

一种非线性多环递归自适应跟踪控制

殷春武^{1,2†}, 侯明善², 李明翔²

(1. 西安建筑科技大学 信息与控制工程学院, 西安 710055; 2. 西北工业大学 自动化学院, 西安 710129)

摘 要: 针对控制输入有界的变参数广义高阶非线性系统跟踪控制问题, 给出一种多环递归跟踪的鲁棒控制方法. 通过分层引入虚拟跟踪器, 将高阶系统分解为多个独立子系统; 内环虚拟跟踪器使内环输出指数收敛于外环虚拟输入, 最内环设计自适应控制器补偿参数摄动和外部干扰, 并保证输出指数收敛于外环虚拟输入; 多环递归跟踪实现系统输出精确跟踪期望输入, 理论证明闭环系统的全局渐近收敛性. 数值仿真验证了多环跟踪控制器的可行性和合理性.

关键词: 非线性系统; 鲁棒控制; 饱和控制; 多环跟踪控制

中图分类号: TP273; O231.2

文献标志码: A

Nonlinear multi-loop adaptive tracking control

YIN Chun-wu^{1,2†}, HOU Ming-shan², LI Ming-xiang²

(1. School of Information and Control Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China; 2. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: A multi-loop tracking robust control method is presented for the high-order uncertain nonlinear system with control saturation constraint and varying parameters. Firstly, the high-order nonlinear system is decomposed into some first-order subsystems by hierarchical design virtual tracking controller. Then, the virtual tracking controller ensures that the output of inner loop exponential converge to the virtual input of outer loop, and an adaptive controller is designed for inner loop to compensate the uncertainty which is caused by parameters' perturbation and external disturbance, and to ensure that the output exponential converge to the virtual input. The output of system can accurately track the desired input, by using multi loop recursive tracking. Theoretical analysis proves the global convergence of the closed-loop system. Simulation verifies the feasibility and rationality of the multi loop tracking controller.

Keywords: nonlinear systems; robust control; saturation control; multi-loop tracking control

0 引 言

非线性系统的稳定和自适应控制问题一直是控制领域的研究重点, 特别是高阶非线性系统的控制问题, 近年来受到学者的广泛关注和研究. 经过十几年的研究, 学者在高阶非线性系统的稳定控制方面取得了一定的研究成果^[1-4], 但现有的研究成果中, 考虑非线性系统参数摄动和控制输入饱和约束的研究成果并不多. 因此, 含参数摄动、控制输入饱和及外部干扰的高阶非线性系统的控制设计问题, 依然是高阶非线性系统控制中所面临的一个难题.

非线性动力学理论的发展, 推动了非线性控制理论的快速发展, 很多非线性控制方法相继被提出, 如自适应控制^[5]、反演控制^[6]、滑模控制^[7]、智能控制^[8]

等控制理论和方法逐渐成熟, 并用于非线性系统的稳定控制设计中. 这些方法在解决非线性系统的稳定性控制方面具有各自独特的优良性能, 但也存在各自的缺陷^[9]. 自适应控制对实时性要求较高; 反演控制要求精确模型; 滑模控制容易出现抖振, 且控制力矩较大; 智能控制增加了控制器结构的复杂度. 为充分利用各种控制方法的优势, 并降低各控制方法的负面影响, 将各种控制方法相结合的组合控制策略相继被提出^[10-12], 并得到较好的应用和发展. 这些非线性控制方法在处理高阶非线性系统的控制问题时, 其共同特征是从系统整体出发, 基于 Lyapunov 稳定性理论设计控制器, 增加了控制器的复杂度和设计难度. 本文提出一种多环跟踪控制策略, 以有效简化控制器设

收稿日期: 2016-08-08; 修回日期: 2016-12-22.

基金项目: 西安建筑科技大学青年基金项目(QN1727); 西安建筑科技大学人才基金项目(6040317017).

作者简介: 殷春武(1982—), 男, 副教授, 博士, 从事航天器姿态控制、决策理论与方法、航迹规划的研究; 侯明善(1959—), 男, 教授, 博士生导师, 从事分析与评估、飞行器导航、制导与控制等研究.

†通讯作者. E-mail: yincwxa2013@mail.nwpu.edu.cn

计的复杂度,提升控制器设计的灵活性.

本文的创新之处在于:在控制器设计中考虑控制饱和和约束,设计辅助函数预测控制饱和和超幅变量,并将其用于控制器中,解决了事后限幅会导致控制输入力矩不足的问题;对反演控制方法进行改进,提出多环递归跟踪控制策略,并理论证明该控制策略能够保证闭环系统的渐近稳定性;用时变增益函数取代常值增益,避免常值增益会导致初期控制力矩过大的缺陷;与反演控制器相比,多环跟踪控制器的结构更简单.数值仿真结果表明:在控制输入有界约束下,反演控制器使闭环系统发散时,多环跟踪控制器却能保证闭环系统的稳定;不考虑控制饱和和约束时,多环跟踪控制器比反演控制器的控制品质更优.

1 控制问题描述

对于存在控制输入饱和和约束的 n 阶广义非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{f}_1(\bar{\boldsymbol{x}}_1) + \boldsymbol{g}_1(\bar{\boldsymbol{x}}_1)\boldsymbol{x}_2; \\ \dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) + \boldsymbol{g}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\boldsymbol{x}_{i+1}, i = 2, 3, \dots, n-1; \\ \dot{\boldsymbol{x}}_n = \boldsymbol{f}_n(\theta, \bar{\boldsymbol{x}}_n) + \boldsymbol{g}_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n)\text{sat}(\boldsymbol{u}, u_{\max}) + \boldsymbol{d}; \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ 为状态矢量, $\bar{\boldsymbol{x}}_i = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i)^T$. θ 为适当维数的系统参数. \boldsymbol{d} 为干扰矢量. 非线性函数 $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_n$ 在论域内为光滑函数. \boldsymbol{u} 为输入矢量, u_{\max} 为最大允许控制输入量, \boldsymbol{y} 为输出, 控制饱和函数 $\text{sat}(\boldsymbol{u}, u_{\max})$ 定义为

$$\text{sat}(u_i, u_{\max}) = \begin{cases} u_i, & |u_i| \leq u_{\max}; \\ u_{\max} \text{sign}(u_i), & |u_i| > u_{\max}. \end{cases} \quad (2)$$

控制目标:对于给定的期望轨迹 \boldsymbol{y}_d ,对系统(1)设计控制律,使得当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{y}_d$.

假设1 可逆矩阵 $\boldsymbol{g}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)$ 有界,即存在 $M_i > 0$, 使 $\|\boldsymbol{g}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\| \leq M_i$.

假设2 参数 θ 存在上界未知摄动 $\Delta\theta$, 名义参数 θ_0 已知.

令 $\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \text{sat}(\boldsymbol{u}, u_{\max})$, 引入辅助系统

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi} + \Delta\boldsymbol{u}, \quad (3)$$

其中矩阵 \boldsymbol{C} 正定. 对于以 x 为输出 u 为输入的系统

$$\dot{x} = f(x) + u, \quad (4)$$

在 $f(x)$ 已知时, 可得 u 为输出 v 为输入的新系统

$$u = \dot{v} - f(v), \quad (5)$$

则可以得到闭环系统

$$\dot{x} - f(x) = \dot{v} - f(v). \quad (6)$$

通过式(6)可以知道,当 $x(0) = v(0)$ 时,输出 x 与输入

v 完全相同. 同理,对于辅助系统(3),如果将 $\Delta\boldsymbol{u}$ 看作输入,则得到一个以 $\boldsymbol{\lambda}$ 为输入, $\Delta\boldsymbol{u}$ 为输出的新系统

$$\Delta\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}. \quad (7)$$

联合式(3)和(7),得到闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}. \quad (8)$$

当 $\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\lambda}(0)$ 时,输出 $\boldsymbol{\lambda}$ 与输入 $\boldsymbol{\xi}$ 完全相同,可以用 $\dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi}$ 或 $\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}$ 来预测 $\Delta\boldsymbol{u}$. 引入变量

$$\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi} - \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (9)$$

则 $\text{sat}(\boldsymbol{u}, u_{\max}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\eta}$. 将 $\text{sat}(\boldsymbol{u}, u_{\max}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\eta}$ 和 $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ 代入系统(1),有

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{f}_1(\bar{\boldsymbol{x}}_1) + \boldsymbol{g}_1(\bar{\boldsymbol{x}}_1)\boldsymbol{x}_2; \\ \dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) + \boldsymbol{g}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\boldsymbol{x}_{i+1}, i = 2, 3, \dots, n-1; \\ \dot{\boldsymbol{x}}_n = \boldsymbol{f}_n(\theta_0, \bar{\boldsymbol{x}}_n) + \boldsymbol{g}_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{G}; \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1. \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{f}_n(\Delta\theta, \bar{\boldsymbol{x}}_n) + \boldsymbol{g}_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n)\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{d}$ 为参数摄动干扰、控制输入超过饱和幅值部分和外部干扰组成的复合不确定项. 变量 $\boldsymbol{\eta}$ 最终全部包含在 \boldsymbol{G} 中,因此并不需要真的用 $\boldsymbol{\eta}$ 来预测 $\Delta\boldsymbol{u}$.

引理1 [13] (Barbalat 引理) 设 $x: [0, \infty) \rightarrow R$ 平方可积, 即 $\int_0^\infty x^2(t)dt \leq \infty$, 则如果对于 $t \in [0, \infty)$, 有 $\dot{x}(t)$ 存在且有界, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

2 反演自适应跟踪控制器设计

记跟踪误差为 $\bar{\boldsymbol{z}}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_d$, 构造 Lyapunov 函数 $\bar{V}_1 = 0.5\bar{\boldsymbol{z}}_1^T \bar{\boldsymbol{z}}_1$, 对 \bar{V}_1 关于时间 t 求导, 得

$$\dot{\bar{V}}_1 = \bar{\boldsymbol{z}}_1^T (\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{x}_2 - \dot{\boldsymbol{y}}_d). \quad (11)$$

将 \boldsymbol{x}_2 看作控制输入, 设计 \boldsymbol{x}_2 的虚拟控制器

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = -\boldsymbol{g}_1^{-1}(k_1\bar{\boldsymbol{z}}_1 + \boldsymbol{f}_1 - \dot{\boldsymbol{y}}_d), \quad (12)$$

常数 $k_1 > 0$. 将 $\bar{\boldsymbol{z}}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1$ 和式(12)代入(11), 有

$$\dot{\bar{V}}_1 = -k_1\bar{\boldsymbol{z}}_1^T \bar{\boldsymbol{z}}_1 + \bar{\boldsymbol{z}}_1^T \boldsymbol{g}_1\bar{\boldsymbol{z}}_2. \quad (13)$$

构造 Lyapunov 函数 $\bar{V}_2 = \bar{V}_1 + 0.5\bar{\boldsymbol{z}}_2^T \bar{\boldsymbol{z}}_2$, 则

$$\dot{\bar{V}}_2 = -k_1\bar{\boldsymbol{z}}_1^T \bar{\boldsymbol{z}}_1 + \bar{\boldsymbol{z}}_2^T (\boldsymbol{g}_1^T \bar{\boldsymbol{z}}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{x}_3 - \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_1). \quad (14)$$

将 \boldsymbol{x}_3 看作控制输入, 设计 \boldsymbol{x}_3 的虚拟控制器

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 = -\boldsymbol{g}_2^{-1}(k_2\bar{\boldsymbol{z}}_2 + \boldsymbol{f}_2 - \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_1 + \boldsymbol{g}_1^T \bar{\boldsymbol{z}}_1), \quad (15)$$

常数 $k_2 > 0$. 将 $\bar{\boldsymbol{z}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2$ 和式(15)代入(14), 有

$$\dot{\bar{V}}_2 = -k_1\bar{\boldsymbol{z}}_1^T \bar{\boldsymbol{z}}_1 - k_2\bar{\boldsymbol{z}}_2^T \bar{\boldsymbol{z}}_2 + \bar{\boldsymbol{z}}_2^T \boldsymbol{g}_2\bar{\boldsymbol{z}}_3. \quad (16)$$

依次令 $\bar{V}_i = \bar{V}_{i-1} + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{z}}_i^T \bar{\boldsymbol{z}}_i$, $i = 3, 4, \dots, n-1$, 同理可以得到各子系统的虚拟控制器

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i = -\boldsymbol{g}_i^{-1}(k_i\bar{\boldsymbol{z}}_i + \boldsymbol{f}_i - \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_{i-1} + \boldsymbol{g}_{i-1}^T \bar{\boldsymbol{z}}_{i-1}), \quad (17)$$

常数 $k_i > 0$. 将 $\bar{\boldsymbol{z}}_n = \boldsymbol{x}_n - \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{n-1}$ 和式(17)代入(16), 有

$$\dot{\bar{V}}_i = -\sum_{j=1}^i k_j \bar{\boldsymbol{z}}_j^T \bar{\boldsymbol{z}}_j + \bar{\boldsymbol{z}}_i^T \boldsymbol{g}_i \bar{\boldsymbol{z}}_{i+1}. \quad (18)$$

在适当选择等效动态参数集合的条件下, 可以将不确定项 G 看作常值, 并设计时变量 \hat{G} 来估计常值 G ^[14]. 令估计误差为 $\tilde{G} = G - \hat{G}$. 构造 Lyapunov 函数

$$\bar{V}_n = \bar{V}_{n-1} + \frac{1}{2} \bar{z}_n^T \bar{z}_n + \frac{1}{2} \tilde{G}^T \Gamma \tilde{G}, \quad (19)$$

其中矩阵 Γ 为适当维数的正定矩阵, 则

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}}_n = & \sum_{j=1}^{n-1} k_j \bar{z}_j^T \dot{\bar{z}}_j + \bar{z}_n^T g_{n-1} \dot{\bar{z}}_n + g_n u + \\ & \bar{z}_n^T (f_n(\theta_0, \bar{x}_n) + G - \dot{\hat{\alpha}}_{n-1}) - \tilde{G}^T \Gamma \dot{\hat{G}}. \end{aligned} \quad (20)$$

设计反演跟踪控制器和自适应更新律为

$$\begin{aligned} u_{BSC} = & -g_n^{-1} (k_n z_n + f_n(\theta_0, \bar{x}_n) - \dot{\hat{\alpha}}_{n-1} + \\ & \hat{G} + g_{n-1}^T \bar{z}_{n-1}), \\ \dot{\hat{G}} = & \Gamma^{-1} \bar{z}_n. \end{aligned} \quad (21)$$

将式(21)代入(20), 得到

$$\dot{\bar{V}}_n \leq - \sum_{j=1}^n k_j \bar{z}_j^T \bar{z}_j \leq 0. \quad (22)$$

由 Lyapunov 稳定性理论可知, 在控制器(21)下, 系统(10)全局渐近收敛.

反演控制器设计过程中, \bar{V}_i 中均包含 \bar{V}_{i-1} 的信息, 使得虚拟控制器中会增加一项 $-g_i^{-1} g_{i-1}^T \bar{z}_{i-1}$. 当

系统阶数较高时, 这一项的增加不仅会增加微分难度和计算量, 在实际工程应用中还会增加元器件的设计数量, 降低系统的可靠度. 为尽可能地降低控制器的计算量, 减少元器件设计数量, 下面给出一种多环递归跟踪控制器设计方法. 该方法不仅能够保证系统的稳定性, 还能将虚拟控制器中增加的 $-g_i^{-1} g_{i-1}^T$ 这一项剔除.

3 多环自适应跟踪控制器设计

n 阶系统多环递归跟踪控制的思想是: 将 x_2 看作子系统 $\dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_1) + g_1(\bar{x}_1)x_2$ 的控制输入, 设计控制器 α_1 , 使子系统 $\dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_1) + g_1(\bar{x}_1)x_2$ 的输出 x_1 跟踪期望轨迹 y_d ; 接着将 α_1 作为子系统 $\dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2) + g_2(\bar{x}_2)x_3$ 的期望轨迹, 对其设计控制器 α_2 , 使子系统 $\dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2) + g_2(\bar{x}_2)x_3$ 的输出 x_2 精确跟踪 α_1 ; 依次类推, 将 x_{i+1} 作为子系统 $\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1}$ 的控制输入, 设计控制器 α_i , 使该子系统的输出 x_i 精确跟踪 α_{i-1} ; 最后将 α_{n-1} 作为子系统 $\dot{x}_n = f_n(\theta_0, \bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u + G$ 的期望轨迹, 设计控制器 u , 使输出 x_n 精确跟踪 α_{n-1} , 最终实现整个闭环系统的全局渐近稳定和对期望轨迹的精确跟踪. 多环递归自适应跟踪控制结构如图 1 所示.

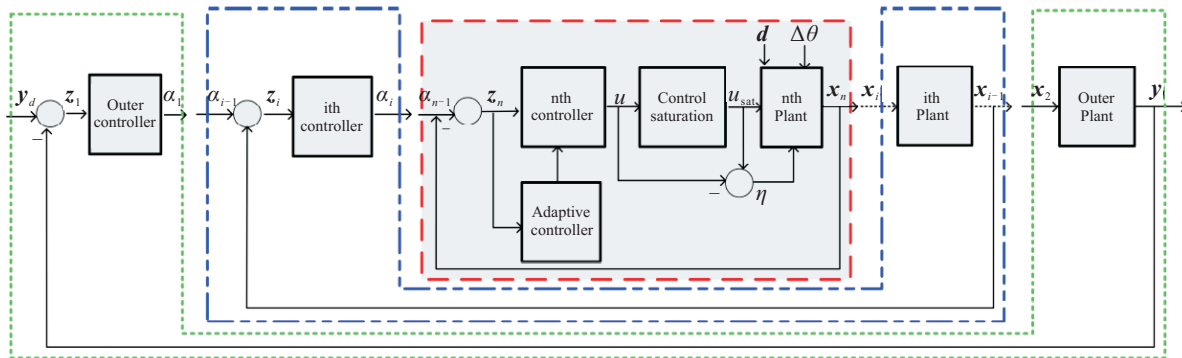


图 1 非线性多环递归自适应跟踪控制结构

3.1 跟踪控制器设计

记跟踪误差为 $z_1 = x_1 - y_d, z_2 = x_2 - \alpha_1, z_i = x_i - \alpha_{i-1}, i = 3, 4, \dots, n$. 构造 Lyapunov 函数 $V_1 = 0.5 z_1^T z_1$, 对 V_1 关于时间 t 求导,

$$\dot{V}_1 = z_1^T (f_1 + g_1 x_2 - \dot{y}_d). \quad (23)$$

设计 x_2 的虚拟控制器

$$\alpha_1 = -g_1^{-1} (k_1 z_1 + f_1 - \dot{y}_d), \quad (24)$$

常数 $k_1 > 0$. 将 $z_2 = x_2 - \alpha_1$ 和式(24)代入(23), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -k_1 z_1^T z_1 + z_1^T g_1 z_2 \leq \\ & -k_1 \|z_1\|^2 + \frac{\chi_1 M_1}{2} \|z_1\|^2 + \frac{M_1}{2\chi_1} \|z_2\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

当常数 χ_1 足够小时, 有 $\beta_1 = k_1 - \frac{\chi_1 M_1}{2} > 0$, 则

$$\dot{V}_1 \leq -\beta_1 \|z_1\|^2 + \frac{M_1}{2\chi_1} \|z_2\|^2. \quad (26)$$

构造 Lyapunov 函数 $V_2 = 0.5 z_2^T z_2$, 则

$$\dot{V}_2 = z_2^T (f_2 + g_2 x_3 - \dot{\alpha}_1). \quad (27)$$

设计 x_3 的虚拟控制器

$$\alpha_2 = -g_2^{-1} (k_2 z_2 + f_2 - \dot{\alpha}_1), \quad (28)$$

常数 $k_2 > 0$. 将 $z_3 = x_3 - \alpha_2$ 和式(28)代入(27), 得

$$\dot{V}_2 \leq -\left(k_2 - \frac{\chi_2 M_2}{2}\right) \|z_2\|^2 + \frac{M_2}{2\chi_2} \|z_3\|^2. \quad (29)$$

依次令 $V_i = \frac{1}{2} z_i^T z_i, i = 3, 4, \dots, n-1$, 同理可以得

到各子系统的虚拟控制器

$$\alpha_i = -g_i^{-1}(k_i z_i + f_i - \dot{\alpha}_{i-1}), \quad (30)$$

常数 $k_i > 0, i = 3, 4, \dots, n-1$. 当常数 χ_i 选择得足够小时, 有 $\beta_i = k_i - \frac{\chi_i M_i}{2} > 0$, 则

$$\dot{V}_i \leq -\beta_i \|z_i\|^2 + \frac{M_i}{2\chi_i} \|z_{i+1}\|^2. \quad (31)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V_n = \frac{1}{2} z_n^T z_n + \frac{1}{2} \tilde{G}^T \Gamma \tilde{G}, \quad (32)$$

其中矩阵 Γ 为适当维数的正定矩阵. 对 V_n 关于时间 t 求导

$$\dot{V}_n = z_n^T (f_n + g_n u + G - \dot{\alpha}_{n-1}) - \tilde{G}^T \Gamma \dot{\tilde{G}}. \quad (33)$$

设计多环递归跟踪控制器和自适应更新律为

$$\begin{cases} u_{MLC} = -g_n^{-1}(k_n z_n + f_n - \dot{\alpha}_{n-1} + \tilde{G}), \\ \dot{\tilde{G}} = \Gamma^{-1} z_n. \end{cases} \quad (34)$$

将式(34)代入(33), 得到

$$\dot{V}_n \leq -k_n z_n^T z_n \leq 0. \quad (35)$$

由 Lyapunov 稳定性理论可知, 在控制器(34)下, 一阶系统 $\dot{x}_n = f_n(\theta_0, \bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u + G$ 能够渐近收敛到 α_{n-1} , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_n = 0$.

3.2 系统稳定性分析

由上面的分析可以得到跟踪闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -k_1 z_1 + g_1 z_2; \\ \dot{z}_i = -k_i z_i + g_i z_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1; \\ \dot{z}_n = -k_n z_n + \tilde{G}. \end{cases} \quad (36)$$

下面以定理的形式先给出控制器(34)能够保证 n 阶非线性系统(1)的全局渐近稳定性, 并利用 Lyapunov 稳定性理论对其进行理论性证明.

定理1 控制器(24)、(28)、(30)、(34)能够使 n 阶非线性系统(1)的输出收敛到期望轨迹 y_d , 且满足 $t \rightarrow \infty$ 时, $z_i \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, n$.

证明 对式(35)积分, 得

$$\int_0^\infty k_n \|z_n\|^2 dt + V_n(\infty) \leq V_n(0),$$

说明 $\int_0^\infty \|z_n\|^2 dt$ 有界. 又

$$\dot{V}_{n-1} \leq -\beta_{n-1} \|z_{n-1}\|^2 + \frac{M_{n-1}}{2\chi_{n-1}} \|z_n\|^2. \quad (37)$$

根据极限定义, 由 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_n = 0$ 可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists t_1 > 0$, 使 $\|z_n\| \leq \varepsilon$. 适当取 $\varepsilon, \forall t > t_1$ 有 $\dot{V}_{n-1} < 0$. 对式(37)在 $[0, t_1]$ 上积分, 得

$$\int_0^{t_1} \beta_{n-1} \|z_{n-1}\|^2 dt \leq V_{n-1}(0) - V_{n-1}(t_1) + \frac{M_{n-1}}{2\chi_{n-1}} \int_0^{t_1} \|z_n\|^2 dt. \quad (38)$$

因为 V_{n-1} 在闭区间 $[0, t_1]$ 上连续, 所以 V_{n-1} 在 $[0, t_1]$ 上有界, 即 $V_{n-1}(0) - V_{n-1}(t_1)$ 有界. 对式(37)在 $[t_1, \infty)$ 上积分, 根据 $\forall t > t_1$ 有 $\dot{V}_{n-1} < 0$, 可以得到 $V_{n-1}(\infty) = 0$, 则有

$$\int_{t_1}^\infty \beta_{n-1} \|z_{n-1}\|^2 dt \leq V_{n-1}(t_1) + \frac{M_{n-1}}{2\chi_{n-1}} \int_{t_1}^\infty \|z_n\|^2 dt. \quad (39)$$

联立式(38)和(39), 有

$$\int_0^\infty \beta_{n-1} \|z_{n-1}\|^2 dt \leq V_{n-1}(0) + \frac{M_{n-1}}{2\chi_{n-1}} \int_0^\infty \|z_n\|^2 dt. \quad (40)$$

因为 $V_{n-1}(0)$ 和 $\int_0^\infty \|z_n\|^2 dt$ 有界, 得 $\int_0^\infty \|z_{n-1}\|^2 dt \leq \infty$, 说明 z_{n-1} 平方可积. 根据 $\|g_{n-1}\| \leq M_{n-1}$ 和 z_n 有界得 \dot{z}_{n-1} 有界, 即 \dot{z}_{n-1} 存在且有界. 根据 Barbalat 引理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_{n-1} = 0$.

同理, 根据 $\int_0^\infty \|z_{n-1}\|^2 dt$ 的有界性, 可以推出 $\int_0^\infty \|z_{n-2}\|^2 dt$ 有界, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_{n-2} = 0$. 依次可得 $\int_0^\infty \|z_i\|^2 dt$ 有界且 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-2$. 根据 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1 = 0$ 得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow y_d$.

多环递归跟踪控制器的设计与反演控制相似, 但理念存在差别. 多环递归跟踪设计是将 n 阶系统分解成 n 个独立的一阶系统, 并分别对一阶系统设计跟踪控制器, 提升了控制器设计的灵活性; 而反演控制则始终将 n 阶系统看作一个整体来设计跟踪控制器.

对比反演控制器中的 $\bar{\alpha}_i$ 和多环递归控制器中的 α_i, α_i 比 $\bar{\alpha}_i$ 少了一项 $-g_i^{-1} g_{i-1}^T \bar{z}_{i-1}$, 说明多环递归控制器的结构更简单, 计算量更小, 系统更可靠.

注1 当控制器 u 使子系统 $\dot{x}_n = f_n + g_n u + G$ 收敛到 α_{n-1} 后, 表明 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_n = 0$. 由

$$\dot{V}_{n-1} = -k_{n-1} z_{n-1}^T z_{n-1} + z_{n-1}^T g_{n-1} z_n,$$

得 $\dot{V}_{n-1} \leq -2k_{n-1} V_{n-1}$, 即 z_{n-1} 将以指数收敛到 0. 依次类推, 可得到 $z_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 均会以指数收敛到 0. 因此, 非线性多环跟踪控制策略的收敛速度也将会很快.

在系统控制过程中, 一般来说, 控制初期的跟踪误差均会很大, 随后会随着控制器的不断作用, 跟踪误差逐渐减小. 为避免常值增益导致初期控制力矩过大的缺陷, 本文设置如下的时变增益函数用于控制器(24)、(28)、(30)、(34)中的增益系数 $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的调整:

$$k_i = \rho_i e^{a_i \arctan(b_i t)}, \quad i = 1, 2. \quad (41)$$

其中: 常数 $\rho_i > 0$ 用来调节增益的取值范围; 常数 $a_i > 0$ 用来调节增益的增长速度; 常数 $b_i > 0$ 用来调节增益收敛到恒定值的速度; $\arctan(t)$ 是反正切函

数.

4 仿真实验

考虑如下三阶广义非线性系统:

$$\begin{aligned}
 (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T &= (x_4, x_5, x_6)^T, \\
 [\dot{x}_4 \ \dot{x}_5 \ \dot{x}_6]^T &= \\
 &0.01 \begin{bmatrix} \cos x_5 \sin x_6 \\ \cos x_4 \sin x_6 + \sin x_4 \sin x_5 \sin x_6 \\ -\sin x_4 \cos x_6 + \cos x_4 \sin x_5 \sin x_6 \end{bmatrix} + \\
 &(x_7, x_8, x_9)^T, \\
 [\dot{x}_7 \ \dot{x}_8 \ \dot{x}_9]^T &= \\
 &\begin{bmatrix} 0 & x_9 & -x_8 \\ -x_9 & 0 & x_7 \\ x_8 & -x_7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} + \\
 &\text{sat}(\mathbf{u}, u_{\max}) + \mathbf{d}, \\
 (y_1, y_2, y_3)^T &= (x_1, x_2, x_3)^T. \tag{42}
 \end{aligned}$$

其中: x_1, x_2, \dots, x_9 为状态变量; $\text{sat}(\mathbf{u}, u_{\max})$ 为存在饱和约束的控制输入; y_1, y_2, y_3 为输出变量; 干扰

$$\mathbf{d} = 0.05 \begin{bmatrix} 0.15 \cos(t) + 0.2 \sin(0.3t) - 0.5 \\ -0.075 \sin(0.2t) + 0.15 \cos(0.5t) + 0.75 \\ -0.225 \sin(0.5t) + 0.1 \cos(0.5t) + 0.5 \end{bmatrix}.$$

参数矩阵 $\theta = (\theta_{ij})_{3 \times 3}$ 的名义矩阵为

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 18 & 1.3 & 0.9 \\ 1.3 & 21 & 1.1 \\ 0.9 & 1.1 & 24 \end{bmatrix}.$$

θ 存在如下非线性摄动量:

$$\Delta\theta = \begin{cases} 0.1\theta_0 t, & 0 \leq t \leq T_0; \\ (0.1T_0 + \lambda - 0.025t)\theta_0, & T_0 < t \leq T_1; \\ (0.1T_0 + \lambda - 0.025T_1)\theta_0, & t \geq T_1. \end{cases} \tag{43}$$

其中 T_0, T_1 为时间常数, 参数 $\lambda > 0$ 决定 $\Delta\theta$ 的值.

设期望轨迹 $\mathbf{y}_d = (0, 0, 0)^T$, 则控制目标为: 在干扰 $\|\mathbf{d}\| \leq D$, 控制力矩满足 $\|\mathbf{u}\|_\infty \leq u_{\max}$, 且内部参数 θ 存在非线性摄动 $\Delta\theta$ 条件下, 对动力学系统(42)设计控制器, 使 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}_d(t), x_1, x_2, \dots, x_9 \rightarrow 0. \tag{44}$$

令

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_1 &= (x_1, x_2, x_3)^T, \\
 \mathbf{X}_2 &= (x_4, x_5, x_6)^T, \\
 \mathbf{X}_3 &= (x_7, x_8, x_9)^T,
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_2 = 0.01 \begin{bmatrix} \cos x_5 \sin x_6 \\ \cos x_4 \sin x_6 + \sin x_4 \sin x_5 \sin x_6 \\ -\sin x_4 \cos x_6 + \cos x_4 \sin x_5 \sin x_6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 & x_9 & -x_8 \\ -x_9 & 0 & x_7 \\ x_8 & -x_7 & 0 \end{bmatrix} \theta_0 \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}.$$

将 $\theta = \theta_0 + \Delta\theta, \text{sat}(\mathbf{u}, u_{\max}) = \mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}$ 代入式(42)并整理, 得到

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_2, \\ \dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{X}_3, \\ \dot{\mathbf{X}}_3 = \mathbf{f}_3 + \mathbf{u} + \mathbf{G}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{X}_1. \end{cases} \tag{45}$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & x_9 & -x_8 \\ -x_9 & 0 & x_7 \\ x_8 & -x_7 & 0 \end{bmatrix} \Delta\theta \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{d}.$$

对系统(45)设计多环递归自适应跟踪控制器 (MLATC)

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \\ \mathbf{z}_2 = \mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1, \\ \mathbf{z}_3 = \mathbf{X}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2, \\ \mathbf{u}_{\text{MLTAC}} = -k_3 \mathbf{z}_3 - \mathbf{f}_3 - \hat{\mathbf{G}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2, \\ \dot{\hat{\mathbf{G}}} = \Gamma^{-1} \mathbf{z}_3, \\ \boldsymbol{\alpha}_1 = -k_1 \mathbf{z}_1, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = -k_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{f}_2 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1. \end{cases} \tag{46}$$

设计反演自适应跟踪控制器 (BSAC)

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \\ \bar{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{X}_2 - \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1, \\ \bar{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{X}_3 - \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2, \\ \mathbf{u}_{\text{BSAC}} = -k_3 \bar{\mathbf{z}}_3 - \mathbf{f}_3 - \hat{\mathbf{G}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_2 - \bar{\mathbf{z}}_2, \\ \dot{\hat{\mathbf{G}}} = \Gamma^{-1} \bar{\mathbf{z}}_3, \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = -k_1 \bar{\mathbf{z}}_1, \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 = -k_2 \bar{\mathbf{z}}_2 - \mathbf{f}_2 + \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_1 - \bar{\mathbf{z}}_1. \end{cases} \tag{47}$$

仿真基本参数如下.

初始状态:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_1(0) &= (20, -18, 12)^T, \\
 \mathbf{X}_2(0) &= \mathbf{X}_3(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T, \\
 T_0 &= 20 \text{ s}, T_1 = 35 \text{ s}, \lambda = 1.
 \end{aligned}$$

约束条件:

$$u_{\max} = 3.$$

控制参数:

$$\rho_1 = 0.1, a_1 = 0.1, b_1 = 0.15,$$

$$\rho_2 = 0.5, a_2 = 0.8, b_2 = 0.25,$$

$$\rho_3 = 2, a_3 = 1.7, b_3 = 0.85,$$

$$\Gamma = \text{diag}(0.05, 0.05, 0.05).$$

仿真时间为80s,基于MLATC控制器的仿真结果如图2~图5所示.图2为系统输出 y 的轨迹,图3为系统实际状态变量 X_2 对虚拟控制输入 α_1 的轨迹跟踪曲线,图4为状态变量 X_3 对虚拟控制输入 α_2 的轨迹跟踪曲线,图5为存在控制饱和约束条件下的控制力矩变化曲线.

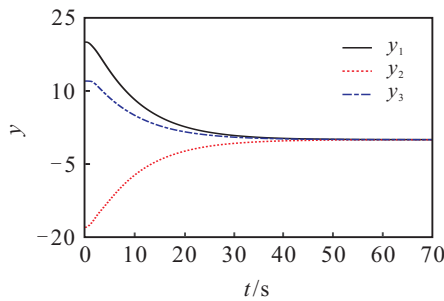


图2 系统输出 y 变化轨迹(MLATC)

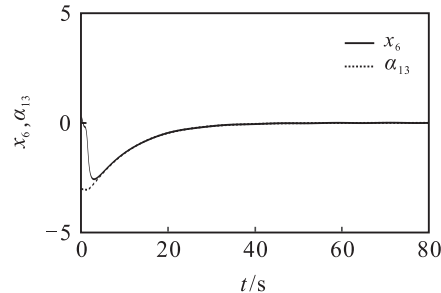
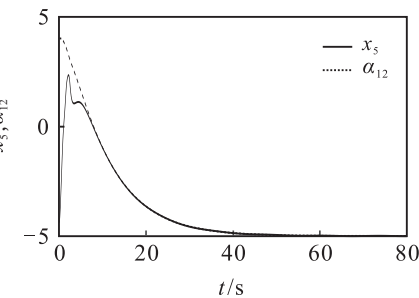
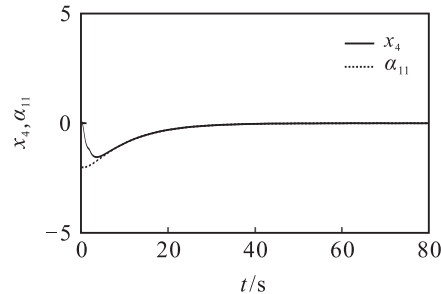


图3 X_2 对 α_1 的跟踪轨迹(MLATC)

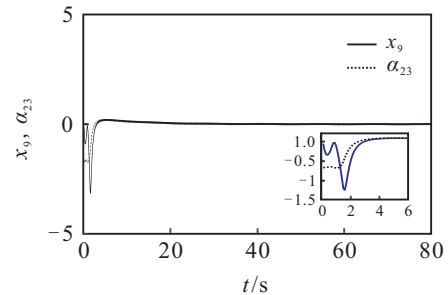
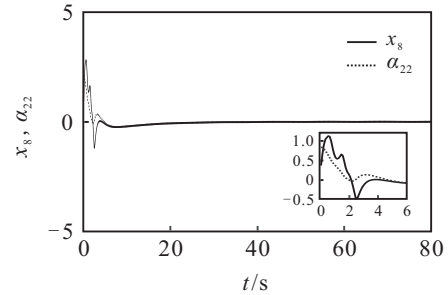
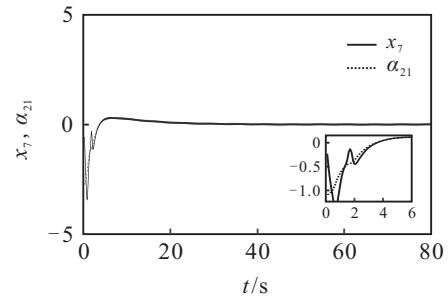


图4 X_3 对 α_2 的跟踪轨迹(MLATC)

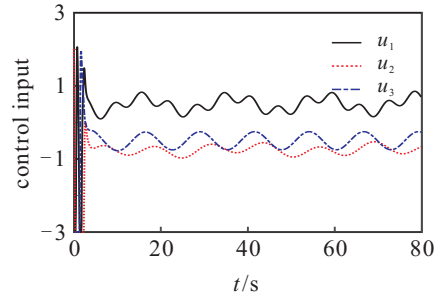


图5 控制输入轨迹(MLATC)

由图2~图5可知,在多环跟踪控制器下,三阶广义非线性系统的输出 y 呈指数收敛到期望轨迹 y_d .图3和图4显示,在该控制器下,状态变量 X_2 和 X_3 分别先以指数收敛的速度快速跟踪上虚拟控制输入 α_1 和 α_2 的轨迹,再按照 α_1 和 α_2 的轨迹变化呈指数收敛到0,该变化规律和注1中的分析结果相同.对比图2、图3和图4可以看出, X_3 收敛到 α_2 的速度要快于 X_2 收敛到 α_1 的速度,而 X_2 收敛到 α_1 的速度要快于 y 收敛到 y_d 的速度.这说明在多环跟踪控制过程中,最内环系统的收敛速度决定着外环系统的收敛性和收敛速度.一般来说,内环系统的轨迹跟踪速度要快于外环系统的轨迹跟踪速度.由图5可知,在执行器存在控制饱和的约束下,控制输入刚开始会出现控制饱和现象,随着最内环系统的输出精确跟踪上外环的虚拟控制输入后,控制输入将一直保持

在最大允许控制输入范围内变化.对比分析图4和图5可以看出,最初出现控制饱和的原因是因为最内环系统需要较大的控制输入,以驱动内环系统输出 \mathbf{X}_3 快速跟踪虚拟控制输入 α_2 .

图2~图5的结果表明,基于多环自适应跟踪控制器的广义三阶非线性系统能够较好地实现对期望轨迹的精确跟踪,且跟踪轨迹变化性态较好.该控制器对外部干扰和系统内部参数未知摄动具有较强的鲁棒性,且满足了控制器存在控制饱和的物理约束.

在相同仿真参数和控制饱和和约束条件下,采用BSAC控制器,仿真结果显示系统是发散的.剔除控制饱和和约束,分别基于BSAC和MLATC控制器作数值仿真,仿真结果见图6和图7.

在没考虑控制饱和约束的条件下,数值仿真结果显示:三阶非线性系统在BSAC控制器下的收敛速度要比MLATC快,但BSAC的控制力矩要远远大于MLATC的控制力矩.图7显示,BSAC控制器在最初的控制力矩达到 $-1600\text{ N}\cdot\text{m}$,MLATC的最大力矩为 $-8\text{ N}\cdot\text{m}$.分析仿真结果可以看出,在考虑控制饱和和约束时,BSAC控制器导致系统发散的主要原因是BSAC控制器在控制初期需要较大的力矩,当控制输入限幅后,控制输入达不到系统稳定所需要的控制力矩,系统会出现发散现象.

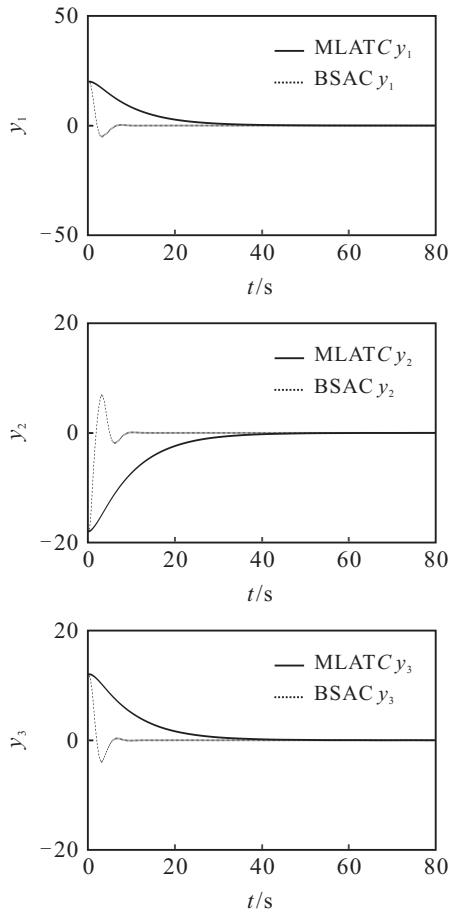


图6 系统输出 y 变化轨迹

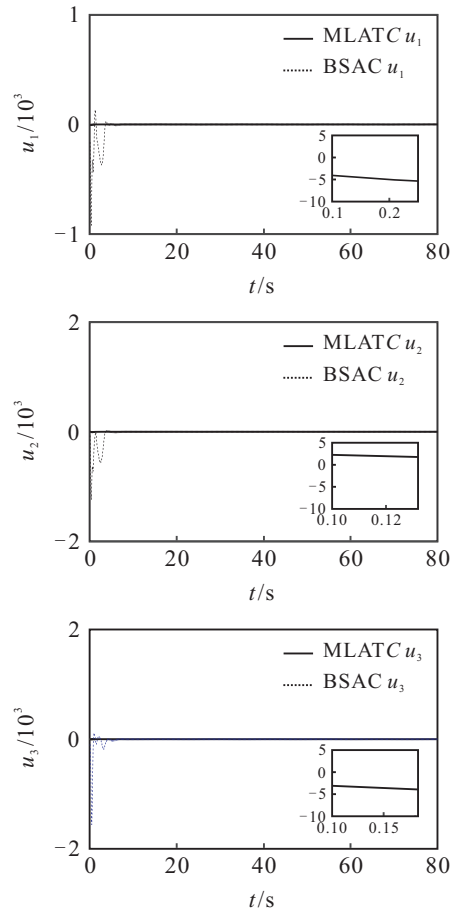


图7 控制输入轨迹

5 结论

对含控制饱和约束及参数摄动的广义高阶非线性系统,给出一种多环自适应跟踪控制策略.

1) 引入辅助系统用于预测控制输入饱和和超幅部分,将显含控制饱和约束的 n 阶非线性系统,转换成含不确定干扰的常规非线性方程,降低了非线性控制器的设计难度.

2) 考虑了系统参数未知摄动、外部干扰和控制饱和的约束.对由参数摄动、外部干扰和控制饱和和超幅力矩组成的不确定项,构造了自适应补偿器对其进行补偿,给出了基于估值的非线性自适应控制器.非线性自适应控制器具有较强的鲁棒性,且更符合实际需求,扩大了控制器适用范围.

3) 将广义 n 阶非线性系统的跟踪控制问题分解成 n 个独立的一阶非线性系统的跟踪控制问题.对每一阶系统分别设计非线性跟踪控制器,简化了非线性系统控制器的设计过程,增加了 n 阶非线性系统控制器设计的灵活性.基于李雅普诺夫稳定性理论,证明了多环跟踪控制策略的合理性和闭环系统的全局渐近稳定性.

4) 根据状态变量的大小变化趋势,给出一种变增益函数代替常值增益,能够有效降低控制初期的控制

能量消耗.

参考文献(References)

- [1] Kokotovic P V, Freeman R A. Robust nonlinear control design: State-space and lyapunov techniques[M]. Berlin: Springer, 1996.
- [2] 孙丞, 孙鹤旭, 刁心薇. 一类非齐次高阶非线性系统的连续反馈控制设计[J]. 自动化学报, 2014, 40(1): 149-155.
(Sun C, Sun H X, Diao X W. Continuous feedback control design for a class of non-homogeneous high-order nonlinear systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(1): 149-155.)
- [3] Sun Z Y, Liu Y G, Xie X J. Global stabilization for a class of high-order time-delay nonlinear systems[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2011, 7(2): 7119-7130.
- [4] 周映江, 王莉, 孙长银. 一类非线性系统的全局渐近稳定和有限时间镇定[J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 664-672.
(Zhou Y J, Wang L, Sun C Y. Global asymptotic and finite-time stability for nonlinear systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(5): 664-672.)
- [5] 满永超, 刘允刚. 高阶不确定非线性系统线性状态反馈自适应控制设计[J]. 自动化学报, 2014, 40(1): 24-32.
(Man Y C, Liu Y G. Adaptive control design via linear state-feedback for high-order uncertain nonlinear systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(1): 24-32.)
- [6] Davila J. Attitude control of spacecraft using robust backstepping controller based on high order sliding[C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control(GNC) Conf. Boston: MA, 2013: 19-22.
- [7] Zhao L, Jia Y M. Finit-time attitude tracking control for a rigid spacecraft using time-varying terminal sliding mode techniques[J]. Int J of Control, 2015, 88(6): 1150-1162.
- [8] Zhong C X, Guo Y, Wang L. Fuzzy active disturbance rejection attitude control of spacecraft with unknown disturbance and parametric uncertainty[J]. Int J of Control and Automation, 2015, 8(8): 233-242.
- [9] 温盛军, 毕淑慧, 邓明聪. 一类新非线性控制方法: 基于演算子理论的控制方法综述[J]. 自动化学报, 2013, 39(11): 1812-1819.
(Wen S J, Bi S H, Deng M C. Survey of new nonlinear control technique: an operator-based approach[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(11): 1812-1819.)
- [10] 苏磊, 姚宏, 杜军, 等. 基于NDO的高阶非线性系统自适应反推滑模控制[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2014, 42(10): 47-51.
(Su L, Yao H, Du J, et al. NDO-based adaptive backstepping sliding mode control of high-order nonlinear systems[J]. J Huazhong University of Science & Technology: Natural Science Edition, 2014, 42(10): 47-51.)
- [11] Tiwari P M, Janardhanan S. Rigid spacecraft attitude control using adaptive non-singular fast terminal sliding mode[J]. J of Control, Automation and Electrical Systems, 2015(26): 115-124.
- [12] 刘敏, 徐世杰, 韩潮. 挠性航天器的退步直接自适应姿态跟踪控制[J]. 航空学报, 2012, 33(9): 1697-1705.
(Liu M, Xu S J, Han C. Direct adaptive attitude tracking control of flexible spacecraft based on backstepping method[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(9): 1697-1705.)
- [13] 闵颖颖, 刘允刚. Barbalat引理及其在系统稳定性分析中的应用[J]. 山东大学学报: 工学版, 2007, 37(1): 51-55.
(Min Y Y, Liu Y G. Barbalat lemma and its application in analysis of system stability[J]. J of Shandong University: Engineering Science, 2007, 37(1): 51-55.)
- [14] Yeh F K. Sliding-mode adaptive attitude controller design for spacecrafts with thrusters[J]. IET Control Theory & Applications, 2010, 4(7): 1254-1264.

(责任编辑: 齐 霁)