第 32 卷 第 11 期
2017 年 11 月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.32 No.11
Nov. 2017

文章编号: 1001-0920(2017)11-2107-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.1038

信息分解下区间灰数的关联一致性决策模型

蒋诗泉[1,2†], 刘思峰[1], 刘中侠[1], 方志耕[1]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 铜陵学院 数学与计算机学院，安徽 铜陵 244000)

摘 要: 针对指标值为区间灰数时决策信息得不到充分利用的问题,在决策信息不丢失的前提下,利用信息分解方法将区间灰数分解成实数型的“白部”和“灰部”,并对信息分解下区间灰数的白化值的性质进行研究. 对于指标权重为区间灰数的情况,通过定义区间灰数相离度和接近度构建权重确定的优化模型. 在TOPSIS理论基础上,建立区间灰数序列间的灰色关联的测度方法,进而构建灰色关联一致性系数决策模型. 最后通过算例分析表明所构建模型的可行性和有效性.

关键词: 信息分解；区间灰数；关联一致性决策

中图分类号: N941 **文献标志码:** A

The incidence consistence decision model of interval grey number based on the information decomposition

JIANG Shi-quan[1,2†], *LIU Si-feng*[1], *LIU Zhong-xia*[1], *FANG Zhi-geng*[1]

(1. College of Economic and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China；2. College of Mathematics and Computer Science，Tongling University，Tongling 244000，China)

Abstract: For the problem that information of the interval grey number can not make full use of decision information, on the premise of information without losing, the interval grey number is decomposed into real type sequences of “white sequence” and “grey sequence”, and the whitenization of interval grey numbers are studied based on the information decomposition method. If the index weights are interval grey numbers, the optimization model is constructed to determine weights by defining the interval grey number deviation degree and close degree. The grey correlation between interval grey number sequences is established based on the TOPSIS theory. Then the consistency coefficient of the grey incidence decision-making model is proposed. Finally, an example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed model.

Keywords: information decomposition；interval grey numbers；the consistency coefficient decision-making

0 引 言

灰色决策理论是决策理论的一个重要的分支,灰色关联决策方法是灰色决策理论中的重要方法之一. 近年来,对灰色关联决策模型的研究取得了很大的进展[1-4]. 文献[1]给出了灰色关联决策的基本理论和方法,文献[2-4]在文献[1]研究的基础上,从不同的视角构建了不同的关联度模型及其改进形式,但这些研究主要针对属性值为实数型,并没有真正意义上的区间灰数的灰色关联度模型. 文献[5-7]从区间灰数的角度,对现有的灰色关联度模型进行了拓展,使其适应指标值为区间灰数的形式. 文献[8-10]借鉴区间数和TOPSIS理论,提出了灰色区间关联系数公式,其中包括基于理想点方案的最大关联度方法、基于临界方案的最小关联度方法和同时考虑理想方案和临界方案的综合关联度方法. 由于区间数与区间灰数有着本质上的区别,依此构造的关联度在某种意义上还没有完全体现灰理论思想. 区间灰数的排序是区间灰数决策问题中的关键问题,文献[11]给出了区间灰数分布情况已知情况下的灰数排序问题,由于要求灰数分布已知,使得该方法适应范围变小. 文献[12]提出一种基于相对核与精确度区间灰数的排序方法,该方法在一定程度上解决了区间灰数可能度方法存

收稿日期: 2016-08-14；**修回日期:** 2016-10-31.

基金项目: 安徽省社科规划项目(AHSKY2016D27)；国家自然科学基金与英国皇家学会国际合作交流项目(71111130211)；安徽省高校人文社会科学重点研究项目(SK2017A0534).

作者简介: 蒋诗泉(1974−), 男, 副教授, 博士生, 从事灰色理论、复杂系统建模等研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色理论、数量经济学等研究.

†通讯作者. E-mail: jshq6699@163.com

在的排序的缺陷. 文献[13]研究了区间灰数之间的距离计算方法,通过比较各指标与靶心连线所围成图形面积的大小进行方案优劣排序,该方法能够有效弱化极端指标值对决策的影响. 文献[14]通过定义区间灰数灰度的离散Choquet积分,根据方案属性方差最小原则建立优化模型,提出了Choquet积分的区间灰数多属性决策方法. 指标值为区间灰数的灰色关联决策模型的研究成果颇为丰富. 文献[15]从相似性和接近性的视角,通过构造区间灰数加减逆运算信息还原算子研究了灰色决策模型. 文献[16]建立了基于空间映射的区间灰数序列几何表征体系,将区间灰数序列转换成实数序列,进而构建灰数关联决策模型.

本文针对区间灰数决策时决策信息得不到充分利用的问题,在信息不丢失的情况下,利用信息分解方法将区间灰数序列分解成实数型的"白部序列"和"灰部序列"[17],建立正、负理想方案的"白部"和"灰部"与备选方案的"白部"和"灰部"之间的灰色关联测度方法,进而构建灰色关联一致性系数决策模型.

1 基本概念

定义1 对于任意一个多属性区间灰数的决策矩阵$A(\otimes)=(a_{ij}(\otimes))_{m\times n}$,若指标是效益型,则当$x_j^+\in[a_j^{+L},a_j^{+U}]=[\max(a_{ij}^L),\max(a_{ij}^U)](i=1,2,\cdots,m)$时,称$x_j^+$为正理想点;当$x_j^-\in[a_j^{-L},a_j^{-U}]=[\min(a_{ij}^L),\min(a_{ij}^U)](i=1,2,\cdots,m)$时,称$x_j^-$为负理想点. 若指标为成本型,则当$x_j^+\in[a_j^{+L},a_j^{+U}]=[\min(a_{ij}^L),\min(a_{ij}^U)](i=1,2,\cdots,m)$时,称$x_j^+$为正理想点;当$x_j^-\in[a_j^{-L},a_j^{-U}]=[\max(a_{ij}^L),\max(a_{ij}^U)](i=1,2,\cdots,m)$时,称$x_j^-$为负理想点. 由正理想点构成的序列为正理想序列,记为$X(\otimes)^+=(x_1^+,x_2^+,\cdots,x_n^+)$,由负理想点构成的序列为负理想序列,记为$X(\otimes)^-=(x_1^-,x_2^-,\cdots,x_n^-)$.

定义2[17-18] 设区间灰数序列

$$X(\otimes)=(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\cdots,\otimes(t_n)),$$

其中$\otimes(t_k)=[a_k,b_k],k=1,2,\cdots,n$,将其表示为

$$\otimes(t_k)=a_k+h_k\xi,\ h_k=b_k-a_k,\ \xi\in[0,1].$$

称a_k为区间灰数$\otimes(t_k)$的''白部'',称h_k为区间灰数$\otimes(t_k)$的''灰部''. 所有''白部''构成的序列称为区间灰数$\otimes(t_k)$的白部序列,记为R; 所有''灰部''构成的序列称为区间灰数$\otimes(t_k)$的灰部序列,记为H.

定义3 设$X_i^{(R)}=(r_{i1}^{(R)},r_{i2}^{(R)},\cdots,r_{in}^{(R)})$和$X_i^{(H)}=(r_{i1}^{(H)},r_{i2}^{(H)},\cdots,r_{in}^{(H)})$分别为方案$X_i$的''白部''和''灰部''序列; $X^{+(R)}=(r_1^{+(R)},r_2^{+(R)},\cdots,r_n^{+(R)})$和$X^{+(H)}=(r_1^{+(H)},r_2^{+(H)},\cdots,r_n^{+(H)})$分别为正理想点''白部''和''灰部''序列; $X^{-(R)}=(r_1^{-(R)},r_2^{-(R)},\cdots,r_n^{-(R)})$和$X^{-(H)}=(r_1^{-(H)},r_2^{-(H)},\cdots,r_n^{-(H)})$分别为负理想点''白部''和''灰部''序列.

定义4 设$\otimes(t_k)=[a_k,b_k],\otimes(t_m)=[a_m,b_m]$为两个区间灰数,$\hat{\otimes}(t_k)$与$\hat{\otimes}(t_m)$,$g_k^o$与$g_m^o$分别为区间灰数$\otimes(t_k)$和$\otimes(t_m)$的核与灰度,称$d(\otimes(t_k),\otimes(t_m))=\max(\left|\hat{\otimes}(t_k)-\hat{\otimes}(t_m)\right|,|g_k^o-g_m^o|)$为区间灰数$\otimes(t_k)$和$\otimes(t_m)$离散度.

定义5 设$\otimes(t_k)=[a_k,b_k],\otimes(t_m)=[a_m,b_m]$为两个区间灰数,则称

$$T(\otimes(t_k),\otimes(t_m))=\begin{cases}\dfrac{1-d(\otimes(t_k),\otimes(t_m))}{1+d(\otimes(t_k),\otimes(t_m))},\ 0<d(\otimes(t_k),\otimes(t_m))<1;\\ 0,\ d(\otimes(t_k),\otimes(t_m))\geqslant 1\end{cases}$$

为区间灰数$\otimes(t_k)$和$\otimes(t_m)$的接近度.

定理1 设区间灰数为$\otimes(t_k)$和$\otimes(t_m)$,则$d(\otimes(t_k),\otimes(t_m))$满足下列3条性质:

1) $d(\otimes(t_k),\otimes(t_m))\geqslant 0$;

2) $d(\otimes(t_k),\otimes(t_m))=d(\otimes(t_m),\otimes(t_k))$;

3) $\otimes(t_k)=\otimes(t_m)\Leftrightarrow d(\otimes(t_k),\otimes(t_m))=0$.

证明略.

2 信息分解下区间灰数的白化序列性质

定理2 信息分解下的区间灰数白化序列所含信息量与原区间灰数序列相等.

证明 因为$\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]=[a_k,b_k]+[a_k,a_k]-[a_k,a_k]$,所以$[a_k,b_k]=[a_k,a_k]+([a_k,b_k]-[a_k,a_k])$. 由区间灰数代数运算法则,得

$$[a_k,b_k]-[a_k,a_k]=[a_k-a_k,b_k-a_k]=$$
$$[0,b_k-a_k]=(b_k-a_k)\times[0,1],$$

故$[a_k,b_k]=a_k+(b_k-a_k)\times[0,1]$,即

$$\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]=a_k+(b_k-a_k)\times[0,1]=$$
$$a_k+h_k\xi,\ \xi\in[0,1].\qquad\square$$

定理3[18] 信息分解下的区间灰数白化序列与原区间灰数序列具有数乘变换的一致性,即

$$m\cdot X(\otimes)=$$
$$(m\otimes(t_1),m\otimes(t_2),\cdots,m\otimes(t_n))\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}m\cdot R=m(a_1,a_2,\cdots,a_n),\\ m\cdot H=m(h_1,h_2,\cdots,h_n).\end{cases}$$

证明略.

3 基于信息分解的区间灰数的关联一致性决策模型构建

由定义2可知,首先,通过信息分解方法可以将区间灰数序列等价地转换为''白部''序列和''灰部''序列,即

$$X(\otimes)=(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\cdots,\otimes(t_n))\Rightarrow$$
$$\begin{cases}R=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\\ H=(h_1,h_2,\cdots,h_n);\end{cases}$$

然后可建立灰色关联度模型.

定理4 设系统行为序列

$$X_1(\otimes)=(\otimes_1(t_1),\otimes_1(t_2),\cdots,\otimes_1(t_n)),$$
$$X_2(\otimes)=(\otimes_2(t_1),\otimes_2(t_2),\cdots,\otimes_2(t_n)),$$
$$\vdots$$
$$X_m(\otimes)=(\otimes_m(t_1),\otimes_m(t_2),\cdots,\otimes_m(t_n)).$$

根据定义2, 可以有如下的转换公式:

$$X_i(\otimes)=(\otimes_i(t_1),\otimes_i(t_2),\cdots,\otimes_i(t_n))\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}R_i=(r_i(t_1),r_i(t_2),\cdots,r_i(t_n)),\\ H_i=(h_i(t_1),h_i(t_2),\cdots,h_i(t_n)),\end{cases} i=1,2,\cdots,m.$$

对于$\xi_r\in(0,1)$, 令

$$\gamma_r(r_1(t_k),r_i(t_k))=$$
$$\frac{\min\limits_i\min\limits_k|r_1(t_k)-r_i(t_k)|+}{|r_1(t_k)-r_i(t_k)|+}\rightarrow$$
$$\leftarrow\frac{\xi_r\max\limits_i\max\limits_k|r_1(t_k)-r_i(t_k)|}{\xi_r\max\limits_i\max\limits_k|r_1(t_k)-r_i(t_k)|},$$
$$\gamma(R_1(\otimes),R_i(\otimes))=\sum_{k=1}^{n}\gamma_r(r_1(t_k),r_i(t_k))\omega_j,$$

则$\gamma(R_1(\otimes),R_i(\otimes))$满足灰色关联公理. 其中: ξ_r称为分辨系数, $\gamma(R_1(\otimes),R_i(\otimes))$称为$X_1(\otimes)$与$X_i(\otimes)$信息分解下区间灰数的“白部”关联度.

对于$\xi_h\in(0,1)$, 令

$$\gamma_h(h_1(t_k),h_i(t_k))=$$
$$\frac{\min\limits_i\min\limits_k|h_1(t_k)-h_i(t_k)|+}{|h_1(t_k)-h_i(t_k)|+}\rightarrow$$
$$\leftarrow\frac{\xi_h\max\limits_i\max\limits_k|h_1(t_k)-h_i(t_k)|}{\xi_h\max\limits_i\max\limits_k|h_1(t_k)-h_i(t_k)|},$$
$$\gamma(H_1(\otimes),H_i(\otimes))=\sum_{k=1}^{n}\gamma_h(h_1(t_k),h_i(t_k))\omega_j,$$

则$\gamma(H_1(\otimes),H_i(\otimes))$满足灰色关联公理. 其中: ξ_h称为分辨系数, $\gamma(H_1(\otimes),H_i(\otimes))$称为$X_1(\otimes)$与$X_i(\otimes)$信息分解下区间灰数的“灰部”关联度.

定义6 设$\gamma^+(R(t_k),R_i(t_k))$、$\gamma^-(R(t_k),R_i(t_k))$分别为方案$X_i$和正理想点方案$X^+$与负理想点方案$X^-$的“白部”序列灰色关联度; $\gamma^+(H(t_k),H_i(t_k))$和$\gamma^-(H(t_k),H_i(t_k))$分别为方案$X_i$和正理想点方案$X^+$与负理想点方案$X^-$的“灰部”序列灰色关联度.

定理5 设$\gamma^+(R(t_k),R_i(t_k))$、$\gamma^-(R(t_k),R_i(t_k))$如定义6所示, 并假设

$$f(\delta_i^{(r)})=[(1-\delta_i^{(r)})\cdot\gamma^+(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2+$$
$$[\delta_i^{(r)}\cdot\gamma^-(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2,$$

其中$\delta_i^{(r)}$为“白部”关联一致性系数, 则

$$\delta_i^{(r)}=$$
$$\frac{[\gamma^+(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2}{[\gamma^+(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2+[\gamma^-(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2},$$

且一致性系数$\delta_i^{(r)}$越大, 说明第i方案越好.

证明 由定义6和定理4可知: $\gamma^+(R(t_k),R_i(t_k))$越大, 方案$X_i$越靠近正理想点方案$X^+$; $\gamma^-(R(t_k),R_i(t_k))$越小, 方案$X_i$越远离负理想点$X^-$. 因此, 只需综合两个方面使其一致变化就可以得到最优. 又由定理5已知条件可知, “白部”关联一致性系数$\delta_i^{(r)}$为如下函数:

$$f(\delta_i^{(r)})=[(1-\delta_i^{(r)})\cdot\gamma^+(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2+$$
$$[\delta_i^{(r)}\cdot\gamma^-(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2,$$

其中$\delta_i^{(r)}$为“白部”关联一致性系数, 故只需求使得函数$f(\delta_i^{(r)})$最小时的$\delta_i^{(r)}$值, 即求$\min f(\delta_i^{(r)})$. 由于函数$f(\delta_i^{(r)})$没有不可导点, 最值点就是一阶导数为零的点, 由$\dfrac{\mathrm{d}f(\delta_i^{(r)})}{\mathrm{d}\delta_i^{(r)}}=0$, 可求得

$$\delta_i^{(r)}=$$
$$\frac{[\gamma^+(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2}{[\gamma^+(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2+[\gamma^-(R(\otimes),R_i(\otimes))]^2}.$$

类似地, 有“灰部”关联一致性系数$\delta_i^{(h)}$, 在此不再赘述. □

定义7 设$\delta_i^{(r)}$和$\delta_i^{(h)}$分别为“白部”关联一致性系数和“灰部”关联一致性系数, 则称$\delta_i=\theta\cdot\delta_i^{(r)}+(1-\theta)\cdot\delta_i^{(h)}$为综合关联一致性系数. 其中$\theta\in(0,1)$为平衡系数, 一般取$\theta=0.5$.

4 基于信息分解的区间灰数关联一致性决策算法步骤

Step1 确定多属性决策的方案集$X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$和指标集$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$, 并写出X对S的区间灰数决策矩阵M, 即

$$M=([x_{ij}^L,x_{ij}^U]),\ i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n.$$

Step2 对区间灰数决策矩阵进行规范化处理, 得到规范化区间灰数矩阵R. 设指标$A_j=[x_{ij}^L,x_{ij}^U]$. 若A_j为效益型, 则规范化处理计算公式为

$$r_{ij}^L=\frac{x_{ij}^L}{\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}^U},\ r_{ij}^U=\frac{x_{ij}^U}{\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}^L};$$

若A_j为成本型, 则规范化处理计算公式为

$$r_{ij}^L=\frac{\dfrac{1}{x_{ij}^U}}{\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{1}{x_{ij}^L}},\ r_{ij}^U=\frac{\dfrac{1}{x_{ij}^L}}{\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{1}{x_{ij}^U}}.$$

显然$r_{ij}^L,r_{ij}^U\in[0,1],i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n.$ 由此可以得到规范化矩阵

$$R=([r_{ij}^L,r_{ij}^U])_{m\times n}.$$

Step3 根据定义1构建出正理想方案区间灰数序列和负理想方案区间灰数序列.

Step4 根据定义2和定义3将区间灰数进行信息分解,分解为"白部"和"灰部"两个实数型序列.

Step5 指标权重的确定. 若指标的权重信息也是部分已知部分未知的区间灰数,则可以通过在规范化决策矩阵$R=([r_{ij}^L,r_{ij}^U])_{m\times n}=(r_{ij})_{m\times n}$中确定的正理想解$r^+=(r_1^+,r_2^+,\cdots,r_n^+)$和负理想解$r^-=(r_1^-,r_2^-,\cdots,r_n^-)$, 再结合定义4和定义5就可以确定方案$X_i$与正、负理想解的综合接近度. 最后通过如下的目标规划模型确定指标权重:

$$\max\ T=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(T(r_{ij},r_j^+)-T(r_{ij},r_j^-))\omega_j;$$

$$\text{s.t. }0\leqslant\omega_j^L\leqslant\omega_j\leqslant\omega_j^U\leqslant1\text{ 且 }\sum_{j=1}^n\omega_j=1.$$

Step6 根据定理4分别计算正、负理想方案的与各方案之间的"白部"与"灰部"的关联度.

Step7 根据定理5和定义7计算综合关联一致性系数δ_i.

Step8 根据综合关联一致性系数δ_i值的大小进行方案排序.

5 算例分析

现有一个投资银行准备对一项目投资,根据前期调研分析,最终确定4家企业X_1、X_2、X_3、X_4进行投资,在正式投资之前先要对各企业进行进一步的评估,并最终作出决定是否进行投资. 评估时选取以下4个指标: 投资净产值S_1; 投资利税率S_2; 内部收益率S_3; 环境污染度S_4. 具体值见表1. 其中: S_4为成本型指标, S_1、S_2、S_3为效益型指标.

表1 区间灰数决策矩阵

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	[1.8, 2.2]	[1.2, 1.8]	[1.8, 2.2]	[5.4, 5.6]
X_2	[2.3, 2.7]	[2.4, 3.0]	[1.6, 2.0]	[6.4, 6.6]
X_3	[1.6, 2.0]	[1.7, 2.3]	[1.9, 2.3]	[4.4, 4.6]
X_4	[2.0, 2.4]	[1.5, 2.1]	[1.8, 2.2]	[4.9, 5.1]

Step1 构建方案对指标的区间灰数决策矩阵(见表1).

Step2 对区间灰数决策矩阵进行规范化处理,得到如表2所示的矩阵表.

表2 区间灰数规范化决策矩阵

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	[0.194 0, 0.285 7]	[0.130 4, 0.264 7]	[0.206 9, 0.309 8]	[0.231 1, 0.249 1]
X_2	[0.247 0, 0.351 0]	[0.260 9, 0.441 2]	[0.183 9, 0.281 7]	[0.196 0, 0.210 2]
X_3	[0.172 0, 0.259 7]	[0.184 8, 0.338 2]	[0.281 4, 0.323 9]	[0.281 3, 0.305 7]
X_4	[0.215 1, 0.312 0]	[0.163 0, 0.308 8]	[0.205 9, 0.309 8]	[0.205 9, 0.274 7]

Step3 构建出正理想方案区间灰数序列和负理想方案区间灰数序列.

正理想序列

$$X^+=\{[0.247\,0,0.351\,0],[0.260\,9,0.441\,2],[0.281\,4,0.323\,9],[0.281\,3,0.305\,7]\};$$

负理想序列

$$X^-=\{[0.172\,0,0.259\,1],[0.130\,4,0.264\,7],[0.183\,9,0.281\,7],[0.196\,0,0.210\,2]\}.$$

Step4 利用信息分解方法将区间灰数序列进行白化处理为"白部序列"和"灰部序列",具体如下:

$$X_1:\begin{cases}R=(0.194\,0,0.130\,4,0.206\,9,0.231\,1),\\H=(0.091\,7,0.134\,3,0.102\,2,0.018\,0);\end{cases}$$

$$X_2:\begin{cases}R=(0.247\,0,0.206\,9,0.183\,9,0.196\,0),\\H=(0.104\,0,0.180\,3,0.097\,8,0.014\,2);\end{cases}$$

$$X_3:\begin{cases}R=(0.172\,0,0.184\,8,0.281\,4,0.281\,3),\\H=(0.087\,7,0.153\,4,0.042\,5,0.024\,4);\end{cases}$$

$$X_4:\begin{cases}R=(0.215\,1,0.163\,0,0.205\,9,0.253\,7),\\H=(0.096\,9,0.145\,8,0.103\,9,0.021\,0);\end{cases}$$

$$X^+:\begin{cases}R=(0.247\,0,0.260\,9,0.281\,4,0.281\,3),\\H=(0.104\,0,0.180\,3,0.281\,4,0.024\,4);\end{cases}$$

$$X^-:\begin{cases}R=(0.172\,0,0.130\,4,0.183\,9,0.196\,0),\\H=(0.087\,1,0.134\,3,0.097\,8,0.014\,2).\end{cases}$$

Step5 指标权重的确定. 本算例的各个指标对于投资银行而言都很重要,因此各指标取等权重,即

$$\omega_1 = 0.25,\ \omega_2 = 0.25,\ \omega_3 = 0.25,\ \omega_4 = 0.25.$$

Step6 根据定理4分别计算正、负理想方案的与各方案之间的‘‘白部’’与‘‘灰部’’的关联度. 正理想点‘‘白部序列’’与方案点‘‘白部序列’’之间的关联度

$$r_{+1}^{(R)} = 0.7480,\ r_{+2}^{(R)} = 0.5841,$$
$$r_{+3}^{(R)} = 0.6497,\ r_{+4}^{(R)} = 0.7227;$$

正理想点‘‘灰部序列’’与方案点‘‘灰部序列’’之间的关联度

$$r_{+1}^{(H)} = 0.7951,\ r_{+2}^{(H)} = 0.8263,$$
$$r_{+3}^{(H)} = 0.8204,\ r_{+4}^{(H)} = 0.8045.$$

类似地,负理想点‘‘白部序列’’与方案点‘‘白部序列’’之间的关联度

$$r_{-1}^{(R)} = 0.9009,\ r_{-2}^{(R)} = 0.6743,$$
$$r_{-3}^{(R)} = 0.5424,\ r_{-4}^{(R)} = 0.8980;$$

负理想点‘‘灰部序列’’与方案点‘‘灰部序列’’之间的关联度

$$r_{-1}^{(H)} = 0.9213,\ r_{-2}^{(H)} = 0.7961,$$
$$r_{-3}^{(H)} = 0.6686,\ r_{-4}^{(H)} = 0.9036.$$

Step7 根据定理5和定义7计算综合关联一致性系数 δ_i. 首先,分别计算每个方案‘‘白部序列’’和‘‘灰部序列’’的关联一致性系数 $\delta_i^{(R)}$ 和 $\delta_i^{(H)}$, 具体如下:

$$\delta_1^{(R)} = 0.4081,\ \delta_2^{(R)} = 0.4287,$$
$$\delta_3^{(R)} = 0.5893,\ \delta_4^{(R)} = 0.3931;$$
$$\delta_1^{(H)} = 0.4274,\ \delta_2^{(H)} = 0.5186,$$
$$\delta_3^{(H)} = 0.6009,\ \delta_4^{(H)} = 0.4422.$$

其次,计算综合关联一致性系数,具体如下:

$$\delta_1 = \delta_1^{(R)} + \delta_1^{(H)} = 0.8355,$$
$$\delta_2 = \delta_2^{(R)} + \delta_2^{(H)} = 0.9473,$$
$$\delta_3 = \delta_3^{(R)} + \delta_3^{(H)} = 1.1902,$$
$$\delta_4 = \delta_4^{(R)} + \delta_4^{(H)} = 0.8357.$$

Step8 根据综合关联一致性系数进行方案排序. 因为 $\delta_3 > \delta_2 > \delta_4 > \delta_1$, 所以方案之间排序为

$$X_3 > X_2 > X_4 > X_1,$$

方案 X_3 为最优. 从投资银行的角度应将 X_3 作为最佳投资对象,但无论如何也不应将 X_1 作为投资的对象.

为了说明该方法具有一般性,现将不同方法的结果进行比较. 本文选择的比较方法是文献[2]的方法. 文献[2]方法如下: 首先计算区间灰数的距离; 其次,利用区间灰数距离作为关联系数,计算方案与正理想方案的灰色关联度; 最后,根据关联度进行排序(见表3).

表 3 不同方法排序比较

方案	文献[2]方法		本文方法	
	关联度	关联度排序	关联一致性系数值	一致性系数排序
X_1	0.5305	4	0.8355	4
X_2	0.7457	2	0.9473	2
X_3	0.8547	1	1.1902	1
X_4	0.6867	3	0.8357	3

从表3可以看出,本文的模型排序与文献[2]的排序完全一致. 但是,文献[2]的计算更加复杂,同时也会因计算区间数距离方法的不同可能导致结果的不一致问题. 另外,文献[2]只考虑了与正理想方案的关联度,没有考虑与负理想方案的关联度,这很可能会造成变化的不一致性问题. 相比之下,本文方法既能够充分利用所给的信息,又能够综合考虑与正负理想方案的关联度,克服了变化的不一致性问题,同时本文方法不仅计算简单而且易于操作.

6 结 论

本文对决策矩阵为区间灰数的多属性决策问题进行了研究. 利用信息分解的方法,在决策信息不丢失的前提下,将区间灰数序列分解成实数型‘‘白部’’序列和‘‘灰部’’序列,结合TOPSIS的思想提出了关联度的测度方法,构建了关联一致性系数模型. 该方法克服了采用区间灰数决策时只用它的一个白化值代替区间灰数进行决策所带来的问题. 该方法的最大优点是充分利用已有的信息进行科学决策,既规避了区间灰数的运算问题,又体现出了‘‘充分利用已有信息’’的灰理论思想. 该方法评价结果科学客观,程序设计较为方便且易于计算机实现. 算例分析表明了该模型的合理性和科学性,为区间灰数信息下决策问题的研究提供了一个有效的科学途径.

参考文献(References)

[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 256-257.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its application[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010：256-257.)

[2] 王正新, 党耀国, 裴玲玲, 等. 基于累积前景理论的多指标灰关联决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(2): 232-236.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L, et al. Multi-index grey

relational decision-making based on cumulative prospect theory[J]. Control and Decision, 2010, 25(2): 232-236.)

[3] 陈孝新, 刘思峰. 部分权重信息且对方案有偏好的灰色关联决策法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(11): 1868-1871.
(Cheng X X, Liu S F. Grey incidence decision-making method with partial weight information but with preference information on alternatives[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(11): 1868-1871.)

[4] 蒋诗泉, 刘思峰, 刘中侠, 等. 基于面积的灰色关联决策模型[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 683-690.
(Jiang S Q, Liu S F, Liu Z X, et al. Grey incidence decision making model based on area[J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 683-690.)

[5] Zhang K, Ye W, Zhao L P. The absolute degree of grey incidence for grey sequence base on standard grey interval number operation[J]. Kybernetes, 2012, 41(7/8): 934-944.

[6] Wang Z X. Correlation analysis of sequences with interval grey numbers based on the kernel and greyness degree[J]. Kybernetes, 2013, 42(2): 309-317.

[7] Xie N M, Liu S F. A novel grey relational model based on grey number sequences[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2011, 1(2): 117-128.

[8] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 多指标区间数关联决策模型研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 36(3): 403-406.
(Dang Y G, Ling S F, Liu B, et al. Study on incidence decision making model of multi-attribute interval number[J]. J of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2004, 36(3): 403-406.)

[9] 罗党, 刘思峰. 灰色关联决策方法研究[J]. 中国管理科学, 2005, 13(1): 101-106.
(Luo D, Liu S F. Study on the method for grey incidence decision-making[J]. Chinese J of Management Science, 2005, 13(1): 101-106.)

[10] 罗党, 刘思峰. 不完备信息系统的灰色关联决策方法[J]. 应用科学学报, 2005, 23(4): 408-412.
(Luo D, Liu S F. Grey incidence decision-making with incomplete information[J]. J of Applied Sciences, 2005, 23(4): 408-412.)

[11] 谢乃明, 刘思峰. 考虑概率分布的灰数排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(4): 169-175.
(Xie N M, Liu S F. On comparing grey numbers with their probability distribution[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(4): 169-175.)

[12] 闫书丽, 刘思峰, 朱建军, 等. 基于相对核和精确度的灰数排序问题[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 315-319.
(Yan S L, Liu S F, Zhu J J, et al. The ranking method of grey numbers based on relative kernel and degree of accuracy[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 315-319.)

[13] 曾波, 刘思峰, 李川, 等. 基于蛛网面积的区间灰数灰靶决策模型[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(11): 2329-2334.
(Zeng B, Liu S F, Li C, et al. Grey target decision-model of interval grey number based on cobweb area[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(11): 2329-2334.)

[14] 王霞, 党耀国. 基于Choquet 积分的区间灰数多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(5): 1106-1110.
(Wang X, Dang Y G. Approach for multiple attribute decision-making with interval grey number based on Choquet integral[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(5): 1106-1110.)

[15] 杨保华, 方志耕, 周伟, 等. 基于信息还原算子的多指标区间灰数关联决策模型[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 182-186.
(Yang B H, Fang Z G, Zhou W, et al. Incidence decision model of multi-attribute interval grey number based on information reduction operator[J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 182-186.)

[16] 曾波, 刘思峰, 孟伟, 等. 基于空间映射的区间灰数关联度模型[J]. 系统工程, 2010, 28(8): 122-126.
(Zeng B, Liu S F, Meng W, et al. Incidence degree model of interval grey number based on space mapping[J]. Systems Engineering, 2010, 28(8): 122-126.)

[17] 方志耕, 刘思峰, 陆芳, 等. 区间灰数表征与算法改进及其GM(1, 1)模型应用研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2): 57-61.
(Fang Z G, Liu S F, Luo F, et al. Study on improvement of token and arithmetic of interval grey numbers and its GM(1, 1) model[J]. Engineering Sciences, 2005, 7(2): 57-61.)

[18] 曾波, 孟伟, 王正新. 灰色预测系统建模对象拓展研究[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 55-56.
(Zeng B, Meng W, Wang Z X. A extended research on modeling object of grey forecasting system[M]. Beijing: Science Press, 2014: 55-56.)

（责任编辑：曹洪武）