}$、$\sigma_5^1=0.9099_{(0.04)}$可知,同属于核心竞争力强的企业1和企业5之间仍存在较大差距,如果将企业的核心竞争力进一步细化为强、较强、一般、较弱、弱5个灰

类,则可得出不同的结果.

## 5 结 论

现实生活中,环境往往具有复杂性和不确定性,因此用区间灰数来表征观测值和白化权函数转折点更为合理. 在区间灰数的"核"、灰度和"灰度不减公理"的理论基础上,本文构造了区间灰数型白化权函数的表达式,并将聚类过程中区间灰数运算转化成实数运算,进而建立了灰色定权聚类模型. 相比于已有研究成果,在拓宽灰色聚类应用范围的同时,简化了整个计算过程,提高了模型的实用性. 另一方面,本文仅考虑了区间灰数分布信息未知的情况,如何在现有区间灰数运算法则和公理的基础上,构建区间灰数白化权函数已知的灰色聚类模型值得进一步研究.

### 参考文献(References)


[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its applications[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010.)

[2] 刘思峰, 谢乃明. 基于改进三角白化权函数的灰评估新方法[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 244-250.
(Liu S F, Xie N M. New grey evaluation method based on reformative triangular whitenization weight function[J]. J of Systems Engineering, 2011, 26(2): 244-250.)

[3] 刘思峰, 方志耕, 杨英杰. 两阶段灰色综合测度决策模型与三角白化权函数的改进[J]. 控制与决策, 2014, 29(7): 1232-1238.
(Liu S F, Fang Z G, Yang Y J. Two stages decision model with grey synthetic measure and a betterment of triangular whitenization weight function[J]. Control and Decision, 2014, 29(7): 1232-1238.)

[4] 肖新平, 肖伟. 灰色最优聚类理论模型及其应用[J]. 运筹与管理, 1997, 6(1): 21-26.
(Xiao X P, Xiao W. Grey optimal theory model of classification and its application[J]. Operations Research and Management Science, 1997, 6(1): 21-26.)

[5] 徐卫国, 张清宇, 郭慧, 等. 灰色聚类模型的改进及应用研究[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(6): 200-205.
(Xu W G, Zhang Q Y, Guo H, et al. Improvement and application of grey clustering model in atmospheric quality comprehensive evaluation[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2006, 36(6): 200-205.)

[6] 董一哲, 党耀国. 基于离差最大化的灰色聚类方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(9): 141-146.
(Dong Y Z, Dang Y G. Grey clustering method based on maximizing deviations[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(9): 141-146.)

[7] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于白化权函数分类区分度的变权灰色聚类[J]. 统计与信息论坛, 2011, 26(6): 23-27.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Grey clusters with variable weights based on the classification degree of the whitening weight functions[J]. Statistics & Information Forum, 2011, 26(6): 23-27.)

[8] 吴凤平, 程铁军. 基于改进的灰色定权聚类分析的突发事件分级研究[J]. 中国管理科学, 2013, 21(A1): 110-113.
(Wu F P, Cheng T J. The classification of emergency based on improved grey clustering model[J]. Chinese J of Management Science, 2013, 21(A1): 110-113.)

[9] 钱丽丽, 刘思峰, 谢乃明. 基于熵权和区间灰数信息的灰色聚类模型[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(2): 352-356.
(Qian L L, Liu S F, Xie N M. Grey clustering model based on entropy-weight and grey numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2016, 38(2): 352-356.)

[10] Yuan C Q, Liu S F. Core of grey cluster and its application in evaluation of scientific and technological strength[J]. J of Grey System, 2012, 24(4): 327-336.

[11] Li C, Chen K, Xiang X. An integrated framework for effective safety management evaluation: Application of an improved grey clustering measurement[J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(13): 5541-5553.

[12] Ewa W J. Competencies' model in the succession process of family firms with the use of grey clustering analysis[J]. J of Grey System, 2016, 28(2): 121-131.

[13] 张荣, 刘思峰, 刘斌. 灰色聚类评价方法的延拓研究[J]. 统计与决策, 2007(18): 24-26.
(Zhang R, Liu S F, Liu B. Extension research of grey clustering evaluation method[J]. Statistics and Decision, 2007(18): 24-26.)

[14] 周伟杰, 党耀国, 熊萍萍, 等. 区间灰数的灰色变权与定权聚类模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(10): 2590-2595.
(Zhou W J, Dang Y G, Xiong P P, et al. Grey clustering model for interval grey number with variable and fixed weights[J]. Systems Engineering – Theory & Practice, 2013, 33(10): 2590-2595.)

[15] 王俊杰, 党耀国, 李雪梅, 等. 基于区间灰数的灰色定权聚类[J]. 中国管理科学, 2015, 23(10): 139-146.
(Wang J J, Dang Y G, Li X M, et al. Grey clusters method with fixed weight based on the interval grey number[J]. Chinese J of Management Science, 2015, 23(10): 139-146.)

[16] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 313-316.
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the "Kernel" and the degree of greyness of grey numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(2): 313-316.)

[17] 闫书丽, 刘思峰, 朱建军, 等. 基于相对核和精确度的灰数排序方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 315-319.
(Yan S L, Liu S F, Zhu J J, et al. The ranking method of grey numbers based on relative kernel and degree of accuracy[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 315-319.)


（责任编辑：齐 霁）