

# 基于新型 Abel 型有限和不等式的时滞系统稳定性判据

林 崇<sup>†</sup>, 赵 南, 陈 兵

(青岛大学 复杂性科学研究所, 山东 青岛 266071)

**摘 要:** 针对线性离散时滞系统的时滞相关稳定性问题进行研究, 提出一个新的有限和不等式, 是 Abel 型不等式的进一步推广. 利用这一不等式和构造适当的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 给出新的离散时滞系统稳定性判别准则, 并应用数值例子进行验证. 验证结果表明, 所提出方法与 Abel 型不等式方法相比, 能够获得更大的允许上界, 比用自由权方法使用更少的决策变量, 降低了数值计算负担, 进一步表明了所得结果的有效性和优越性.

**关键词:** 时滞系统; 有限和不等式; 离散系统; 稳定性分析

**中图分类号:** TP273      **文献标志码:** A

## Further improvement of Abel lemma-based finite-sum inequality and application for linear discrete time-delay systems

LIN Chong<sup>†</sup>, ZHAO Nan, CHEN Bing

(Institute of Complexity Science, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

**Abstract:** This paper is concerned with stability of linear discrete time-delay systems. Firstly, a new finite-sum inequality is proposed, which is the further promotion for Abel lemma-based finite-sum inequality. Then, by using the inequality and constructing appropriate Lyapunov-Krasovskii functionals(LKFs), a new delay-dependent stability criteria is obtained in terms of linear matrix inequalities(LMIs). Numerical examples are given to demonstrate that the proposed method can provide a larger admissible maximum upper bound than those using the Abel lemma-based finite-sum inequality approach, and it involves less decision variables than the free-weighting matrix method.

**Keywords:** time-delay system; finite-sum inequality; discrete-time system; stability analysis

### 0 引 言

时滞现象广泛存在于机械系统、电气系统、经济系统和生物系统. 在实际系统中, 时滞的存在会降低系统性能, 甚至导致系统不稳定, 因此对时滞系统的稳定性研究具有重要的实际价值<sup>[1]</sup>, 引起了国内外众多学者的广泛关注<sup>[2-10]</sup>. 目前, 研究热点是如何获得有效的时滞系统的稳定性判据来降低其保守性. 一方面, 在基于李雅普诺夫稳定性理论基础之上, 如何构造恰当的 Lyapunov 泛函尤为重要<sup>[5-10]</sup>; 另一方面, 对于连续时滞系统, 如何处理 Lyapunov 泛函的导数对结果的保守性也具有较大影响. 研究方法不尽相同, 有自由权方法<sup>[6]</sup>、倒数凸组合方法<sup>[7]</sup>、积分不等式方法<sup>[8-11]</sup>等, 尤其文献 [8-9] 减少了对一重积分项和二重积分项的放大程度. 对于离散时滞系统, 关键是如何处理泛函差分时的求和项, 文献 [11] 提出了

Jensen 型不等式方法; 文献 [12] 提出了改进型 Jensen 不等式; 之后文献 [4,13] 考虑到在计算泛函差分时忽略了一些重要项, 应用自由权方法得到了保守性更小的稳定性判据, 但由于决策变量太多, 导致计算负担过重, 文献 [14] 在不忽略求和项有用信息的前提下, 提出一种新的不等式, 使结果进一步提高. 最近, 文献 [15] 提出了 Abel 型有限项和不等式, 在不增加计算负担的情况下, 得到了保守性更小的稳定性判据. 文献 [15] 也指出文献 [12] 与文献 [10] 中的方法是等价的.

本文首先给出了一个新的有限和不等式, 是 Abel 型有限项和不等式的提高, 也是对文献 [9] 中积分不等式在离散域内的推广; 其次, 通过构造恰当 Lyapunov 泛函和运用所提出的新不等式, 提出了新的时滞系统的稳定性准则, 并通过数值例子验证了所

收稿日期: 2016-06-22; 修回日期: 2016-09-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61673227, 61473160).

作者简介: 林崇 (1967—), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统稳定性、鲁棒控制理论等研究; 赵南 (1992—), 女, 硕士生, 从事时滞系统、控制理论的研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: linchong\_2004@hotmail.com

提出方法的有效性.

### 1 问题描述

考虑如下线性时滞离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d), \\ x(\theta) = \phi(\theta), \theta = -d, -d+1, \dots, 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(k) \in \mathbf{R}^n$  为状态变量,  $\mathbf{R}^n$  为  $n$  维欧几里德空间;  $\phi(\theta)$  为初始函数; 时间延迟  $d$  为正整数;  $A, A_d \in \mathbf{R}^{n \times n}$  且为已知常数矩阵. 记  $\eta(k) = x(k+1) - x(k)$ .

**引理 1**<sup>[10]</sup> 对于任意的正定矩阵  $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 正整数  $r_1$  和  $r_2, r = r_2 - r_1 > 1$ , 有如下不等式成立:

$$\sum_{j=r_1}^{r_2-1} \eta^T(j) R \eta(j) \geq \frac{1}{r} \Omega_1^T R \Omega_1, \quad (2)$$

其中

$$\Omega_1 = x(r_2) - x(r_1). \quad (3)$$

**引理 2**<sup>[15]</sup> 对于任意的正定矩阵  $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 正整数  $r_1$  和  $r_2, r = r_2 - r_1 > 1$ , 有如下不等式成立:

$$\sum_{j=r_1}^{r_2-1} \eta^T(j) R \eta(j) \geq \frac{1}{r} \Omega_1^T R \Omega_1 + \frac{3(r-1)}{r(r+1)} \Omega_2^T R \Omega_2. \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= x(r_2) - x(r_1), \\ \Omega_2 &= x(r_2) + x(r_1) - \frac{2}{r-1} \sum_{j=r_1+1}^{r_2-1} x(j). \end{aligned} \quad (5)$$

引理 1 是 Jensen 型不等式, 引理 2 为基于 Abel 型有限和的不等式.

### 2 Abel 型有限和不等式的推广

为了进一步降低系统的保守性, 在不使用 Abel 定理的基础上, 提出一种比 Abel 型有限和不等式更为广泛的不等式.

**定理 1** 对于任意的正定矩阵  $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 正整数  $r_1$  和  $r_2, r = r_2 - r_1 > 2$ , 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=r_1}^{r_2-1} \eta^T(j) R \eta(j) \geq \\ &\frac{1}{r} \Omega_1^T R \Omega_1 + \frac{3(r-1)}{r(r+1)} \Omega_2^T R \Omega_2 + \\ &\frac{5(r-1)(r-2)}{r(r+1)(r+2)} \Omega_3^T R \Omega_3. \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= x(r_2) - x(r_1) + \frac{6r}{(r-1)(r-2)} \sum_{j=r_1+1}^{r_2-1} x(j) - \\ &\frac{12}{(r-1)(r-2)} \sum_{j=r_1+1}^{r_2-1} \sum_{i=j}^{r_2-1} x(i); \end{aligned} \quad (7)$$

$\Omega_1, \Omega_2$  与引理 2 中定义相同.

**证明** 设  $\psi_i(j)$  是关于  $j$  和  $r_1, r_2$  的函数, 定义

$$p_i(j) = \sum_{j=r_1}^{r_2-1} \psi_i^2(j), \quad \Omega_i(\eta) = \sum_{j=r_1}^{r_2-1} \psi_i(j) \eta(j),$$

并令

$$V(\eta) = \sum_{j=r_1}^{r_2-1} \eta^T(j) R \eta(j), \quad Z(j) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \psi_i(j) \Omega_i(\eta),$$

当  $\forall i = 1, 2, \dots$  且  $\forall i \neq k$  时满足下式:

$$\sum_{j=r_1}^{r_2-1} \psi_i \psi_k = 0, \quad (8)$$

可以得到

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=r_1}^{r_2-1} [\eta(j) - z(j)]^T R [\eta(j) - z(j)] = \\ &\sum_{j=r_1}^{r_2-1} \{ \eta^T(j) R \eta(j) - 2z^T(j) R \eta(j) + z^T(j) R z(j) \} = \\ &\sum_{j=r_1}^{r_2-1} \eta^T(j) R \eta(j) - \\ &2 \sum_{j=r_1}^{r_2-1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \psi_i(j) \Omega_i(\eta) \right)^T R \eta(j) + \\ &\sum_{j=r_1}^{r_2-1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \psi_i(j) \Omega_i(\eta) \right)^T R \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \psi_k(j) \Omega_k(\eta) \right) = \\ &V(\eta) - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \Omega_i^T(\eta) R \sum_{j=r_1}^{r_2-1} \psi_i(j) \eta(j) + \\ &\sum_{j=r_1}^{r_2-1} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^2} \psi_i^2(j) \Omega_i^T(\eta) R \Omega_i(\eta) \right\} = \\ &V(\eta) - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \Omega_i(\eta)^T R \Omega_i(\eta) + \\ &\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^2} \Omega_i^T(\eta) R \Omega_i(\eta) = \\ &V(\eta) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \Omega_i^T(\eta) R \Omega_i(\eta), \end{aligned}$$

即

$$\sum_{j=r_1}^{r_2-1} \eta^T(j) R \eta(j) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \Omega_i^T(\eta) R \Omega_i(\eta). \quad (9)$$

当  $\psi_i(i = 1, 2, 3)$  时, 可令

$$\psi_1(j) = 1, \quad (10)$$

$$\psi_2(j) = 2(j - r_1) - r + 1, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(j) &= (j - r_1)^2 - (r - 1)(j - r_1) + \\ &\frac{(r - 1)(r - 2)}{6}. \end{aligned} \quad (12)$$

可以看出  $\psi_i(j) (i = 1, 2, 3)$  满足式 (8), 有

$$p_1 = \sum_{j=r_1}^{r_2-1} \psi_1^2(j) = r, \quad (13)$$

$$p_2 = \sum_{j=r_1}^{r_2-1} \psi_2^2(j) = \frac{r(r-1)(r+1)}{3}, \quad (14)$$

$$p_3 = \sum_{j=r_1}^{r_2-1} \psi_3^2(j) = \frac{(r-2)(r-1)r(r+1)(r+2)}{180}. \quad (15)$$

代入式(9),可得

$$V(\eta) \geq \frac{1}{r} \Omega_1^T R \Omega_1 + \frac{3}{r(r-1)(r+1)} \Omega_2^T R \Omega_2 + \frac{180}{(r-2)(r-1)r(r+1)(r+2)} \Omega_3^T R \Omega_3. \quad (16)$$

其中当 $\eta(j) = x(j+1) - x(j)$ 时,可得

$$\Omega_1(\eta) = r, \quad (17)$$

$$\Omega_2(\eta) = (r-1) \left\{ x(r_2) + x(r_1) - \frac{2}{r-1} \sum_{j=r_1+1}^{r_2-1} x(j) \right\}, \quad (18)$$

$$\Omega_3(\eta) = \frac{(r-1)(r-2)}{6} \{ (x(r_2) - x(r_1)) + r \sum_{j=r_1+1}^{r_2-1} x(j) - 2 \sum_{j=r_1+1}^{r_2-1} \sum_{i=j}^{r_2-1} x(i) \}. \quad (19)$$

将式(17)~(19)代入(16)整理可得(6). □

**注1** 定理1是由式(9)中令 $i = 1, 2, 3$ 获得的,在式(6)中,当 $d > 2$ 时,由 $\frac{5(r-1)(r-2)}{r(r+1)(r+2)} > 0$ 可知,定理1是引理2<sup>[15]</sup>中Abel型有限和不等式的推广形式,因此也优于文献[12]中的方法.另外,定理1也是文献[9]中积分不等式在离散域内的推广.因此,运用定理1,可预见下节获得的新的时滞相关稳定性判据具有更低的保守性.

### 3 主要结果

**定理2** 定义 $e_i \in \mathbf{R}^{n \times 4n} (i = 1, 2, 3, 4)$ ,其中第 $i$ 块为 $n$ 维单位阵,其他相应块为零矩阵,例如 $e_2 = [0 \ I \ 0 \ 0]$ .

对于系统(1),给定 $d > 2$ ,如果存在适当的正定矩阵 $P > 0, Q > 0$ 和 $R > 0$ ,使如下线性矩阵不等式成立:

$$\Psi_1 + \Psi_2 < 0, \quad (20)$$

则系统是渐近稳定的.其中

$$\Psi_1 = \Pi_1^T P \Pi_1 - \Pi_2^T P \Pi_2 + e_1^T Q e_1 - e_2^T Q e_2 + d^2 \Pi_4^T R \Pi_4, \quad (21)$$

$$\Psi_2 = -\Pi_5^T R \Pi_5 - \frac{3(d-1)}{d+1} \Pi_6^T R \Pi_6 - \frac{5(d-1)(d-2)}{(d+2)(d+1)} \Pi_7^T R \Pi_7, \quad (22)$$

$$\Pi_1 = \left[ \Pi_3^T, e_1^T + (d-1)e_3^T, \right.$$

$$\left. \frac{(d-1)(d-2)}{6} e_4^T + d e_1^T \right]^T,$$

$$\Pi_2 = \left[ e_1^T, e_2^T + (d-1)e_3^T, \frac{(d-1)(d-2)}{6} e_4^T + (d-1)e_3^T + e_2^T \right]^T,$$

$$\Pi_3 = A e_1 + A_d e_2, \Pi_4 = \Pi_3 - e_1,$$

$$\Pi_5 = e_1 - e_2, \Pi_6 = e_1 + e_2 - 2e_3,$$

$$\Pi_7 = e_1 - e_2 + \frac{6d}{d-2} e_3 - 2e_4.$$

**证明** 构造如下Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$V(k) = \zeta^T(k) P \zeta(k) + \sum_{j=k-d}^{k-1} x^T(j) Q x(j) +$$

$$d \sum_{j=-d}^{k-1} \sum_{i=k+j}^{k-1} \eta^T(i) R \eta(i). \quad (23)$$

定义

$$\zeta(k) = \left\{ x^T(k), \sum_{j=k-d}^{k-1} x^T(j), \sum_{j=k-d}^{k-1} \sum_{i=j}^{k-1} x^T(i) \right\}^T,$$

$$\xi(k) = \left\{ x^T(k), x^T(k-d), \frac{1}{d-1} \sum_{j=k-d+1}^{k-1} x^T(j), \right.$$

$$\left. \frac{6}{(d-1)(d-2)} \sum_{j=k-d+1}^{k-1} \sum_{i=j}^{k-1} x^T(i) \right\}^T,$$

$$\eta(j) = x(j+1) - x(j),$$

则 $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ ,可得

$$\Delta V(k) =$$

$$\zeta^T(k+1) P \zeta(k+1) - \zeta^T(k) P \zeta(k) + x^T(k) Q x(k) - x^T(k-d) Q x(k-d) +$$

$$d^2 \eta^T(k) R \eta(k) - d \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta^T(j) R \eta(j) =$$

$$\xi^T(k) \Psi_1 \xi(k) - d \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta^T(j) R \eta(j). \quad (24)$$

由定理1,如下不等式成立:

$$-d \sum_{j=k-d}^{k-1} \eta^T(j) R \eta(j) \leq$$

$$\Omega_1^T R \Omega_1 + \frac{3(d-1)}{(d+1)} \Omega_2^T R \Omega_2 +$$

$$\frac{5(d-1)(d-2)}{(d+1)(d+2)} \Omega_3^T R \Omega_3 \leq$$

$$\xi^T(k) \Psi_2 \xi(k), \quad (25)$$

其中 $\Psi_1, \Psi_2$ 由式(21)和(22)定义.联立式(24)和(25),由(20)可得 $\Delta V(k) \leq \xi^T(k) (\Psi_1 + \Psi_2) \xi(k) < 0$ .由李雅普诺夫稳定定理可知系统(1)是渐近稳定的. □

**注2** 定理1运用推广的有限和不等式,获得了

一个新的时滞相关稳定性判据. 与文献[15]相比, 在 Lyapunov 泛函相同前提下, 增广向量  $\zeta(k)$  和  $\xi(k)$  分别引入二重求和项  $\frac{6}{(d-1)(d-2)} \sum_{j=k-d+1}^{k-1} \sum_{i=j}^{k-1} x^T(i)$  和  $\sum_{j=k-d}^{k-1} \sum_{i=j}^{k-1} x^T(i)$ , 对于降低稳定性判据的保守性具有重要作用. 与文献[12]中自由权矩阵方法相比, 尽可能地减少了决策变量的个数. 由数值例子可知, 定理 1 能获得更大的时滞上限.

### 4 数值例子

考虑离散时滞系统(1), 系统参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.91 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

通过对不同方法求出的使系统保持稳定的最大时滞上界及决策变量个数进行比较, 结果见表 1. 可以看出, 利用本文方法可以获得更大的时滞上界. 另外, 具有常时滞的离散系统可通过 lifting 技术求得理论上的稳定性上界, 本例的解析解为 58. 由表 1 可以看出本文方法可以达到理论值, 而且可以看出采用 lifting 技术需要变量的个数很多, 进一步表明了本文方法的优越性.

表 1 系统稳定的最大时滞上限值  $d_{max}$

方法	$d_{max}$	决策变量个数
文献[10]方法	42	9
文献[12]方法	42	16
文献[3]方法	42	17
文献[15]方法	57	16
Theorem 2	58	27
Lifting technique	58	6786

### 5 结 论

本文研究了线性离散时滞系统的稳定性问题. 首先提出了一种新的有限和不等式, 是 Abel 型有限和不等式的推广. 通过构造恰当的 Lyapunov 泛函, 给出了新的稳定性判据, 所获得的结果与当前运用的不等式方法和自由权方法相比, 具有较好的优越性, 并通过数值例子验证了所提出方法的有效性.

#### 参考文献(References)

[1] Gu K, Kharitonov V L, Chen Jie. Stability of time-delay systems[M]. Basel: Birkhauser, 2003.  
 [2] Gao H, Chen T. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay[J]. IEEE Trans on

Automatic Control, 2007, 52(2): 328-334.  
 [3] Xu S, Lam J, Zhou Y. Improved conditions for delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain discrete time-delay systems[J]. Asian J of Control, 2005, 7(3): 344-348.  
 [4] Zhang B, Xu S, Zou Y. Improved stability criterion and its applications in delayed controller design for discrete-time systems[J]. Automatica, 2008, 44(11): 2963-2967.  
 [5] He Y, Wang Q G, Lin C. Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems[J]. Int J of Robust Nonlinear Control, 2005, 15(18): 923-933.  
 [6] Zeng H B, He Y, Wu M, et al. Free-matrix-based integral inequality for stability analysis of systems with time-varying delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2015, 60(10): 2768-2772.  
 [7] Park P G, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238.  
 [8] Hien L V, Trinh H M. Refined Jensen-based inequality approach to stability analysis of time-delay systems[J]. IET Control Theory Applications, 2015, 9(14): 2188-2194.  
 [9] Kim, J-H. Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems[J]. Automatica, 2016, 64(1): 121-125.  
 [10] Jiang X, Han Q L, Yu X. Stability criteria for linear discrete time systems with interval-like time-varying delay[C]. American Control Conf, 2005: 2817-2822.  
 [11] Zhang X M, Han Q L. A new finite sum inequality approach to delay-dependent  $H_\infty$  control of discrete-time systems with time-varying delay[J]. Int J Robust Nonlinear Control, 2008, 18: 630-647.  
 [12] He Y, Wu M, Liu G P, et al. Output feedback stabilization for a discrete time system with a time-varying delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(10): 2372-2377.  
 [13] Shao H, Han Q L. New stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56: 619-625.  
 [14] Peng C. Improved delay-dependent stabilisation criteria for discrete systems with a new finite sum inequality[J]. IET Control Theory Applications, 2012, 6(6): 448-453.  
 [15] Zhang X M, Han Q L. Abel lemma-based finite-sum inequality and its application to stability analysis for linear discrete time-delay systems[J]. Automatica, 2015, 57: 199-202.

(责任编辑: 孙艺红)