文章编号: 1001-0920(2017)11-2021-13 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.1049

基于标准否定函数的WIC-IVIFOWA算子及其应用

杨 艺, 吕红霞, 李延来†

(1. 西南交通大学 交通运输与物流学院，成都 610031；
2. 西南交通大学 综合交通运输智能化国家地方联合工程实验室，成都 610031)

摘 要: 首先,通过实例探究现存连续区间直觉模糊有序加权平均(C-IVIFOWA)算子的不足,引入标准否定函数(standard negation),构造对偶连续区间有序加权平均(DC-OWA)算子,进而提出改进的连续区间直觉模糊有序加权平均(IC-IVIFOWA)算子;然后,针对多个区间直觉模糊评价信息的集结问题,基于IC-IVIFOWA算子提出改进的加权连续区间直觉模糊有序加权平均(WIC-IVIFOWA)算子,证明了算子的相关性质;最后,运用WIC-IVIFOWA算子提出一种区间直觉模糊多属性决策方法,并通过实例表明所提出方法的有效性.

关键词: 区间直觉模糊算子；标准否定函数；IC-IVIFOWA算子；WIC-IVIFOWA算子；群决策

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

WIC-IVIFOWA operator based on standard negatiom and its application

YANG Yi, LV Hong-xia, LI Yan-lai†

(1. School of Transportation and Logistics，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China；2. National United Engineering Laboratory of Integrated and Intelligent Transportation，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China)

Abstract: The drawbacks of the existing continuous interval-valued intuitionistic fuzzy ordered weighted average(C-IVIFOWA) operator are illustrated by an example, and the standard negation is introduced to develop the dual continuous ordered weighted average(DC-OWA) operator. Then, the improved continuous interval-valued intuitionistic fuzzy ordered weighted average(IC-IVIFOWA) operator is proposed to overcome the shortages. Based on the IC-IVIFOWA operator, the improved weighted continuous interval-valued intuitionistic fuzzy ordered weighted average(WIC-IVIFOWA) operator is defined to the aggregation of multiple interval-valued intuitionistic fuzzy numbers. Some desirable properties of this operator are proofed. An interval-valued intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making approach is proposed by using the WIC-IVIFOWA operator, and a practical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: IVIFN；standard negation；IC-IVIFOWA operator；WIC-IVIFOWA operator；group decision making

0 引 言

Zadeh[1] 于1965年提出了模糊集理论以解决不确定性问题,该理论已被成功应用于多个领域. 模糊集的局限在于其只考虑了研究对象的隶属度信息. 对此, Atanassov[2] 基于模糊集提出了同时考虑隶属度和非隶属度信息的直觉模糊集. 在实际决策问题中,决策专家因时间限制、信息缺乏等因素而无法提供精确的隶属度和非隶属度信息. Atanassov等[3] 提出的区间直觉模糊集引入了区间值的概念,对直觉模糊集进行了拓展,其隶属度和非隶属度为单位区间的闭子区间,使其有效地提升了解决实际决策问题的能力,因而备受学者关注[4-14].

在属性值为区间直觉模糊数的群决策问题中,为了获取最优方案,区间直觉模糊集的运算和算子尤为重要. Atanassov[4] 定义了区间直觉模糊集的基本运算. 徐泽水[5] 提出了区间直觉模糊加权平均算子和区间直觉模糊加权几何算子. 徐泽水等[6] 研究了区间直觉模糊有序加权平均算子和区间直觉模糊组合算子,并提出了基于区间直觉模糊组合算子的多属性决策方法. Wei等[11] 研究了区间直觉模糊组合有序加权几何平均算子. Wang等[12] 基于Einstein T-模和S-模构造了区间直觉模糊Einstein集结算子. Wang

收稿日期: 2016-08-17；**修回日期:** 2016-12-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71371156).

作者简介: 杨艺(1990−), 男, 博士生, 从事模糊理论、决策分析的研究；吕红霞(1969−), 女, 教授, 博士生导师, 从事交通运输信息技术、交通运输组织优化等研究.

†通讯作者. E-mail: yanlaili@home.swjtu.edu.cn

等[13]基于阿基米德T-模和S-模提出了广义的区间直觉模糊集结算子.

事实上,上述算子作为直觉模糊集结算子[15-17]的直接拓展,在集结过程中着重考虑了区间内的极大值和极小值,进而弱化了区间内其他值的作用. 对此,Zhou等[14]引入连续区间有序加权平均(C-OWA)算子[15],提出了考虑态度特征的连续区间直觉模糊有序加权平均(C-IVIFOWA)算子. 为了有效地集结权重异化的区间直觉模糊数组,基于C-IVIFOWA算子和直觉模糊加权平均(IFWA)算子[16],Zhou等[14]构造了加权连续区间直觉模糊有序加权平均(WC-IVIFOWA)算子,并在案例中分析了态度特征λ的不同取值对集结结果的影响. 然而,实例研究发现,C-IVIFOWA算子在集结区间直觉模糊数$\tilde{\alpha}=([\mu_{\tilde{\alpha}}^-,\mu_{\tilde{\alpha}}^+],[v_{\tilde{\alpha}}^-,v_{\tilde{\alpha}}^+])$时存在两点不足:其一,不同的区间直觉模糊数对应的C-IVIFOWA算子关于λ的单调性不一致;其二,集结后的值无法取得包含在$\tilde{\alpha}$区域内的最大直觉模糊数$(\mu_{\tilde{\alpha}}^+,v_{\tilde{\alpha}}^-)$和最小直觉模糊数$(\mu_{\tilde{\alpha}}^-,v_{\tilde{\alpha}}^+)$. 以上不足使得WC-IVIFOWA算子关于$\lambda$并不单调,故有必要对其作出改进.

标准否定函数(standard negation)[17]与直觉模糊集存在密切关联. Beliakov等[18]指出直觉模糊数$\alpha=(\mu,v)$的约束条件可以表示成$\mu\leqslant N(v)$,其中N为标准否定函数. Xia等[19]用关于N对偶的T-模和S-模定义了直觉模糊数的运算法则,并研究了一系列的直觉模糊集结算子. Beliakov等[20]基于标准否定函数提出了直觉模糊加权拟算术平均算子. 鉴于此,本文首先引入标准否定函数,提出改进的C-IVIFOWA(IC-IVIFOWA)算子,证明其基本性质,并通过实例对比分析IC-IVIFOWA算子与C-IVIFOWA算子;然后,基于IC-IVIFOWA算子和IFWA算子提出WIC-IVIFOWA算子,证明算子的幂等性、有界性、单调性以及关于态度特征的单调性,并提出基于WIC-IVIFOWA算子的区间直觉模糊环境下的多属性群决策方法;最后,通过高校引进海外人才的案例分析表明该方法的可行性,并探究不同的参数λ对决策结果的影响.

1 预备知识

1.1 直觉模糊集与算子

下面给出直觉模糊集的相关定义.

定义1[1] 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为给定的集合,则X上的直觉模糊集A定义如下:

$$A=\{\langle x_i,\mu_A(x_i),v_A(x_i)\rangle|x_i\in X\},\tag{1}$$

其中$\mu_A(x_i)$和$v_A(x_i)$分别表示元素x_i属于集合A的隶属度和非隶属度. 二元组$(\mu_A(x_i),v_A(x_i))$被称为直觉模糊数(IFN),为了方便,直觉模糊数被简记为$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},v_{\alpha_i})$. 其中:$\mu_{\alpha_i}\in[0,1],v_{\alpha_i}\in[0,1],\mu_{\alpha_i}+v_{\alpha_i}\leqslant 1$.

定义2[21] 设$\alpha_1=(\mu_{\alpha_1},v_{\alpha_1}),\alpha_2=(\mu_{\alpha_2},v_{\alpha_2}),\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$为3个直觉模糊数,其基本运算如下:

1) $\alpha_1\oplus\alpha_2=(\mu_{\alpha_1}+\mu_{\alpha_2}-\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2},v_{\alpha_1}v_{\alpha_2})$;

2) $k\alpha=(1-(1-\mu_\alpha)^k,v_\alpha^k)$.

定义3[21] 设$\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$为直觉模糊数,称$s(\alpha)=\mu_\alpha-v_\alpha$和$h(\alpha)=\mu_\alpha+v_\alpha$分别为$\alpha$的记分函数和精确度函数.

为了比较两个直觉模糊数$\alpha_1=(\mu_{\alpha_1},v_{\alpha_1}),\alpha_2=(\mu_{\alpha_2},v_{\alpha_2})$,Xu等[21]提出了以下对比方法:

1) 若$s(\alpha_1)>s(\alpha_2)$,则$\alpha_1>\alpha_2$.

2) 若$s(\alpha_1)=s(\alpha_2)$,则有:

i) 当$h(\alpha_1)>h(\alpha_2)$时,$\alpha_1>\alpha_2$;

ii) 当$h(\alpha_1)=h(\alpha_2)$时,$\alpha_1=\alpha_2$.

为了集结直觉模糊数组,文献[16]基于直觉模糊数的运算规则提出了直觉模糊加权平均(IFWA)算子,其定义如下.

定义4[16] 设$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},v_{\alpha_i})(i=1,2,\cdots,n)$为一组直觉模糊数. 直觉模糊加权平均(IFWA)算子为映射IFWA : $L^n\to L$,满足

$$\mathrm{IFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\bigoplus_{i=1}^n(\omega_i\alpha_i)=\Big(1-\prod_{i=1}^n(1-\mu_i)^{\omega_i},\prod_{j=1}^n(v_i)^{\omega_i}\Big),\tag{2}$$

$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$为权重向量,且$\sum\limits_{j=1}^n\omega_i=1,\omega_i\in[0,1]$.

Xu[16]进一步研究了IFWA算子的幂等性、单调性、有界性等相关性质.

1.2 区间直觉模糊集

Atanassov等[3]将区间值的概念拓展到直觉模糊集中,提出了区间直觉模糊集.

定义5[3] 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为给定的集合,则X上的区间直觉模糊集$\tilde{A}$定义为

$$\tilde{A}=\{\langle x_i,\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_i),\tilde{v}_{\tilde{A}}(x_i)\rangle|x_i\in X\},\tag{3}$$

其中$\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)\subset[0,1]$和$\tilde{v}_{\tilde{A}}(x_i)\subset[0,1]$分别表示隶属度区间和非隶属度区间,且对于任意的$x_i\in X$满足$\sup\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)+\sup\tilde{v}_{\tilde{A}}(x_i)\leqslant 1$.

为了方便,令$\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)=[\tilde{\mu}_{\tilde{A}}^-(x_i),\tilde{\mu}_{\tilde{A}}^+(x_i)],\tilde{v}_{\tilde{A}}(x_i)=[\tilde{v}_{\tilde{A}}^-(x_i),\tilde{v}_{\tilde{A}}^+(x_i)]$. $(\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_i),\tilde{v}_{\tilde{A}}(x_i))$被称为区间直觉模糊数(IVIFN),任意的IVIFN被简记为$\tilde{\alpha}=(\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}},\tilde{v}_{\tilde{\alpha}})=([\tilde{\mu}_\alpha^-,\tilde{\mu}_\alpha^+],[\tilde{v}_\alpha^-,\tilde{v}_\alpha^+])$. 其中:$0\leqslant\tilde{\mu}_\alpha^-\leqslant\tilde{\mu}_\alpha^+\leqslant 1,0\leqslant\tilde{v}_\alpha^-\leqslant\tilde{v}_\alpha^+\leqslant 1,\tilde{\mu}_\alpha^++\tilde{v}_\alpha^+\leqslant 1$.

1.3　标准否定函数与直觉模糊集之间的关系

首先回顾否定函数与集结函数的相关定义.

定义6 [17]　$\eta(x)$为否定函数,若$\eta:[0,1]\to[0,1]$满足以下条件:

(C1) $\eta:[0,1]\to[0,1]$是连续的;

(C2) $\eta(0)=1,\eta(1)=0$;

(C3) 对于任意的$x>y,\eta(x)<\eta(y)$;

(C4) $\eta(\eta(x))=x$.

当否定函数$\eta(x)=1-x$时,η被称为标准否定函数(standard negation). 为了方便,记标准否定函数为N.

集结算子是多属性决策问题中信息集结过程的重要工具,其定义如下.

定义7 [17]　设η为给定的否定函数,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n,(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in[0,1]^n$为任意的$n$维数组.

1) 集结算子f为映射$f:[0,1]^n\to[0,1]$,且满足: i) $f(0,0,\cdots,0)=0,f(1,1,\cdots,1)=1$; ii) 若$x_i\leqslant y_i(i=1,2,\cdots,n)$,则有$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

2) f的对偶集结算子为

$$f_d(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\\ \eta(f(\eta(x_1),\eta(x_2),\cdots,\eta(x_n))),$$

其中$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$.

下面将从两方面探究标准否定函数与直觉模糊集之间联系.

1) 对于任意的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$,设集结函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{w_i},$$

若否定函数η为标准否定函数N,则根据定义7,易得

$$f_d(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{w_i}.$$

进而,根据定义4可得直觉模糊加权平均(IFWA)算子的替换形式为

$$\text{IFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\\ (f(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),f_d(v_1,v_2,\cdots,v_n)).\tag{4}$$

式(4)表明, 隶属度组$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$对应的集结算子$f$与非隶属度组$(v_1,v_2,\cdots,v_n)$对应的集结算子$f_d$关于标准否定函数$N$对偶.

2) 对于任意的直觉模糊数$\alpha=(\mu,v)$,根据定义1,α的约束条件为$\mu+v\leqslant 1$. Beliakov等[18]基于标准否定函数N提出了上述约束条件的等价形式$\mu\leqslant N(v)$或$v\leqslant N(\mu)$.

上述分析为第2节中构造集结算子奠定了基础.

1.4　C-OWA算子

Yager[15]根据区间数的特点对有序加权平均(OWA)算子进行了拓展, 提出了连续区间有序加权平均(C-OWA)算子.

首先回顾OWA算子的相关内容.

定义8 [22]　OWA算子为映射$F:R^n\to R$,满足

$$F(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb_j.\tag{5}$$

其中: b_j为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$中第j大的元素,$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\rm T}$为关联权向量,且$\sum_{j=1}^{n}w_j=1,w_j\in[0,1]$.

定义9 [22]　OWA算子的态度特征(attitudinal-character)定义如下:

$$\text{A-C}(\boldsymbol{w})=\sum_{j=1}^{n}w_j((n-j)/(n-1)),\tag{6}$$

其中$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\rm T}$为关联权向量.

Yager[22]提出OWA算子的权重可以由单位区间单调(BUM)函数$Q:[0,1]\to[0,1]$获得. 函数Q具有以下性质: 1) $Q(0)=0$; 2) $Q(1)=1$; 3) 若$x>y$,则$Q(x)>Q(y)$. 权重的获取方式如下:

$$w_j=Q(j/n)-Q((j-1)/n).\tag{7}$$

为了深入研究BUM函数Q在OWA算子中的作用,Yager[15]定义了Q的态度特征.

定义10 [15]　Q为BUM函数,其态度特征为

$$\text{A-C}(Q)=\int_0^1 Q(y)\mathrm{d}y,\ \text{A-C}(Q)\in[0,1].\tag{8}$$

为了方便,记A-C(Q)为λ.

定理1 [15]　设A-C(Q)为BUM函数的态度特征,则

$$\text{A-C}(Q)=1-\int_0^1 y(\mathrm{d}Q(y)/y)\mathrm{d}y.\tag{9}$$

下面给出连续区间有序加权平均算子的定义.

定义11 [15]　C-OWA算子为映射$F_Q:V\to R^+$,满足

$$F_Q([a,b])=\int_0^1\frac{\mathrm{d}Q(y)}{\mathrm{d}y}(b-y(b-a))\mathrm{d}y.\tag{10}$$

其中: $[a,b]\in V$,V为所有非负区间组成的集合; Q为单位区间单调(BUM)函数.

文献[15]提供了C-OWA算子的具体由来.

根据定义8,当OWA算子的权重由$w_i=Q(i/n)-Q((i-1)/n)$确定时,有

$$F_Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Q(i/n)-Q((i-1)/n))d_{\text{index}(i)}, \tag{11}$$

其中$d_{\text{index}(i)}$为$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$中第i大的元素. 下面利用无穷逼近的方法将离散情况拓展到连续区间$[a,b]$上. 令$\delta=(b-a)/n, d_{\text{index}(i)}=b-i\delta$. 于是,当$i=0$时, $d_{\text{index}(0)}=b$;当$i=n$时, $d_{\text{index}(n)}=a$; 易得$d_{\text{index}(i)}\geqslant d_{\text{index}(i+1)}$. 对$F_Q([a,b])$进行无穷逼近,进而有

$$F_Q([a,b])\approx F_Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)= \sum_{i=1}^{n}\Big(Q\Big(\frac{i}{n}\Big)-Q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big)(b-i\delta). \tag{12}$$

令$\Delta y=1/n$,又$\delta=(b-a)/n$,则有

$$F_Q([a,b])\approx \sum_{i=1}^{n}(Q(i\Delta y)-Q((i-1)\Delta y))(b-i\Delta y(b-a)). \tag{13}$$

记$y=i\Delta y$,则$y\in[0,1]$. 对式(13)两边取极限,当$n\to\infty$,则有

$$F_Q([a,b])=\int_0^1\frac{\mathrm{d}Q(y)}{\mathrm{d}y}(b-y(b-a))\mathrm{d}y. \tag{14}$$

C-OWA算子的理论解释为本文在第2.2节中构造的对偶连续区间有序加权平均(DC-OWA)算子提供了理论依据.

下面给出C-OWA算子的基本性质.

定理2 (单调性)[15] 设$a_1\geqslant a_2, b_1\geqslant b_2$,对于任意的BUM函数$Q$,有

$$F_Q([a_1,b_1])\geqslant F_Q([a_2,b_2]). \tag{15}$$

定义12[15] 设Q_1,Q_2为两个BUM函数,且对于任意的$y\in[0,1]$,满足$Q_1(y)\geqslant Q_2(y)$,则记$Q_1\geqslant Q_2$.

定理3 (关于Q的单调性)[15] 若$Q_1\geqslant Q_2$,则

$$F_{Q_1}([a,b])\geqslant F_{Q_2}([a,b]). \tag{16}$$

定理4 (有界性)[15] 对于任意的BUM函数Q,有

$$a\leqslant F_Q([a,b])\leqslant b. \tag{17}$$

定理5 (单调性)[15] 若BUM函数Q的态度特征为λ,则

$$F_Q([a,b])=\lambda b+(1-\lambda)a. \tag{18}$$

对于任意的BUM函数$Q,\lambda\in[0,1]$,根据定理5,易知$F_Q([a,b])$是关于λ递增的,且: 1) 当$\lambda=0$时, $F_Q([a,b])=a$; 2) 当$\lambda=0.5$时, $F_Q([a,b])=(a+b)/2$; 3) 当$\lambda=1$时, $F_Q([a,b])=b$. 因此,决策者可以根据BUM函数的具体形式决定态度特征λ的值. 龚艳冰等[23]将λ作为决策者的风险偏好. 在本文中,将利用λ表征决策者的态度:当$0\leqslant\lambda<0.5$时,决策者持乐观态度;当$0.5<\lambda\leqslant1$时,决策者持悲观态度;当$\lambda=0.5$时,决策者持中间态度. C-OWA算子的特点在于融合了决策者的态度特征,对区间内的每一个数据进行集结,进而获取含参数(态度特征λ)的集结值.

1.5 C-IVIFOWA算子与WC-IVIFOWA算子

在集结区间直觉模糊数的过程中,为了考虑区间内的所有数据, Zhou等[14]将C-OWA算子拓展到区间直觉模糊数中,提出了直觉模糊有序加权平均(C-IVIFOWA)算子. 为了集结多个区间直觉模糊数, Zhou等进一步构造了加权连续区间直觉模糊有序加权平均(WC-IVIFOWA)算子.

C-IVIFOWA算子可以将单个区间直觉模糊数转换成直觉模糊数,其定义如下.

定义13[14] 连续区间直觉模糊有序加权平均(C-IVIFOWA)算子为映射$g_Q: M\to L$,满足

$$g_Q(\tilde{\alpha})=(\mu_{g_Q(\tilde{\alpha})},v_{g_Q(\tilde{\alpha})})= (F_Q([\tilde{\mu}_\alpha^-,\tilde{\mu}_\alpha^+]),F_Q([\tilde{v}_\alpha^-,\tilde{v}_\alpha^+])). \tag{19}$$

其中: $\tilde{\alpha}=(\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}},\tilde{v}_{\tilde{\alpha}})=([\tilde{\mu}_\alpha^-,\tilde{\mu}_\alpha^+],[\tilde{v}_\alpha^-,\tilde{v}_\alpha^+])$, F_Q为C-OWA算子, Q为BUM函数.

定理6[14] 若λ为BUM函数Q的态度特征,则

$$g_Q(\tilde{\alpha})=(\lambda\tilde{\mu}_\alpha^++(1-\lambda)\tilde{\mu}_\alpha^-,\lambda\tilde{v}_\alpha^++(1-\lambda)\tilde{v}_\alpha^-). \tag{20}$$

定理7 (有界性)[14] 设$\tilde{\alpha}=([\tilde{\mu}_\alpha^-,\tilde{\mu}_\alpha^+],[\tilde{v}_\alpha^-,\tilde{v}_\alpha^+])$为区间直觉模糊数, λ为BUM函数Q的态度特征, g_Q为C-IVIFOWA算子,则

$$(\tilde{\mu}_\alpha^-,\tilde{v}_\alpha^+)\leqslant g_Q(\tilde{\alpha})\leqslant(\tilde{\mu}_\alpha^+,\tilde{v}_\alpha^-). \tag{21}$$

定理8[14] 设$\tilde{\alpha}=([\tilde{\mu}_\alpha^-,\tilde{\mu}_\alpha^+],[\tilde{v}_\alpha^-,\tilde{v}_\alpha^+])$为区间直觉模糊数, Q为BUM函数, g_Q为C-IVIFOWA算子, $Q_1\geqslant Q_2$.

1) 若$\tilde{\mu}_\alpha^+-\tilde{\mu}_\alpha^-\geqslant\tilde{v}_\alpha^+-\tilde{v}_\alpha^-$,则$g_{Q_1}(\tilde{\alpha})\geqslant g_{Q_2}(\tilde{\alpha})$;

2) 若$\tilde{\mu}_\alpha^+-\tilde{\mu}_\alpha^-\leqslant\tilde{v}_\alpha^+-\tilde{v}_\alpha^-$,则$g_{Q_1}(\tilde{\alpha})\leqslant g_{Q_2}(\tilde{\alpha})$.

定义14[14] 设$\tilde{\alpha}_i=(\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}_i},\tilde{v}_{\tilde{\alpha}_i})(i=1,2,\cdots,n)$为一组区间直觉模糊数,加权连续区间直觉模糊有序加权(WC-IVIFOWA)算子为映射$h: M^n\to L$,满足

$$h_Q(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\bigoplus_{i=1}^{n}(\omega_i g_Q(\tilde{\alpha}_i))= \Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_Q(\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}_i}))^{\omega_i},\prod_{i=1}^{n}(F_Q(\tilde{v}_{\tilde{\alpha}_i}))^{\omega_i}\Big). \tag{22}$$

其中: $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$为$\tilde{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$的权重向量, G_Q为C-IVIFOWA算子.

WC-IVIFOWA算子虽然结合了C-OWA算子和IFWA算子, 但算子中的态度特征λ并不能合理表征决策者的态度, 具体原因将在下一节中详细给出.

2　IC-IVIFOWA 与 WIC-IVIFOWA 算子

本节将提出改进的连续区间直觉模糊有序加权平均 (IC-IVIFOWA) 算子, 该算子由 C-OWA 算子和新构造的对偶连续区间有序加权平均 (DC-OWA) 算子组成. 其中: C-OWA 算子用于集结隶属度区间, DC-OWA 算子用于集结非隶属度区间. IC-IVIFOWA 算子可以有效弥补 C-IVIFOWA 算子的不足, 合理表征决策者的态度. 为了集结多个区间直觉模糊信息, 本文将基于 IC-IVIFOWA 算子提出加权改进直觉模糊有序加权平均 (WIC-IVIFOWA) 算子.

2.1　C-IVIFOWA 算子的不足

下面通过实例探究连续区间直觉模糊有序加权平均 (C-IVIFOWA) 算子的不足.

例 1　设区间直觉模糊数 $\tilde{\alpha} = ([0.10, 0.30], [0.20, 0.50])$, $\tilde{\beta} = ([0.10, 0.30], [0.20, 0.30])$. 设 BUM 函数 $Q_1(x) = 0, Q_2(x) = x, Q_3(x) = 1, \lambda_i$ 为 $Q_i(i = 1, 2, 3)$ 的态度特征.

根据定义 10 和定义 12, 易得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 1, Q_1 \leqslant Q_2 \leqslant Q_3$. 对于任意的 BUM 函数 Q, 其态度特征 $\lambda \in [0, 1]$. 根据定理 6, 有

$$g_Q(\tilde{\alpha}) = (0.2\lambda + 0.1, 0.3\lambda + 0.2),$$
$$g_Q(\tilde{\beta}) = (0.2\lambda + 0.1, 0.1\lambda + 0.2). \tag{23}$$

当 $Q = Q_i$ 时, $\lambda = \lambda_i(i = 1, 2, 3)$, 由式 (23) 可以获取 $g_{Q_i}(\tilde{\alpha})$、$g_{Q_i}(\tilde{\beta})$ 的值, 详情见表 1. 由于 $g_Q(\tilde{\alpha})$、$g_Q(\tilde{\beta})$ 为直觉模糊数, 由定义 3 可得

$$s(g_Q(\tilde{\alpha})) = -0.1\lambda - 0.1,$$
$$s(g_Q(\tilde{\beta})) = 0.1\lambda - 0.1.$$

因此, 当 $\lambda \in [0, 1]$ 时, $g_Q(\tilde{\alpha})$ 关于 λ 递减, $g_Q(\tilde{\beta})$ 关于 λ 递增, 如表 1 所述.

表 1　C-IVIFOWA 算子与 λ 的关系

	$g_Q(\tilde{\alpha})$	$s(g_Q(\tilde{\alpha}))$	$g_Q(\tilde{\beta})$	$s(g_Q(\tilde{\beta}))$
$Q = Q_1$	(0.10, 0.20)	−0.10	(0.10, 0.20)	−0.10
$Q = Q_2$	(0.20, 0.35)	−0.15	(0.20, 0.25)	−0.05
$Q = Q_3$	(0.30, 0.50)	−0.20	(0.30, 0.30)	0.00
增减性	关于 λ 递减		关于 λ 递增	

下面结合表 1 对 C-IVIFOWA 算子进行分析. 根据定理 7, 有

$$(\tilde{\mu}^-_{\tilde{\alpha}}, \tilde{v}^+_{\tilde{\alpha}}) \leqslant g_Q(\tilde{\alpha}) \leqslant (\tilde{\mu}^+_{\tilde{\alpha}}, \tilde{v}^-_{\tilde{\alpha}}),$$
$$(\tilde{\mu}^-_{\tilde{\beta}}, \tilde{v}^+_{\tilde{\alpha}}) \leqslant g_Q(\tilde{\beta}) \leqslant (\tilde{\mu}^+_{\tilde{\beta}}, \tilde{v}^-_{\tilde{\beta}}).$$

而由表 1 可得

$$(0.30, 0.50) \leqslant g_Q(\tilde{\alpha}) \leqslant (0.10, 0.20),$$
$$(0.10, 0.20) \leqslant g_Q(\tilde{\beta}) \leqslant (0.30, 0.30).$$

事实上, 根据直觉模糊数的对比方法易知

$$(\tilde{\mu}^-_{\tilde{\alpha}}, \tilde{v}^+_{\tilde{\alpha}}) = (0.10, 0.50) < (0.30, 0.50),$$
$$(\tilde{\mu}^+_{\tilde{\alpha}}, \tilde{v}^-_{\tilde{\alpha}}) = (0.30, 0.20) > (0.10, 0.20),$$
$$(\tilde{\mu}^-_{\tilde{\beta}}, \tilde{v}^+_{\tilde{\alpha}}) = (0.10, 0.30) < (0.10, 0.20),$$
$$(\tilde{\mu}^+_{\tilde{\beta}}, \tilde{v}^-_{\tilde{\beta}}) = (0.30, 0.20) > (0.30, 0.30).$$

因此, 定理 7 中的有界不等式 (21) 并不合理.

综上分析, C-IVIFOWA 算子存在以下不足:

1) 对于任意的 $\lambda \in [0, 1]$, $g_Q(\tilde{\alpha})$、$g_Q(\tilde{\beta})$ 关于 λ 的单调性不一定相同 (增减性不同), 因此, 态度特征 λ 无法合理表征决策者的态度;

2) 定理 7 中的有界不等式 (21) 并不合理.

下面探讨 C-IVIFOWA 算子存在不足的原因.

对于任意 BUM 函数 Q, 其态度特征 $\lambda \in [0, 1]$, 设区间直觉模糊数 $\tilde{\alpha} = ([\tilde{\mu}^-_\alpha, \tilde{\mu}^+_\alpha], [\tilde{v}^-_\alpha, \tilde{v}^+_\alpha])$, 根据定义 3 和定理 6, 有

$$s(g_Q(\tilde{\alpha})) = \mu_{g_Q(\tilde{\alpha})} - v_{g_Q(\tilde{\alpha})} =$$
$$\lambda(\tilde{\mu}^+_{\tilde{\alpha}} - \tilde{v}^+_{\tilde{\alpha}}) + (1 - \lambda)(\tilde{\mu}^-_{\tilde{\alpha}} - \tilde{v}^-_{\tilde{\alpha}}).$$

对记分函数求导, 可得

$$\partial s/\partial\lambda = (\tilde{\mu}^+_{\tilde{\alpha}} - \tilde{\mu}^-_{\tilde{\alpha}}) - (\tilde{v}^+_{\tilde{\alpha}} - \tilde{v}^-_{\tilde{\alpha}}).$$

易知: 当 $(\tilde{\mu}^+_{\tilde{\alpha}} - \tilde{\mu}^-_{\tilde{\alpha}}) > (\tilde{v}^+_{\tilde{\alpha}} - \tilde{v}^-_{\tilde{\alpha}})$ 时, $s(g_Q(\tilde{\alpha}))$ 关于 λ 递增; 反之, $s(g_Q(\tilde{\alpha}))$ 关于 λ 递减. 因此, $g_Q(\tilde{\alpha})$ 不一定关于 λ 单调递增, 原因在于集结隶属度区间 $\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}}$ 和非隶属度区间 $\tilde{v}_{\tilde{\alpha}}$ 的算子皆为 C-OWA 算子, 即

$$\mu_{g_Q(\tilde{\alpha})} = F_Q(\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}}) = \lambda\tilde{\mu}^+_{\tilde{\alpha}} + (1 - \lambda)\tilde{\mu}^-_{\tilde{\alpha}},$$
$$v_{g_Q(\tilde{\alpha})} = F_Q(\tilde{v}_{\tilde{\alpha}}) = \lambda\tilde{v}^+_{\tilde{\alpha}} + (1 - \lambda)\tilde{v}^-_{\tilde{\alpha}}.$$

显然, $\mu_{g_Q(\tilde{\alpha})}$ 和 $v_{g_Q(\tilde{\alpha})}$ 都关于 λ 递增; 而记分函数 $s(g_Q(\tilde{\alpha}))$ 关于 $\mu_{g_Q(\tilde{\alpha})}$ 递增, 关于 $v_{g_Q(\tilde{\alpha})}$ 递减.

基于上述分析, C-OWA 算子虽适用于隶属度区间的集结, 但并不适用于非隶属度区间的集结. 因此, 研究能够合理集结非隶属度区间的算子是非常必要的.

2.2　DC-OWA 算子

基于对偶集结算子和连续区间有序加权平均 (C-OWA) 算子, 本文将构造对偶连续区间有序加权平均 (DC-OWA) 算子, 并利用该算子集结非隶属度区间.

下面给出 DC-OWA 算子的定义.

定义 15　设 $[a, b]$ 为 $[0, 1]$ 的闭子区间, $F_Q([a, b])$ 为 $[a, b]$ 的 C-OWA 算子, $F_Q([a, b])$ 的对偶 (DC-OWA) 算子为映射 $F^N_Q : [0, 1] \to R^+$, 且满足

$$F^d_Q([a, b]) =$$

$$N\Big(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}Q(y)}{\mathrm{d}y}(N(a)-y(N(a)-N(b)))\mathrm{d}y\Big). \quad (24)$$

定义7中对偶集结算子的输入变量为离散数组,定义5给出的对偶集结算子的输入变量为闭子区间,而一定条件下的有序离散数组通过无穷逼近的方法可以获得闭子区间. 类似于连续区间有序加权平均(C-OWA)算子,下面将基于对偶集结算子给出DC-OWA算子的具体由来.

令$\delta=(b-a)/n, d_i=b-i\delta$,易得$b=d_0\geqslant\cdots\geqslant d_i\geqslant d_{i+1}\geqslant\cdots\geqslant d_n=a$. 当$n\to\infty$时,离散数组$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$近似于区间$[a,b]$,因此有

$$F_Q^d([a,b])\approx F_Q^d(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

根据对偶算子的定义(定义7),有

$$F_Q^d(d_1,d_2,\cdots,d_n)=$$
$$N(F_Q(N(d_1),N(d_2),\cdots,N(d_n))).$$

进而

$$F_Q^d([a,b])\approx N(F_Q(N(d_1),N(d_2),\cdots,N(d_n))).$$

令$c_i=N(d_{n-i})$,则有

$$N(a)=c_0\geqslant\cdots\geqslant c_i\geqslant c_{i+1}\geqslant\cdots\geqslant c_n=N(b),$$
$$F_Q^d([a,b])\approx N(F_Q(c_1,c_2,\cdots,c_n))=$$
$$N\Big(\sum_{i=1}^n(Q(i/n\ )-Q((i-1)/n\ ))c_i\Big).$$

令$\delta'=(N(a)-N(b))/n$,根据$\delta=(b-a)/n, d_i=b-i\delta$,有

$$c_i=N(d_{n-i})=1-a-i\frac{b-a}{n}=$$
$$N(a)-i\frac{(N(a)-N(b))}{n}=N(a)-i\delta'.$$

进一步,可得

$$F_Q^d([a,b])\approx$$
$$N\Big(\sum_{i=1}^n\Big(Q\Big(\frac{i}{n}\Big)-Q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big)(N(a)-i\delta')\Big).$$

令$\Delta y=1/n$,且$\delta'=(N(a)-N(b))/n$,则有

$$F_Q^d([a,b])\approx$$
$$N\Big(\sum_{i=1}^n(Q(i\Delta y)-Q((i-1)\Delta y))\times$$
$$(N(a)-i\Delta y(N(a)-N(b)))\Big). \quad (25)$$

记$y=i\Delta y$,则$y\in[0,1]$. 对式(25)两边取极限,当$n\to\infty$时,有

$$F_Q^d([a,b])=$$
$$N\Big(\int_0^1\frac{\mathrm{d}Q(y)}{\mathrm{d}y}(N(a)-y(N(a)-N(b)))\mathrm{d}y\Big). \quad (26)$$

在接下来的内容中特将F_Q^d记为F_Q^N.

下面定理将给出C-OWA算子与DC-OWA算子之间的关系.

定理9 设$[a,b]$为$[0,1]$的闭子区间,$F_Q([a,b])$为$[a,b]$的C-OWA算子,F_Q^N为DC-OWA算子,则有

$$F_Q^N([a,b])=N(F_Q([N(b),N(a)])),$$
$$F_Q([a,b])=N(F_Q^N([N(b),N(a)])). \quad (27)$$

证明 根据定义11,有

$$F_Q([N(b),N(a)])=$$
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}Q(y)}{\mathrm{d}y}(N(a)-y(N(a)-N(b)))\mathrm{d}y.$$

由定义15,易知

$$F_Q^N([a,b])=N(F_Q([N(b),N(a)])).$$

类似可证

$$F_Q([a,b])=N(F_Q^N([N(b),N(a)])). \qquad \square$$

类似于C-OWA算子,DC-OWA算子与态度特征λ之间的关系如下述定理所述.

定理10 若λ为BUM函数Q的态度特征,则

$$F_Q^N([a,b])=\lambda a+(1-\lambda)b. \quad (28)$$

证明 根据定理5和定理9,得

$$F_Q^N([a,b])=N(F_Q([N(b),N(a)]))=$$
$$1-((1-\lambda)(1-b)+\lambda(1-a))=$$
$$\lambda a+(1-\lambda)b. \qquad \square$$

下面给出DC-OWA算子的相关性质.

定理11 (单调性) 设$a_1\geqslant a_2, b_1\geqslant b_2$,对于任意的BUM函数$Q$,有

$$F_Q^N([a_1,b_1])\geqslant F_Q^N([a_2,b_2]). \quad (29)$$

证明 根据定理10,得

$$F_Q^N([a_1,b_1])-F_Q^N([a_2,b_2])=$$
$$\lambda(a_1-a_2)+(1-\lambda)(b_1-b_2)\geqslant 0. \qquad \square$$

定理12 (关于Q的单调性) 若$Q_1\geqslant Q_2$,则

$$F_{Q_1}^N([a,b])\leqslant F_{Q_2}^N([a,b]). \quad (30)$$

证明 设λ_1和λ_2分别为Q_1和Q_2的态度特征系数,根据定理9,有

$$F_{Q_1}^N([a,b])-F_{Q_2}^N([a,b])=$$
$$(\lambda_1-\lambda_2)a-(\lambda_1-\lambda_2)b\leqslant 0. \qquad \square$$

定理13 (有界性) 对于任意的BUM函数Q,有

$$a\leqslant F_Q^N([a,b])\leqslant b. \quad (31)$$

证明 根据定理10, $F_Q^N([a,b])$可以表示成关于λ的函数

$$f(\lambda)=\lambda a+(1-\lambda)b.$$

显然,$f(\lambda)$关于λ单调递减,则有

$$f(1)\leqslant f(\lambda)\leqslant f(0),\ a\leqslant F_Q^N([a,b])\,b. \qquad \square$$

定理11～定理13表明,对偶C-OWA算子(DC-OWA)满足集结算子的基本性质,由定理12易知,DC-OWA算子关于态度特征λ递减. 下面将基于C-OWA算子和DC-OWA算子构造改进的C-IVIFOWA算子,并表明DC-OWA算子适用于非隶属度区间的集结.

注1 在下面内容中,记F_Q为C-OWA算子,F_Q^N为DC-OWA,Q为BUM函数,λ为Q的态度特征.

2.3 IC-IVIFOWA算子

为了克服C-IVIFOWA算子的不足,下面将构造改进连续区间直觉模糊有序加权平均(C-IVIFOWA)算子,其定义如下.

定义16 改进的连续区间直觉模糊有序加权平均(IC-IVIFOWA)算子为映射$G_Q:M\to L$,满足

$$G_Q(\tilde\alpha)=(\mu_{G_Q(\tilde\alpha)},v_{G_Q(\tilde\alpha)})=\\(F_Q([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+]),F_Q^N([\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])), \tag{32}$$

其中$\tilde\alpha=(\tilde\mu_{\tilde\alpha},\tilde v_{\tilde\alpha})=([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+],[\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])$.

由定义16可知,IC-IVIFOWA算子结合了连续区间有序加权平均(C-OWA)算子和对偶连续区间有序加权平均(DC-OWA)算子. 其中:C-OWA算子用于集结隶属度区间,DC-OWA算子用于集结非隶属度区间. 由定义13易知,C-IVIFOWA算子与IC-IVIFOWA算子的主要区别在于非隶属度区间的集结.

下述定理将给出IC-IVIFOWA算子与λ之间的关系.

定理14 设$\tilde\alpha$为区间直觉模糊数,$G_Q(\tilde\alpha)$为DC-IVIFOWA算子,则有

$$G_Q(\tilde\alpha)=(\lambda\tilde\mu_\alpha^++(1-\lambda)\tilde\mu_\alpha^-,(1-\lambda)\tilde v_\alpha^++\lambda\tilde v_\alpha^-), \tag{33}$$

且$G_Q(\tilde\alpha)$为直觉模糊数,G_Q为C-IVIFOWA算子.

证明 1) 根据定理5和定理10,得

$$F_Q([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+])=\lambda\tilde\mu_\alpha^++(1-\lambda)\tilde\mu_\alpha^-,\\F_Q^N([\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])=(1-\lambda)\tilde v_\alpha^++\lambda\tilde v_\alpha^-.$$

因此

$$G_Q(\tilde\alpha)=(\lambda\tilde\mu_\alpha^++(1-\lambda)\tilde\mu_\alpha^-,(1-\lambda)\tilde v_\alpha^++\lambda\tilde v_\alpha^-).$$

2) 根据1)可得

$$\lambda\tilde\mu_\alpha^++(1-\lambda)\tilde\mu_\alpha^-+(1-\lambda)\tilde v_\alpha^++\lambda\tilde v_\alpha^-\leqslant\\\lambda\tilde\mu_\alpha^++(1-\lambda)\tilde\mu_\alpha^++(1-\lambda)\tilde v_\alpha^++\lambda\tilde v_\alpha^+=\\\tilde\mu_\alpha^++\tilde v_\alpha^+\leqslant 1. \qquad\square$$

根据定理14,易得如下推论.

推论1 对于任意$\lambda\in[0,1]$,$G_Q(\tilde\alpha)$关于λ单调递增.

证明 根据定义3和定理14,有

$$s(G_Q(\tilde\alpha))=\lambda(\tilde\mu_{\tilde\alpha}^++\tilde v_{\tilde\alpha}^+-\tilde\mu_{\tilde\alpha}^--\tilde v_{\tilde\alpha}^-)+\tilde\mu_{\tilde\alpha}^--\tilde v_{\tilde\alpha}^+,$$

则对于任意的$\lambda\in[0,1]$,$s(G_Q(\tilde\alpha)$关于λ递增. 根据直觉模糊数的对比方法,$G_Q(\tilde\alpha)$关于λ单调递增. $\square$

定理15 (关于Q的单调性) 若$Q_1\geqslant Q_2$,则

$$G_{Q_1}(\tilde\alpha)\geqslant G_{Q_2}(\tilde\alpha). \tag{34}$$

证明 根据定义16,有

$$G_{Q_1}(\tilde\alpha)=(F_{Q_1}([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+]),F_{Q_1}^N([\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])),\\G_{Q_2}(\tilde\alpha)=(F_{Q_2}([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+]),F_{Q_2}^N([\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])).$$

若$Q_1\geqslant Q_2$,根据定理3和定理12,则有

$$F_{Q_1}([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+])\geqslant F_{Q_2}([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+]),\\F_{Q_1}^N([\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])\leqslant F_{Q_2}^N([\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+]).$$

由定义3易得$G_{Q_1}(\tilde\alpha)\geqslant G_{Q_2}(\tilde\alpha)$. $\square$

定理16 (单调性) 设$\tilde\alpha$和$\tilde\beta$为两个区间直觉模糊数,$\tilde\alpha=([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+],[\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])$,$\tilde\beta=([\tilde\mu_\beta^-,\tilde\mu_\beta^+],[\tilde v_\beta^-,\tilde v_\beta^+])$. 若$\tilde\mu_\alpha^-\geqslant\tilde\mu_\beta^-$,$\tilde\mu_\alpha^+\geqslant\tilde\mu_\beta^+$,$\tilde v_\alpha^-\leqslant\tilde v_\beta^-$,$\tilde v_\alpha^+\leqslant\tilde v_\beta^+$,则

$$G_Q(\tilde\alpha)\geqslant G_Q(\tilde\beta). \tag{35}$$

证明 根据定义16,得

$$G_Q(\tilde\alpha)=(F_Q([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+]),F_Q^N([\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])),\\G_Q(\tilde\beta)=(F_Q([\tilde\mu_\beta^-,\tilde\mu_\beta^+]),F_Q^N([\tilde v_\beta^-,\tilde v_\beta^+])).$$

若$\tilde\mu_\alpha^-\geqslant\tilde\mu_\beta^-$,$\tilde\mu_\alpha^+\geqslant\tilde\mu_\beta^+$,$\tilde v_\alpha^-\leqslant\tilde v_\beta^-$,$\tilde v_\alpha^+\leqslant\tilde v_\beta^+$,根据定理2和定理11,则有

$$F_Q([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+])\geqslant F_Q([\tilde\mu_\beta^-,\tilde\mu_\beta^+]),\\F_Q^N([\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])\leqslant F_Q^N([\tilde v_\beta^-,\tilde v_\beta^+]).$$

由定义3知,$G_Q(\tilde\alpha)\geqslant G_Q(\tilde\beta)$. $\square$

定理17 (有界性) 设$\tilde\alpha=([\tilde\mu_\alpha^-,\tilde\mu_\alpha^+],[\tilde v_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+])$为区间直觉模糊数,$\lambda$为BUM 函数$Q$的态度特征,$G_Q$为DC-IVIFOWA算子,则有

$$(\tilde\mu_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+)\leqslant G_Q(\tilde\alpha)\leqslant(\tilde\mu_\alpha^+,\tilde v_\alpha^-). \tag{36}$$

证明 根据推论1,$G_Q(\tilde\alpha)$关于λ单调递增. 由定理14易得:若$\lambda=0$,则$G_Q(\tilde\alpha)=(\tilde\mu_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+)$;若$\lambda=1$,则$G_Q(\tilde\alpha)=(\tilde\mu_\alpha^+,\tilde v_\alpha^-)$. 因此$(\tilde\mu_\alpha^-,\tilde v_\alpha^+)\leqslant G_Q(\tilde\alpha)\leqslant(\tilde\mu_\alpha^+,\tilde v_\alpha^-)$. $\square$

在第2.1节中的算例分析(例1)中,C-IVIFOWA算子存在两点不足:1)定理7中的有界不等式(21)并不合理;2)对于任意的直觉模糊数,算子不一定关于态度特征λ单调递增. 而根据推论1和定理17,新构

造的IC-IVIFOWA算子显然克服了C-IVIFOWA算子的两点不足,同时表明了DC-OWA适用于对非隶属度区间的集结.

2.4 WIC-IVIFOWA算子

为了集结多个区间直觉模糊评价信息,本文基于改进的连续区间有序加权平均(IC-IVIFOWA)算子提出加权改进的连续区间有序加权平均(WC-IVIFOWA)算子.

下面给出WIC-IVIFOWA算子的定义.

定义17 设$\tilde{\alpha}_i = ([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+], [\tilde{v}_{\alpha_i}^-, \tilde{v}_{\alpha_i}^+])$为一组区间直觉模糊数,其中$i = 1, 2, \cdots, n$. 加权连续区间直觉模糊有序加权(WC-IVIFOWA)算子为映射$\mathrm{WG}_Q : M^n \to L$,满足

$$\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n) = \bigoplus_{i=1}^{n}(\omega_i G_Q(\tilde{\alpha}_i)). \tag{37}$$

其中: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$为权重向量, G_Q为C-IVIFOWA算子.

下述定理表明,WC-IVIFOWA算子融合了IC-IVIFOWA算子和直觉加权平均(IFWA)算子.

定理18 设$\tilde{\alpha}_i = ([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+], [\tilde{v}_{\alpha_i}^-, \tilde{v}_{\alpha_i}^+])$为一组区间直觉模糊数,其中$i = 1, 2, \cdots, n$. WG_Q为WC-IVIFOWA算子,则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n) = \\ &\Big(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i}, \\ &\prod_{i=1}^{n}(F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-, \tilde{v}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i}\Big),\end{aligned} \tag{38}$$

且$\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n)$仍为直觉模糊数(封闭性),其中$\boldsymbol{\omega}$为权重向量.

证明 根据定义16,有

$$G_Q(\tilde{\alpha}_i) = (F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]), F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-, \tilde{v}_{\alpha_i}^+])).$$

由定义4易得

$$\begin{aligned}&\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n) = \\ &\Big(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i}, \\ &\prod_{i=1}^{n}(F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-, \tilde{v}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i}\Big).\end{aligned}$$

下面利用直觉模糊数$\alpha = (\mu, v)$的约束条件$v \leqslant N(\mu)$证明算子的封闭性. 因为

$$\tilde{\mu}_{\alpha_i}^- \leqslant \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+ \leqslant N(\tilde{v}_{\alpha_i}^+) \leqslant N(\tilde{v}_{\alpha_i}^-),$$

根据定理2和定义6,有

$$\begin{aligned}&N\Big(\prod_{i=1}^{n}(F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-, \tilde{v}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i}\Big) = \\ &N\Big(\prod_{i=1}^{n}(N(F_Q([N(\tilde{v}_{\alpha_i}^+), N(\tilde{v}_{\alpha_i}^-)])))^{\omega_i}\Big) \leqslant \\ &N\Big(\prod_{i=1}^{n}(N(F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+])))^{\omega_i}\Big) = \\ &1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i}.\end{aligned}$$

所以, $\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n)$为直觉模糊数. □

注2 为了方便,接下来的内容中记$\boldsymbol{\omega}$为权重向量, G_Q为IC-IVIFOWA算子, WG_Q为WIC-IVIFOWA算子.

下面探讨WIC-IVIFOWA算子的相关性质.

定理19(幂等性) 设$\tilde{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$为一组区间直觉模糊数,且对于所有的$i$满足$\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha} = ([\tilde{\mu}_{\alpha}^-, \tilde{\mu}_{\alpha}^+], [\tilde{v}_{\alpha}^-, \tilde{v}_{\alpha}^+])$,则有

$$\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n) = G_Q(\tilde{\alpha}). \tag{39}$$

证明 根据定义16,若$\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha} (i = 1, 2, \cdots, n)$,则有

$$G_Q(\tilde{\alpha}_i) = (F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha}^-, \tilde{\mu}_{\alpha}^+]), F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha}^-, \tilde{v}_{\alpha}^+])).$$

因此

$$\begin{aligned}&\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n) = \\ &\Big(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha}^-, \tilde{\mu}_{\alpha}^+]))^{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}, \\ &\prod_{i=1}^{n}(F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha}^-, \tilde{v}_{\alpha}^+]))^{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}\Big) = \\ &(F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha}^-, \tilde{\mu}_{\alpha}^+]), F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha}^-, \tilde{v}_{\alpha}^+])) = G_Q(\tilde{\alpha}). \quad \square\end{aligned}$$

定理20(单调性) 设$\tilde{\alpha} = ([\tilde{\mu}_{\alpha}^-, \tilde{\mu}_{\alpha}^+], [\tilde{v}_{\alpha}^-, \tilde{v}_{\alpha}^+])$和$\tilde{\beta}_i = ([\tilde{\mu}_{\beta_i}^-, \tilde{\mu}_{\beta_i}^+], [\tilde{v}_{\beta_i}^-, \tilde{v}_{\beta_i}^+])$为两组直觉模糊数. 若$\tilde{\mu}_{\alpha_i}^- \geqslant \tilde{\mu}_{\beta_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+ \geqslant \tilde{\mu}_{\beta_i}^+, \tilde{v}_{\alpha_i}^- \leqslant \tilde{v}_{\beta_i}^-, \tilde{v}_{\alpha_i}^+ \leqslant \tilde{v}_{\beta_i}^+$,则有

$$\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n) \geqslant \mathrm{WG}_Q(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_n). \tag{40}$$

证明 若$\tilde{\mu}_{\alpha_i}^- \geqslant \tilde{\mu}_{\beta_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+ \geqslant \tilde{\mu}_{\beta_i}^+, \tilde{v}_{\alpha_i}^- \leqslant \tilde{v}_{\beta_i}^-, \tilde{v}_{\alpha_i}^+ \leqslant \tilde{v}_{\beta_i}^+$,根据定理2和定理11,则有

$$\begin{aligned}&F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]) \geqslant F_Q([\tilde{\mu}_{\beta_i}^-, \tilde{\mu}_{\beta_i}^+]), \\ &F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-, \tilde{v}_{\alpha_i}^+]) \leqslant F_Q^N([\tilde{v}_{\beta_i}^-, \tilde{v}_{\beta_i}^+]).\end{aligned}$$

因此,有

$$\begin{aligned}&1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-, \tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i} \geqslant \\ &1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_Q([\tilde{\mu}_{\beta_i}^-, \tilde{\mu}_{\beta_i}^+]))^{\omega_i}.\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-,\tilde{v}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i} \leqslant \prod_{i=1}^{n}(F_Q^N([\tilde{v}_{\beta_i}^-,\tilde{v}_{\beta_i}^+]))^{\omega_i}.$$

根据定理18, 易得

$$\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n) \geqslant \mathrm{WG}_Q(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n). \quad \square$$

定理21 (关于Q的单调性)　若$Q_1 \geqslant Q_2$, 则

$$\mathrm{WG}_{Q_1}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n) \geqslant \mathrm{WG}_{Q_2}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n). \tag{41}$$

证明　若$Q_1 \geqslant Q_2$, 则根据定理3和定理12, 得

$$F_{Q_1}([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-,\tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]) \geqslant F_{Q_2}([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-,\tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]),$$
$$F_{Q_1}^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-,\tilde{v}_{\alpha_i}^+]) \leqslant F_{Q_2}^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-,\tilde{v}_{\alpha_i}^+]).$$

因此, 有

$$1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{Q_1}([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-,\tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i} \geqslant 1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{Q_2}([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-,\tilde{\mu}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i},$$

$$\prod_{i=1}^{n}(F_{Q_1}^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-,\tilde{v}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i} \leqslant \prod_{i=1}^{n}(F_{Q_2}^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-,\tilde{v}_{\alpha_i}^+]))^{\omega_i}.$$

从而

$$\mathrm{WG}_{Q_1}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n) \geqslant \mathrm{WG}_{Q_2}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n). \quad \square$$

推论2　对于任意$\lambda \in [0,1]$, WIC-IVIFOWA算子关于λ单调递增.

定理22 (有界性)

$$\beta_1 \leqslant \mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n) \leqslant \beta_2. \tag{42}$$

其中

$$\beta_1=\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-)^{\omega_i},\prod_{i=1}^{n}(\tilde{v}_{\alpha_i}^+)^{\omega_i}\Big),$$
$$\beta_2=\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\tilde{\mu}_{\alpha_i}^+)^{\omega_i},\prod_{i=1}^{n}(\tilde{v}_{\alpha_i}^-)^{\omega_i}\Big).$$

证明　1) 当$\lambda=0$时, 根据定理5和定理10, 有

$$F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-,\tilde{\mu}_{\alpha_i}^+])=\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-,\ F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-,\tilde{v}_{\alpha_i}^+])=\tilde{v}_{\alpha_i}^+.$$

根据定理18可得$\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\beta_1$.

2) 当$\lambda=1$时, 根据定理5和定理10, 有

$$F_Q([\tilde{\mu}_{\alpha_i}^-,\tilde{\mu}_{\alpha_i}^+])=\tilde{\mu}_{\alpha_i}^+,\ F_Q^N([\tilde{v}_{\alpha_i}^-,\tilde{v}_{\alpha_i}^+])=\tilde{v}_{\alpha_i}^-.$$

由定理18可得$\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\beta_2$.

由推论2可知$\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)$关于$\lambda$单调递增. 因此, 综合1)和2)可得

$$\beta_1 \leqslant \mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n) \leqslant \beta_2. \quad \square$$

下面通过实际例子(例2)分析新构造的IC-IVIFOWA算子和WIC-IVIFOWA算子的合理性.

例2　设直觉模糊数$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$, BUM函数$Q_i(x)$及其态度特征$\lambda_i(i=1,2,3)$都取自例1.

对于任意的BUM函数Q, 其态度特征$\lambda \in [0,1]$. 根据定理14, 有

$$G_Q(\tilde{\alpha})=(0.2\lambda+0.1,-0.3\lambda+0.5),$$
$$G_Q(\tilde{\beta})=(0.2\lambda+0.1,-0.1\lambda+0.3). \tag{43}$$

当$Q=Q_i$时, $\lambda=\lambda_i(i=1,2,3)$, 根据式(43)可以获取$G_{Q_i}(\tilde{\alpha})$、$G_{Q_i}(\tilde{\beta})$的值, 详见表2. 由于$G_Q(\tilde{\alpha})$、$g_Q(\tilde{\beta})$为直觉模糊数, 由定义3可得

$$s(G_Q(\tilde{\alpha}))=0.5\lambda-0.4,$$
$$s(G_Q(\tilde{\beta}))=0.3\lambda-0.2.$$

因此, 当$\lambda \in [0,1]$时, $G_Q(\tilde{\alpha})$、$G_Q(\tilde{\beta})$关于λ递减, 如表2所述.

表2　IC−IVIFOWA算子与λ的关系

	$g_Q(\tilde{\alpha})$	$s(g_Q(\tilde{\alpha}))$	$g_Q(\tilde{\beta})$	$s(g_{Q_i}(\tilde{\beta}))$
$Q=Q_1$	(0.10, 0.50)	−0.40	(0.10, 0.30)	−0.20
$Q=Q_2$	(0.20, 0.35)	−0.15	(0.20, 0.25)	0.05
$Q=Q_3$	(0.30, 0.20)	0.10	(0.30, 0.20)	0.10
增减性	关于λ递增		关于λ递增	

下面根据表2对IC-IVIFOWA算子进行分析:

$$(0.10,0.50) \leqslant G_Q(\tilde{\alpha}) \leqslant (0.30,0.20),$$
$$(0.10,0.30) \leqslant G_Q(\tilde{\beta}) \leqslant (0.30,0.20);$$

即定理17中的有界不等式

$$(\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}}^-,\tilde{v}_{\tilde{\alpha}}^+) \leqslant G_Q(\tilde{\alpha}) \leqslant (\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}}^+,\tilde{v}_{\tilde{\alpha}}^-),$$
$$(\tilde{\mu}_{\tilde{\beta}}^-,\tilde{v}_{\tilde{\alpha}}^+) \leqslant G_Q(\tilde{\beta}) \leqslant (\tilde{\mu}_{\tilde{\beta}}^+,\tilde{v}_{\tilde{\beta}}^-).$$

IC-IVIFOWA算子克服了C-IVIFOWA算子的不足, 其能够合理地表征决策者的态度. 如推论1所述, 对于任意的区间直觉模糊数$\tilde{\alpha}$, 经IC-IVIFOWA算子集结得到的$G_Q(\tilde{\alpha})$关于态度特征λ递增.

基于例2, 下面将对WC-IVIFOWA算子与本文的WIC-IVIFOWA算子进行对比分析. 设w_1、w_2分别为$\tilde{\alpha}$、$\tilde{\beta}$的权重. 分别运用WC-IVIFOWA算子与本文的WIC-IVIFOWA算子对$\tilde{\alpha}$、$\tilde{\beta}$进行集结. 根据定义16、定理6、定理14和定理18, 易得

$$h_Q(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=(0.2\lambda+0.1,(0.3\lambda+0.2)^{w_1}(0.1\lambda+0.2)^{w_2}),$$
$$\mathrm{WG}_Q(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=(0.2\lambda+0.1,(-0.3\lambda+0.5)^{w_1}(-0.1\lambda+0.3)^{w_2}).$$

1) 当$w_1=w_2=0.5$时, 根据BUM函数Q_i的态

度特征$\lambda_i(i=1,2,3)$的取值以及记分函数值的排序,可得

$$h_{Q_1}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})<h_{Q_2}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})<h_{Q_3}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}),$$

$$\mathrm{WG}_{Q_1}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})<\mathrm{WG}_{Q_2}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})<\mathrm{WG}_{Q_3}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}).$$

2) 当$w_1=0.7,w_2=0.3$时,易得

$$h_{Q_1}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})>h_{Q_2}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})>h_{Q_3}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}),$$

$$\mathrm{WG}_{Q_1}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})<\mathrm{WG}_{Q_2}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})<\mathrm{WG}_{Q_3}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}).$$

上述分析表明,当BUM函数$\lambda_i(i=1,2,3)$的排序满足$Q_1\leqslant Q_2\leqslant Q_3$时,$h_{Q_i}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})(i=1,2,3)$的排序不一定与$Q_i(i=1,2,3)$保持一致. 而$\mathrm{WG}_{Q_i}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})(i=1,2,3)$的排序始终与$Q_i(i=1,2,3)$一致(由定理21同样可得). 因此,本文提出的WIC-IVIFOWA算子能够合理地集结区间直觉模糊数组,且能合理表征决策者的态度特征.

3 基于WIC-IVIFOWA算子的群决策方法

在群决策问题中,设$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$为方案集,属性集为$\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$,属性集的权重向量为$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$. 专家集为$\{e_1,e_2,\cdots,e_t\}$,专家的权重向量为$\boldsymbol{l}=(l_1,l_2,\cdots,l_t)^{\mathrm{T}}$. 决策矩阵$\tilde{\boldsymbol{R}}^{(k)}=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{m\times n}$,$\tilde{r}_{ij}^{(k)}=([\mu^-_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}},\mu^+_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}}],[v^-_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}},v^+_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}}])$为专家$e_j\in E$给出的方案$x_i\in X$在属性$c_j\in C$的评价值. $[\mu^-_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}},\mu^+_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}}]$表示方案$x_i$满足属性$c_j$的区间程度,$[v^-_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}},v^+_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}}]$表示方案$x_i$不满足属性$c_j$的区间程度,且满足$[\mu^-_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}},\mu^+_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}}]\subset[0,1]$,$[v^-_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}},v^+_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}}]\subset[0,1]$,$\mu^+_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}}+v^+_{\tilde{r}_{ij}^{(k)}}\leqslant 1$. 基于IFWA算子和本文构造的WIC-IVIFOWA算子,给出属性值为区间直觉模糊数的多属性群决策方法,具体步骤如下.

Step 1: 利用WIC-IVIFOWA算子

$$r_{ij}=\mathrm{WG}_Q(\tilde{r}_{ij}^{(1)},\tilde{r}_{ij}^{(2)},\cdots,\tilde{r}_{ij}^{(t)})=\bigoplus_{k=1}^{t}l_kG_Q(\tilde{r}_{ij}^{(k)})$$

集结所有的决策矩阵$\tilde{\boldsymbol{R}}^{(k)}=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{m\times n}$,进而获得综合决策矩阵$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$. 其中: Q为BUM函数,N为标准否定函数,G_Q为IC-IVIFOWA算子,WG_Q为WIC-IVIFOWA算子.

Step 2: 利用IFWA算子

$$r_i=\mathrm{IFWA}(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{in})=\bigoplus_{j=1}^{n}\omega_jr_{ij}$$

集结每个方案$x_i(i=1,2,\cdots,m)$所对应的直觉模糊数$r_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$,以获取综合评价值$r_i(i=1,2,\cdots,m)$.

Step 3: 利用定义3中的排序方法对综合评价值$r_i(i=1,2,\cdots,m)$进行排序.

Step 4: 根据综合评价值$r_i(i=1,2,\cdots,m)$的排序获取方案$x_i(i=1,2,\cdots,m)$的排序,然后选出最佳方案.

4 实例分析

某高校计划引进海外突出人才来校任教[24],现有5个备选人员(方案): $\{x_1,x_2,\cdots,x_5\}$. 评审专家组由3位校领导构成: 校长e_1,管理学院院长e_2,人事总监e_3. 专家组根据相关调查信息以及备选人的简历对备选人的职业道德c_1、科研能力c_2、教学能力c_3、教育背景c_4四个方面(属性)进行严格评估. 专家$e_k(k=1,2,3)$对备选人$x_i(i=1,2,\cdots,5)$在属性$c_j(j=1,2,3,4)$的评价信息为区间直觉模糊评价矩阵$\boldsymbol{R}^{(k)}=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{5\times 4}(k=1,2,3)$,详细信息见表3 ~ 表5. 下面采用本文方法确定最佳备选人,具体步骤如下.

表 3 专家e_1给出的区间直觉模糊决策矩阵$\tilde{\boldsymbol{R}}^{(1)}$

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])	([0.2, 0.4], [0.2, 0.4])	([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])	([0.4, 0.5], [0.2, 0.4])
x_2	([0.4, 0.8], [0.0, 0.1])	([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])	([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])	([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])
x_3	([0.3, 0.7], [0.2, 0.3])	([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])	([0.1, 0.4], [0.4, 0.5])	([0.3, 0.4], [0.4, 0.6])
x_4	([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])	([0.4, 0.6], [0.2, 0.3])	([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])	([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])
x_5	([0.5, 0.6], [0.3, 0.4])	([0.7, 0.8], [0.1, 0.1]).	([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])	([0.1, 0.3], [0.4, 0.6])

表 4 专家e_2给出的区间直觉模糊决策矩阵$\tilde{\boldsymbol{R}}^{(2)}$

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])	([0.6, 0.7], [0.1, 0.2])	([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])	([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])
x_2	([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])	([0.2, 0.3], [0.4, 0.6])	([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])	([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])
x_3	([0.1, 0.4], [0.4, 0.5])	([0.8, 0.9], [0.1, 0.1])	([0.1, 0.4], [0.2, 0.5])	([0.4, 0.7], [0.2, 0.3])
x_4	([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])	([0.3, 0.8], [0.1, 0.1])	([0.2, 0.3], [0.4, 0.6])	([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])
x_5	([0.2, 0.4], [0.5, 0.6])	([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])	([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])	([0.1, 0.4], [0.3, 0.5])

表 5　专家 e_3 给出的区间直觉模糊决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}^{(3)}$

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])$	$([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])$	$([0.4, 0.7], [0.1, 0.1])$	$([0.7, 0.9], [0.1, 0.1])$
x_2	$([0.2, 0.3], [0.4, 0.6])$	$([0.2, 0.3], [0.4, 0.6])$	$([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])$
x_3	$([0.7, 0.9], [0.1, 0.1])$	$([0.3, 0.4], [0.4, 0.5])$	$([0.1, 0.3], [0.3, 0.5])$	$([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])$
x_4	$([0.3, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.1, 0.2], [0.4, 0.6])$	$([0.2, 0.3], [0.4, 0.5])$	$([0.3, 0.4], [0.4, 0.6])$
x_5	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.3, 0.8], [0.1, 0.1])$	$([0.4, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])$

Step 1: 首先确定专家组的权重向量 $\boldsymbol{l} = (0.5, 0.3, 0.2)^{\mathrm{T}}$, IC-IVOWA 算子的 BUM 函数 $Q(y) = y$. 然后利用 WIC-IVIFOWA 算子集结专家组 $e_k(k = 1, 2, 3)$ 对应的区间直觉模糊评价矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}^{(k)} = (\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{5\times4}$ $(k = 1, 2, 3)$, 进而获取综合评价矩阵 $\boldsymbol{R} = (\tilde{r}_{ij})_{5\times4}$(见表 6).

表 6　综合评价矩阵 $\boldsymbol{R}$

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$(0.5417, 0.2598)$	$(0.4314, 0.2643)$	$(0.6169, 0.1786)$	$(0.5917, 0.1956)$
x_2	$(0.5839, 0.1558)$	$(0.4523, 0.2739)$	$(0.7326, 0.1661)$	$(0.6260, 0.2086)$
x_3	$(0.5300, 0.2483)$	$(0.5655, 0.2866)$	$(0.2403, 0.4076)$	$(0.4092, 0.3977)$
x_4	$(0.6747, 0.1500)$	$(0.4613, 0.2182)$	$(0.5257, 0.2682)$	$(0.6333, 0.2224)$
x_5	$(0.5432, 0.3383)$	$(0.6889, 0.1316)$	$(0.5030, 0.2878)$	$(0.3551, 0.3676)$

Step 2: 根据决策问题的实际情况, 专家组确定属性权重向量 $\boldsymbol{\omega} = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1)^{\mathrm{T}}$, 利用 IFWA 算子集结备选人 $x_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 在属性 $c_j(j = 1, 2, 3, 4)$ 的综合评价信息 $r_{ij}(j = 1, 2, \cdots, 5)$, 进而获取综合评价值 $r_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$. 其中

$$r_1 = (0.5287, 0.2385), r_2 = (0.5784, 0.1986),$$
$$r_3 = (0.4706, 0.3066), r_4 = (0.5767, 0.2013),$$
$$r_5 = (0.5601, 0.2691).$$

Step 3: 利用定义 3 中直觉模糊数的排序方法获取备选人 $x_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 的综合评价值 $r_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 的排序, 有

$$s(r_1) = 0.2902,\ s(r_2) = 0.3798,$$
$$s(r_3) = 0.1640,\ s(r_4) = 0.3754,$$
$$s(r_5) = 0.2909.$$

因此 $s(r_2) > s(r_4) > s(r_5) > s(r_1) > s(r_3)$.

Step 4: 根据综合评价值 $r_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 的排序获取备选人的排序

$$x_2 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3.$$

因此, 最佳备选人为 x_2.

为了分析决策者的态度特征对排序结果的影响, 首先给出一组 BUM 函数

$$Q_i(y) = \mathrm{sign}(i) y^{(10-i)/i},\ i = 0, 1, \cdots, 10,$$

其中 sign 为符号函数. 根据 BUM 函数确定决策者的态度特征 λ, 有

$$\lambda(i) = i/10,\ i = 0, 1, \cdots, 10.$$

于是上述案例中的排序结果与 λ 的关系可见表 7.

表 7　态度特征 λ 与排序

	$s(r_1)$	$s(r_2)$	$s(r_3)$	$s(r_4)$	$s(r_5)$	备选人排序
$\lambda(0)$	0.1409	0.2329	−0.0095	0.2094	0.1634	$x_2 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3$
$\lambda(1)$	0.1704	0.2618	0.0248	0.2421	0.1886	$x_2 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3$
$\lambda(2)$	0.2001	0.2910	0.0593	0.2750	0.2140	$x_2 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3$
$\lambda(3)$	0.2299	0.3203	0.0940	0.3082	0.2395	$x_2 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3$
$\lambda(4)$	0.2600	0.3499	0.1289	0.3416	0.2651	$x_2 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3$
$\lambda(5)$	0.2902	0.3798	0.1640	0.3754	0.2909	$x_2 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3$
$\lambda(6)$	0.3207	0.4100	0.1994	0.4096	0.3170	$x_2 \succ x_4 \succ \boldsymbol{x}_1^* \succ \boldsymbol{x}_5^* \succ x_3$
$\lambda(7)$	0.3514	0.4406	0.2351	0.4442	0.3434	$\boldsymbol{x}_4^* \succ \boldsymbol{x}_2^* \succ x_1 \succ x_5 \succ x_3$
$\lambda(8)$	0.3824	0.4716	0.2713	0.4795	0.3700	$x_4 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_3$
$\lambda(9)$	0.4139	0.5031	0.3078	0.5156	0.3971	$x_4 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_3$
$\lambda(10)$	0.4457	0.5353	0.3450	0.5528	0.4248	$x_4 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_3$

由表7易知: 当决策者的态度特征满足$0.0 \leqslant \lambda \leqslant 0.6$时,最佳备选人为$x_2$;当决策者的态度特征满足$0.7 \leqslant \lambda \leqslant 1.0$时,最佳备选人为$x_4$. 对于备选人$x_1$、$x_5$而言,态度特征在$0.0 \leqslant \lambda \leqslant 0.5$和$0.6 \leqslant \lambda \leqslant 1.0$时备选人$x_1$、$x_5$的排序相反. 虽然备选人$x_i$对应的集结值$r_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$关于决策者的态度特征$\lambda$递增,但增长幅度的相异促使排序发生了改变. 因此,不同的态度特征将会获得不同的排序结果,决策者可以根据不同的BUM函数来确定态度特征λ的取值,最终获取最满意的方案.

若利用文献[6]中提出的基于区间直觉模糊加权平均(IVIFWA)算子的决策方法(简记为方法A),则综合评价值$r_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$对应的记分函数(文献[6]中定义4)值为

$$S(r_1) = 0.293\,3,\ S(r_2) = 0.384\,1,$$
$$S(r_3) = 0.167\,8,\ S(r_4) = 0.381\,1,$$
$$S(r_5) = 0.294\,1.$$

由文献[6]中定义6给出的排序方法易知

$$x_2 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3.$$

因此,最佳备选人为x_2. 当$0.0 \leqslant \lambda \leqslant 0.6$时,利用本文的决策方法获取的最佳备选人与上述方法A获取的结果是一致的.

若利用文献[6]中提出的基于区间直觉模糊几何平均(IVIFWG)的决策方法(简记为方法G),则综合评价值$r_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$对应的记分函数值为

$$S(r_1) = 0.197\,3,\ S(r_2) = 0.275\,4,$$
$$S(r_3) = 0.037\,3,\ S(r_4) = 0.292\,9,$$
$$S(r_5) = 0.200\,9.$$

由文献[6]中定义6给出的排序方法易知

$$x_4 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3.$$

因此,最佳备选人为 x_4. 当$0.7 \leqslant \lambda \leqslant 1.0$时,利用本文的决策方法获取的最佳备选人与上述方法G获取的结果是一致的.

综合上述对比分析,文献[6]中方法G和方法A获取的决策结果因为集结算子的不同而导致获取的最佳备选人不同. 而在本文提供的决策方法中,根据态度特征的不同取值可以获取不同的决策结果,使其可以与方法G和方法A中的决策结果一致,从而表明了WIC-IVIFOWA算子的灵活性和可行性. 在集结多个区间直觉模糊评价信息的过程中,相比文献[6]中区间直觉模糊算子,本文的WIC-IVIFOWA算子的计算复杂度要低,原因在于WIC-IVIFOWA算子将区间直觉模糊数转换成了直觉模糊数.

5 结 论

本文探讨了C-IVIFOWA算子的不足,针对非隶属度区间的集结问题,基于标准否定函数提出了DC-OWA算子. 实例验证表明,基于C-OWA算子和DC-OWA算子构造的IC-IVIFOWA算子有效地弥补了C-IVIFOWA算子的不足. 针对具有异化权重的区间直觉模糊组的集结,提出了WIC-IVIFOWA算子. IC-IVIFOWA算子与WIC-IVIFOWA算子皆关于λ单调递增. 因此,对于改进的算子而言,态度特征λ能够合理反馈决策者的风险偏好. 利用本文提出的决策方法对高校引进的备选海外人才进行选拔,并分析了态度特征λ对决策结果的影响. 实例表明了改进算子的合理性和有效性.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Atanassov K, Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[4] Atanassov K T. Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets Systems, 1994, 64(2): 159-174.

[5] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
(Xu Z S. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 215-219.)

[6] 徐泽水, 陈剑. 一种基于区间直觉判断矩阵的群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(4): 126-133.
(Xu Z S, Chen J. An approach to group decision making based on interval-valued intuitionistic judgment matrices[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2007, 27(4): 126-133.)

[7] 魏翠萍, 夏梅梅, 张玉忠. 基于区间直觉模糊集的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1230-1234.
(Wei C P, Xia M M, Zhang Y Z. Multi-criteria decision-making methods based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1230-1234.)

[8] 刘勇, Jeffrey Forrest, 刘思峰, 等. 基于区间直觉模糊的动态多属性灰色关联决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(9): 1303-1308.
(Liu Y, Jeffrey F, Liu S F, et al. Dynamic multiple

attribute grey incidence decision making method based on interval valued intuitionistic fuzzy number[J]. Control and Decision, 2013, 28(9): 1303-1308.)

[9] 谭吉玉, 朱传喜, 张小芝,等. 基于TOPSIS的区间直觉模糊数排序法[J]. 控制与决策, 2015, 30(11): 2014-2018.
(Tan J Y, Zhu C X, Zhang X Z, et al. Ranking method of interval-valued intuitionistic fuzzy numbers based on TOPSIS[J]. Control and Decision, 2015, 30(11): 2014-2018.)

[10] 邵良杉, 赵琳琳. 区间直觉模糊信息下的双向投影决策模型[J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 571-576.
(Shao L S, Zhao L L. Bidirectional projection method with interval-valued intuitionistic fuzzy information[J]. Control and Decision, 2016, 31(3): 571-576.)

[11] Wei G W, Wang X R. Some geometric aggregation operators based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets and their application to group decision making[C]. 2007 Int Conf on Computational Intelligence and Security. Harbin: IEEE, 2007: 495-499.

[12] Wang W Z, Liu X W. The multi-attribute decision making method based on interval-valued intuitionistic fuzzy Einstein hybrid weighted geometric operator[J]. Computers Mathematics with Applications, 2013, 66(10): 1845-1856.

[13] Wang W Z, Liu X W, Qin Y, et al. Interval-valued intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. J of Systems Engineering Electronics, 2012, 23(4): 574-580.

[14] Zhou L G, Tao Z F, Chen H Y, et al. Continuous interval-valued intuitionistic fuzzy aggregation operators and their applications to group decision making[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(7/8): 2190-2205.

[15] Yager R R. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics — Part B, 2004, 34(5): 1952-1963.

[16] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2008, 14(6): 1179-1187.

[17] Beliakov G, Pradera A, Calvo T, et al. Aggregation functions: A guide for practitioners[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.

[18] Beliakov G, James S. Averaging aggregation functions for preferences expressed as Pythagorean membership grades and fuzzy orthopairs[C]. IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Beijing: IEEE, 2014: 298-305.

[19] Xia M M, Xu Z S, Zhu B, et al. Some issues on intuitionistic fuzzy aggregation operators based on Archimedean t-conorm and t-norm[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 31(7): 78-88.

[20] Beliakov G, Bustince H, Goswami D P, et al. On averaging operators for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(6): 1116-1124.

[21] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.

[22] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18(1): 183-190.

[23] 龚艳冰, 梁雪春. 基于模糊C-OWA算子的模糊多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(8): 1478-1480.
(Gong Y B, Liang X C. Fuzzy multi-attribute decision making method based on fuzzy C-OWA operator[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(8): 1478-1480.)

[24] Yu D J, Wu Y Y, Lu T, et al. Interval-valued intuitionistic fuzzy prioritized operators and their application in group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 30(6): 57-66.

（责任编辑：李君玲）